Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

КЛАССИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТСКИЙ УЧЕБНИК

И. В. Проскуряков

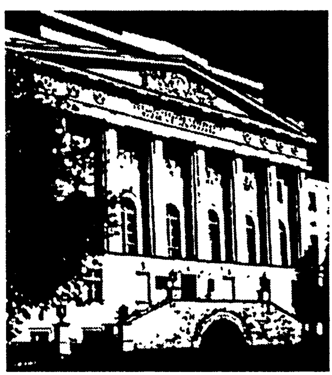
СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ

Серия

КЛАССИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТСКИЙ УЧЕБНИК

основана в 2002 году по инициативе ректора
МГУ им. М.В. Ломоносова
академика РАН В.А. Садовничего
и посвящена

250-летию
Московского университета



КЛАССИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТСКИЙ УЧЕБНИК

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

И. В. Проскуряков

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ

9-е издание

Рекомендовано
Министерством образования Российской Федерации
в качестве учебного пособия для студентов
физико-математических специальностей
высших учебных заведений

Москва
БИНОМ. Лаборатория знаний
2005

УДК 512.8
ББК 22.143
П82

Печатается
по решению Ученого совета
Московского университета

Проскуряков И. В.

П82 Сборник задач по линейной алгебре / И. В. Проскуряков. — 9-е издание. — М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2005. — 383 с.: ил. (Классический университетский учебник)

ISBN 5-94774-209-8

Задачник содержит следующие разделы: определители, системы линейных уравнений, матрицы и квадратичные формы, векторные пространства и их линейные преобразования.

Всего приводится около двух тысяч задач различной степени сложности. Наиболее сложные задачи кроме ответов снабжены также подробными решениями.

Для студентов физико-математических, инженерно-физических и экономико-математических специальностей вузов.

УДК 512.8
ББК 22.143

По вопросам приобретения обращаться:
«БИНОМ. Лаборатория знаний» (095) 955-03-98
e-mail: Lbz@aha.ru, http://www.Lbz.ru

ISBN 5-94774-209-8

Уважаемый читатель!

Вы открыли одну из замечательных книг, изданных в серии «Классический университетский учебник», посвященной 250-летию Московского университета. Серия включает свыше 150 учебников и учебных пособий, рекомендованных к изданию Учеными советами факультетов, редакционным советом серии и издаваемых к юбилею по решению Ученого совета МГУ.

Московский университет всегда славился своими профессорами и преподавателями, воспитавшими не одно поколение студентов, впоследствии внесших заметный вклад в развитие нашей страны, составивших гордость отечественной и мировой науки, культуры и образования.

Высокий уровень образования, которое дает Московский университет, в первую очередь обеспечивается высоким уровнем написанных выдающимися учеными и педагогами учебников и учебных пособий, в которых сочетаются как глубина, так и доступность излагаемого материала. В этих книгах аккумулируется бесценный опыт методики и методологии преподавания, который становится достоянием не только Московского университета, но и других университетов России и всего мира.

Издание серии «Классический университетский учебник» наглядно демонстрирует тот вклад, который вносит Московский университет в классическое университетское образование в нашей стране и, несомненно, служит его развитию.

Решение этой благородной задачи было бы невозможным без активной помощи со стороны издательств, принявших участие в издании книг серии «Классический университетский учебник». Мы расцениваем это как поддержку ими позиции, которую занимает Московский университет в вопросах науки и образования. Это служит также свидетельством того, что 250-летний юбилей Московского университета — выдающееся событие в жизни всей нашей страны, мирового образовательного сообщества.

Ректор Московского университета
академик РАН, профессор *В. А. Садовничий*

Оглавление

Вступительное слово

Несколько поколений студентов механико-математического факультета Московского университета учились у Игоря Владимировича Проскурякова по его задачнику. Вначале это был задачник по линейной алгебре, но затем по велению времени в него были включены дополнительные разделы, такие, как аффинная геометрия, тензорная алгебра и теория групп. Почти в каждое новое издание вносились исправления и дополнения, так что в настоящем виде задачник является плодом кропотливого труда всей жизни автора.

Каждый, кому пришлось составить хотя бы несколько задач для вступительных экзаменов, знает, как трудно избежать ошибок. Что уж говорить о целом задачнике! Одно из достоинств задачника И. В. Проскурякова состоит в том, что он свободен от ошибок: все имевшиеся ошибки давно исправлены.

Задачник содержит как достаточное количество типовых вычислительных задач на применение основных алгоритмов линейной алгебры, так и большое число более сложных задач, в том числе теоретического характера. Тем самым он предоставляет преподавателю возможность для маневра в соответствии с содержанием конкретного курса и составом конкретной группы.

Следует сказать, что содержание курса алгебры и способ изложения постоянно меняются. Поэтому некоторые разделы любого задачника в какой-то момент могут казаться архаичными, но при определенном повороте событий они вновь могут стать актуальными. Так, в последние годы на мехмате принято выводить жорданову форму матрицы линейного оператора геометрически, в связи с чем теория λ-матриц становится ненужной, Однако эта теория, представляющая собой в сущности теорию модулей над кольцом многочленов, выглядит вполне актуально в контексте общей теории модулей над евклидовыми кольцами, которую сейчас все больше лекторов начинают включать в свои курсы. То же относится и к отдельным задачам, которые многие годы могут оставаться невостребованными, но потом вдруг обратить на себя внимание своей забытой красотой или оказаться для чего-то нужными. Задачник И. В. Проскурякова является аккумулятором опыта математиков, работавших на кафедре высшей алгебры мехмата на протяжении десятков лет, и в этом качестве может быть источником ценных сведений. Например, в моей научной работе, когда мне было нужно вычислить определитель матрицы, я часто находил ответ в этом задачнике. Я уверен, что задачник И. В. Проскурякова еще долгие годы будет полезен студентам и преподавателям физико-математических, инженерно-физических и экономико-математических специальностей вузов.

Э. Б. Винберг

доктор физико-математических наук,
профессор Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова

Предисловие автора

При составлении настоящего пособия автор стремился, во-первых, дать достаточное число упражнений для выработки навыков решения типовых задач (например, вычисление определителей с числовыми элементами, решение систем линейных уравнений с числовыми коэффициентами и т. п.), во-вторых, дать задачи, способствующие уяснению основных понятий и их взаимной связи (например, связь свойств матриц со свойствами квадратичных форм, с одной стороны, и линейных преобразований — с другой), в-третьих, дать задачи, дополняющие лекционные курсы и содействующие расширению математического кругозора (например, свойства пфаффова агрегата кососимметрнческого определителя, свойства ассоциированных матриц и т. п.).

В ряде задач предлагается доказать теоремы, которые можно найти в учебниках. Помещая такие задачи, автор исходил из того, что лектор при недостатке времени дает изучить часть материала по книге самим учащимся и это можно делать по задачнику, где даны указания, помогающие самостоятельно провести доказательство, что способствует развитию начальных навыков научного исследования.

Содержание и порядок изложения материала на лекциях во многом зависят от лектора. Автор старался дать задачи, учитывающие это разнообразие изложения. Отсюда некоторый параллелизм и повторяемость материала. Так, одни и те же факты даны сначала в разделе квадратичных форм, а затем и в разделе линейных преобразований, некоторые задачи сформулированы так, что их можно решать как в случае вещественного евклидова, так и в случаях комплексного унитарного пространства. Нам кажется, что для задачника это желательно, так как дает большую гибкость при его использовании.

В начале некоторых параграфов помещены введения. Они содержат лишь краткие указания терминологии и обозначений в тех случаях, когда в учебниках нет полного единства в указанном отношении. Исключением является введение 5, где даны основные методы вычисления определителей любого порядка и приведены примеры на каждый метод. Автор считал это полезным ввиду того, что в учебниках эти указания отсутствуют, а учащиеся встречают здесь значительные трудности.

Номера задач, в ответах на которые имеются решения или указания, снабжены звездочкой. Решения даны для небольшого числа задач. Это или задачи, содержащие общий метод, применяемый затем к ряду других задач, или задачи повышенной трудности. Указания содержат, как правило, лишь идею или метод решения и оставляют учащимся проведение самого решения. Лишь для более трудных задач они содержат краткий план решения.

И. В. Проскуряков

Выражаю свою благодарность за предложенные задачи и ценные советы Э. Б. Винбергу, И. М. Гельфанду, Н. В. Ефимову, А. П. Мишиной, Л. Я. Окуневу, Л. А. Скорнякову, А. И. Узкову, И. Р. Шафаревичу и всем работникам кафедры высшей алгебры Московского университета.

Отдел 1

ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

§ 1. Определители 2-го и 3-го порядков

Вычислить определители:

1. $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}$. **2.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$. **3.** $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 8 & 5 \end{vmatrix}$. **4.** $\begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 8 & 12 \end{vmatrix}$. **5.** $\begin{vmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{vmatrix}$.

6. $\begin{vmatrix} n+1 & n \\ n & n-1 \end{vmatrix}$. **7.** $\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}$. **8.** $\begin{vmatrix} a^2+ab+b^2 & a^2-ab+b^2 \\ a+b & a-b \end{vmatrix}$.

9. $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$. **10.** $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$. **11.** $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$.

12. $\begin{vmatrix} \sin\alpha+\sin\beta & \cos\beta+\cos\alpha \\ \cos\beta-\cos\alpha & \sin\alpha-\sin\beta \end{vmatrix}$. **13.** $\begin{vmatrix} 2\sin\varphi\cos\varphi & 2\sin^2\varphi-1 \\ 2\cos^2\varphi-1 & 2\sin\varphi\cos\varphi \end{vmatrix}$.

14. $\begin{vmatrix} \dfrac{1-t^2}{1+t^2} & \dfrac{2t}{1+t^2} \\ \dfrac{-2t}{1+t^2} & \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{vmatrix}$. **15.** $\begin{vmatrix} \dfrac{(1-t)^2}{1+t^2} & \dfrac{2t}{1+t^2} \\ \dfrac{2t}{1+t^2} & -\dfrac{(1+t)^2}{1+t^2} \end{vmatrix}$.

16. $\begin{vmatrix} \dfrac{1+t^2}{1-t^2} & \dfrac{2t}{1-t^2} \\ \dfrac{2t}{1-t^2} & \dfrac{1+t^2}{1-t^2} \end{vmatrix}$. **17.** $\begin{vmatrix} 1 & \log_b a \\ \log_a b & 1 \end{vmatrix}$.

Вычислить определители, в которых $i = \sqrt{-1}$:

18. $\begin{vmatrix} a & c+di \\ c-di & b \end{vmatrix}$. **19.** $\begin{vmatrix} a+bi & b \\ 2a & a-bi \end{vmatrix}$.

20. $\begin{vmatrix} \cos\alpha+i\sin\alpha & 1 \\ 1 & \cos\alpha-i\sin\alpha \end{vmatrix}$. **21.** $\begin{vmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{vmatrix}$.

Пользуясь определителями, решить системы уравнений:

22. $2x+5y=1,$
$3x+7y=2.$

23. $2x-3y=4,$
$4x-5y=10.$

24. $5x + 7y = 1,$
$x - 2y = 0.$

25. $4x + 7y + 13 = 0,$
$5x + 8y + 14 = 0.$

26. $x\cos\alpha - y\sin\alpha = \cos\beta,$
$x\sin\alpha + y\cos\alpha = \sin\beta.$

27. $x\,\mathrm{tg}\alpha + y = \sin(\alpha + \beta),$
$x - y\,\mathrm{tg}\alpha = \cos(\alpha + \beta),$
где $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ (k – целое).

Исследовать, будет ли система уравнений определенна (имеет единственное решение), неопределенна (имеет бесконечно много решений) или противоречива (не имеет решения):

28. $4x + 6y = 2,$
$6x + 9y = 3.$
Дают ли здесь формулы Крамера верный ответ?

29. $3x - 2y = 2,$
$6x - 4y = 3.$

30. $(a - b)x = b - c.$

31. $x\sin\alpha = 1 + \sin\alpha.$

32. $x\sin\alpha = 1 + \cos\alpha.$

33. $x\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha + \sin\beta.$

34. $a^2x = ab,$
$abx = b^2.$

35. $ax + by = ad,$
$bx + cy = bd.$

36. $ax + 4y = 2,$
$9x + ay = 3.$

37. $ax - 9y = 6,$
$10x - by = 10.$

38. Доказать, что для равенства нулю определителя второго порядка необходимо и достаточно, чтобы его строки были пропорциональны. То же верно и для столбцов (если некоторые элементы определителя равны нулю, то пропорциональность можно понимать в том смысле, что элементы одной строчки получаются из соответствующих элементов другой строчки умножением на одно и то же число, быть может, равное нулю).

39.* Доказать, что при действительных a, b, c корни уравнения

$$\begin{vmatrix} a - x & b \\ b & c - x \end{vmatrix} = 0$$

будут действительными.

40.* Доказать, что квадратный трехчлен $ax^2 + 2bx + c$ с комплексными коэффициентами тогда и только тогда будет полным квадратом, если

$$\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = 0.$$

41. Доказать, что при действительных a, b, c, d корни уравнения

$$\begin{vmatrix} a - x & c + di \\ c - di & b - x. \end{vmatrix} = 0$$

будут действительными.

42*. Показать, что значение дроби $\dfrac{ax+b}{cx+d}$, где по крайней мере одно из чисел c, d отлично от нуля, тогда и только тогда не зависит от значения x, когда $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0$.

Вычислить определители 3-го порядка:

43. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$. **44.** $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$. **45.** $\begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 8 \\ 1 & -7 & -5 \end{vmatrix}$.

46. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & -3 \end{vmatrix}$. **47.** $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$. **48.** $\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$.

49. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$. **50.** $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$. **51.** $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 7 & 4 & 5 \end{vmatrix}$. **52.** $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 7 & 1 & 6 \\ 6 & 0 & 5 \end{vmatrix}$.

53. $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 25 \\ 1 & 7 & 49 \\ 1 & 8 & 64 \end{vmatrix}$. **54.** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 9 \\ 16 & 25 & 81 \end{vmatrix}$. **55.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$. **56.** $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$.

57. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$. **58.** $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & c & d \\ 0 & e & 0 \end{vmatrix}$. **59.** $\begin{vmatrix} a & x & x \\ x & b & x \\ x & x & c \end{vmatrix}$.

60. $\begin{vmatrix} a+x & x & x \\ x & b+x & x \\ x & x & c+x \end{vmatrix}$. **61.** $\begin{vmatrix} \alpha^2+1 & \alpha\beta & \alpha\gamma \\ \alpha\beta & \beta^2+1 & \beta\gamma \\ \alpha\gamma & \beta\gamma & \gamma^2+1 \end{vmatrix}$.

62. $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha\cos\beta & \sin\alpha\sin\beta \\ -\sin\alpha & \cos\alpha\cos\beta & \cos\alpha\sin\beta \\ 0 & -\sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$. **63.** $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & 1 \\ \sin\beta & \cos\beta & 1 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix}$.

64. При каком условии справедливо равенство

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha & \cos\beta \\ \cos\alpha & 1 & \cos\gamma \\ \cos\beta & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cos\alpha & \cos\beta \\ \cos\alpha & 0 & \cos\gamma \\ \cos\beta & \cos\gamma & 0 \end{vmatrix}?$$

65. Показать, что определитель

$$\begin{vmatrix} a^2 & b\sin\alpha & c\sin\alpha \\ b\sin\alpha & 1 & \cos\alpha \\ c\sin\alpha & \cos\alpha & 1 \end{vmatrix}$$

и два других определителя, полученные из данного круговой перестановкой элементов a, b, c и α, β, γ, равны нулю, если a, b, c — длины сторон треугольника и α, β, γ — его углы, противолежащие соответственно сторонам a, b, c.

Вычислить определители 3-го порядка, в которых $i = \sqrt{-1}$:

66. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1+i \\ 0 & 1 & i \\ 1-i & -i & 1 \end{vmatrix}$. **67.** $\begin{vmatrix} x & a+bi & c+di \\ a-bi & y & e+fi \\ c-di & e-fi & z \end{vmatrix}$.

68. $\begin{vmatrix} 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ \varepsilon^2 & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon^2 & 1 \end{vmatrix}$, где $\varepsilon = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

69. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \varepsilon \\ 1 & 1 & \varepsilon^2 \\ \varepsilon^2 & \varepsilon & 1 \end{vmatrix}$, где $\varepsilon = \cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi$.

70. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon \end{vmatrix}$, где $\varepsilon = \cos\frac{4}{3}\pi + i\sin\frac{4}{3}\pi$.

71. Доказать, что если все элементы определителя 3-го порядка равны ±1,то сам определитель будет четным числом.

72*. Найти наибольшее значение, которое может принимать определитель 3-го порядка, при условии, что все его элементы равны ±1.

73*. Найти наибольшее значение определителя 3-го порядка при условии, что его элементы равны $+1$ или 0.

Пользуясь определителями, решить системы уравнений:

74. $\begin{aligned} 2x+3y+5z&=10,\\ 3x+7y+4z&=3,\\ x+2y+2z&=3. \end{aligned}$

75. $\begin{aligned} 5x-6y+4z&=3,\\ 3x-3y+2z&=2,\\ 4x-5y+2z&=1. \end{aligned}$

76. $\begin{aligned} 4x-3y+2z+4&=0,\\ 6x-2y+3z+1&=0,\\ 5x-3y+2z+3&=0. \end{aligned}$

77. $\begin{aligned} 5x+2y+3z+2&=0,\\ 2x-2y+5z&=0,\\ 3x+4y+2z+10&=0. \end{aligned}$

78*. $\begin{aligned} \frac{x}{a}-\frac{y}{b}+2&=0,\\ -\frac{2y}{b}+\frac{3z}{c}-1&=0,\\ \frac{x}{a}+\frac{z}{c}&=0. \end{aligned}$

79. $\begin{aligned} 2ax-3by+cz&=0,\\ 3ax-6by+5cz&=2abc,\\ 5ax-4by+2cz&=3abc, \end{aligned}$ где $abc \neq 0$.

80*. $\begin{aligned} 4bcx+acy-2abz&=0,\\ 5bcx+3acy-4abz+abc&=0,\\ 3bcx+2acy-abz-4abc&=0, \end{aligned}$ где $abc \neq 0$.

81*. Решить систему уравнений:

$$\begin{aligned} x+\ \ y+\ \ z&=a,\\ x+\ \varepsilon y+\varepsilon^2 z&=b,\\ x+\varepsilon^2 y+\ \varepsilon z&=c \end{aligned}$$

(ε — отличное от 1 значение $\sqrt[3]{1}$).

Исследовать, будет система уравнений определенна, неопределенна или противоречива:

82. $\begin{aligned} 2x-3y+\ z&=2,\\ 3x-5y+5z&=3,\\ 5x-8y+6z&=5. \end{aligned}$

83. $\begin{aligned} 4x+3y+2z&=1,\\ x+3y+5z&=1,\\ 3x+6y+9z&=2. \end{aligned}$

84. $\begin{aligned} 5x-6y+\ z&=4,\\ 3x-5y-2z&=3,\\ 2x-\ y+3z&=5. \end{aligned}$

85. $\begin{aligned} 2x-\ y+3z&=4,\\ 3x-2y+2z&=3,\\ 5x-4y\qquad&=2. \end{aligned}$

86. $\begin{aligned} 2ax-23y+29z&=4,\\ 7x+\ ay+\ 4z&=7,\\ 5x+\ 2y+\ az&=5. \end{aligned}$

87. $\begin{aligned} ax-3y+\ 5z&=4,\\ x-ay+\ 3z&=2,\\ 9x-7y+8az&=0. \end{aligned}$

88. $\begin{aligned} ax+4y+\ z\qquad&=0,\\ 2y+3z-1&=0,\\ 3x\qquad-bz+2&=0. \end{aligned}$

89. $\begin{aligned} ax\qquad+2z&=2,\\ 5x+2y\qquad&=1,\\ x-2y+bz&=3. \end{aligned}$

Путем прямого вычисления по правилу треугольников, или правилу Саррюса, доказать следующие свойства определителей 3-го порядка:

90. Если в определителе 3-го порядка поменять ролями строки и столбцы (т. е., как говорят, транспонировать его матрицу), то определитель не изменится.

91. Если все элементы какой-нибудь строки (или столбца) равны нулю, то и сам определитель равен нулю.

92. Если все элементы какой-нибудь строки (или столбца) определителя умножить на одно и то же число, то и весь определитель умножится на это число.

93. Если переставить две строки (или два столбца) определителя, то он изменит знак.

94. Если две строки (или два столбца) определителя одинаковы, то он равен нулю.

95. Если все элементы одной строки пропорциональны соответствующим элементам другой строки, то определитель равен нулю (то же верно и для столбцов).

96. Если каждый элемент некоторой строки определителя представлен в виде суммы двух слагаемых, то определитель равен сумме двух определителей, у которых все строки, кроме данной, прежние, а в данной строке в первом определителе стоят первые, а во втором — вторые слагаемые (то же верно и для столбцов).

97. Если к элементам одной строки определителя прибавить соответствующие элементы другой строки, умноженные на одно и то же число, то определитель не изменится (то же верно и для столбцов).

98. Говорят, что одна строка определителя является *линейной комбинацией* остальных строк, если каждый элемент этой строки равен сумме произведений соответствующих элементов остальных строк на некоторые числа, постоянные для каждой строки, т. е. не зависящие от номера элемента в строке. Аналогично определяется линейная комбинация столбцов. Например: третья строка определителя

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

будет линейной комбинацией первых двух, если существуют два числа c_1 и c_2 такие, что $a_{3j} = c_1 a_{1j} + c_2 a_{2j}$ $(j = 1, 2, 3)$.

Доказать, что если одна строка (столбец) определителя 3-го порядка является линейной комбинацией остальных строк (столбцов), то определитель равен нулю.

Замечание. Справедливо также обратное утверждение, но оно вытекает из дальнейшего развития теории определителей.

99*. Пользуясь предыдущей задачей, показать на примере, что в отличие от определителей 2-го порядка (см. задачу 38) для равенства нулю определителя 3-го порядка пропорциональность двух строк (или столбцов) уже не является необходимой.

Пользуясь свойствами определителей 3-го порядка, указанными в задачах 91–98, вычислить следующие определители:

100. $\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & 1 & \cos^2\alpha \\ \sin^2\beta & 1 & \cos^2\beta \\ \sin^2\gamma & 1 & \cos^2\gamma \end{vmatrix}$. **101.** $\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos 2\alpha & \cos^2\alpha \\ \sin^2\beta & \cos 2\beta & \cos^2\beta \\ \sin^2\gamma & \cos 2\gamma & \cos^2\gamma \end{vmatrix}$.

102. $\begin{vmatrix} x & x' & ax+bx' \\ y & y' & ay+by' \\ z & z' & az+bz' \end{vmatrix}$. **103.** $\begin{vmatrix} (a_1+b_1)^2 & a_1^2+b_1^2 & a_1b_1 \\ (a_2+b_2)^2 & a_2^2+b_2^2 & a_2b_2 \\ (a_3+b_3)^2 & a_3^2+b_3^2 & a_3b_3 \end{vmatrix}$.

104. $\begin{vmatrix} a+b & c & 1 \\ b+c & a & 1 \\ c+a & b & 1 \end{vmatrix}$. **105.** $\begin{vmatrix} (a^x+a^{-x})^2 & (a^x-a^{-x})^2 & 1 \\ (b^y+b^{-y})^2 & (b^y-b^{-y})^2 & 1 \\ (c^z+c^{-z})^2 & (c^z-c^{-z})^2 & 1 \end{vmatrix}$.

106. $\begin{vmatrix} 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ \varepsilon & \varepsilon^2 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix}$, где ε — отличное от 1 значение $\sqrt[3]{1}$.

107. $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & \sin(\alpha+\delta) \\ \sin\beta & \cos\beta & \sin(\beta+\delta) \\ \sin\gamma & \cos\gamma & \sin(\gamma+\delta) \end{vmatrix}$.

108. $\begin{vmatrix} a_1+b_1 i & a_1 i-b_1 & c_1 \\ a_2+b_2 i & a_2 i-b_2 & c_2 \\ a_3+b_3 i & a_3 i-b_3 & c_3 \end{vmatrix}$, где $i=\sqrt{-1}$.

109. $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ \dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda} & \dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda} & 1 \end{vmatrix}$

(дать геометрическое истолкование полученного результата).

110*. $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & \gamma & \alpha \\ \gamma & \alpha & \beta \end{vmatrix}$, где α, β, γ — корни уравнения $x^3+px+q=0$.

Не развертывая определителей, доказать следующие тождества:

111. $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1x+b_1y+c_1 \\ a_2 & b_2 & a_2x+b_2y+c_2 \\ a_3 & b_3 & a_3x+b_3y+c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$.

112. $\begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1-b_1x & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2-b_2x & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3-b_3x & c_3 \end{vmatrix} = -2x\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$.

113. $\begin{vmatrix} a_1+b_1 i & a_1 i+b_1 & c_1 \\ a_2+b_2 i & a_2 i+b_2 & c_2 \\ a_3+b_3 i & a_3 i+b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$.

114. $\begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1x+b_1 & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2x+b_2 & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3x+b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (1-x^2)\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$.

115. $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$.

116. $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$.

117. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (a+b+c)(b-a)(c-a)(c-d)$.

118. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (ab + ac + bc)(b - a)(c - a)(c - d).$

119. $\begin{vmatrix} 1 & a & a^4 \\ 1 & b & b^4 \\ 1 & c & c^4 \end{vmatrix} = (a^2 + b^2 + c^2 + ab + ac + bc)(b - a)(c - a)(c - b).$

120*. $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}.$

121. $\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} = (a + b + c)\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}.$

122. $\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = (ab + bc + ca)\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}.$

§ 2. Перестановки и подстановки

Определить число инверсий в перестановках (за исходное расположение всегда, если нет особых указаний, принимается расположение $1, 2, 3, \ldots$ в возрастающем порядке):

123. 2, 3, 5, 4, 1.

124. 6, 3, 1, 2, 5, 4.

125. 1, 9, 6, 3, 2, 5, 4, 7, 8.

126. 7, 5, 6, 4, 1, 3, 2.

127. $1, 3, 5, 7, \ldots, 2n - 1, 2, 4, 6, 8, \ldots, 2n.$

128. $2, 4, 6, \ldots, 2n, 1, 3, 5, \ldots, 2n - 1.$

В следующих перестановках определить число инверсий и указать общий признак тех чисел n, для которых эта перестановка четна, и тех, для которых она нечетна:

129. $1, 4, 7, \ldots, 3n - 2, 2, 5, 8, \ldots, 3n - 1, 3, 6, 9, \ldots, 3n.$

130. $3, 6, 9, \ldots, 3n, 2, 5, 8, \ldots, 3n - 1, 1, 4, 7, \ldots, 3n - 2.$

131. $2, 5, 8, \ldots, 3n - 1, 3, 6, 9, \ldots, 3n, 1, 4, 7, \ldots, 3n - 2.$

132. $2, 5, 8, \ldots, 3n - 1, 1, 4, 7, \ldots, 3n - 2, 3, 6, 9, \ldots, 3n.$

133. $1, 5, \ldots, 4n - 3, 2, 6, \ldots, 4n - 2, 3, 7, \ldots, 4n - 1, 4, 8, \ldots, 4n.$

134. $1, 5, \ldots, 4n - 3, 3, 7, \ldots, 4n - 1, 2, 6, \ldots, 4n - 2, 4, 8, \ldots, 4n.$

135. $4n, 4n - 4, \ldots, 8, 4, 4n - 1, 4n - 5, \ldots, 7, 3, 4n - 2, 4n - 6, \ldots, 6, 2, 4n - 3, 4n - 7, \ldots, 5, 1.$

136. В какой перестановке чисел $1, 2, \ldots, n$ число инверсий наибольшее и чему оно равно?

137. Сколько инверсий образует число 1, стоящее на k-м месте перестановки?

138. Сколько инверсий образует число n, стоящее на k-м месте в перестановке чисел $1, 2, 3, \ldots, n$?

139. Чему равна сумма числа инверсий и числа порядков в любой перестановке чисел $1, 2, \ldots, n$?

140. Для каких чисел n четность числа инверсий и числа порядков во всех перестановках чисел $1, 2, \ldots, n$ одинакова и для каких противоположна?

141*. Доказать, что число инверсий в перестановке $a_1, a_2, \ldots, a_n$ равно числу инверсий в той перестановке индексов $1, 2, \ldots, n$, которая получается, если данную перестановку заменить исходным расположением.

142*. Показать, что от одной перестановки $a_1, a_2, \ldots, a_n$ к другой перестановке $b_1, b_2, \ldots, b_n$ тех же элементов можно перейти путем не более чем $n-1$ транспозиций.

143*. Привести пример перестановки чисел $1, 2, 3, \ldots, n$, которую нельзя привести в нормальное расположение путем менее чем $n-1$ транспозиций, и доказать это.

144*. Показать, что от одной перестановки $a_1, a_2, \ldots, a_n$ к любой другой перестановке $b_1, b_2, \ldots, b_n$ тех же элементов можно перейти путем не более чем $\dfrac{n(n-1)}{2}$ смежных транспозиций (т. е. транспозиций соседних элементов).

145*. Дано, что число инверсий в перестановке $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ равно k. Сколько инверсий будет в перестановке $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1$?

146*. Сколько инверсий во всех перестановках n элементов вместе?

147*. Доказать, что от любой перестановки чисел $1, 2, \ldots, n$, содержащей k инверсий, можно перейти к исходному расположению путем k смежных транспозиций, но нельзя перейти путем меньшего числа таких транспозиций.

148*. Доказать, что для любого целого числа k $(0 \leqslant k \leqslant C_n^2)$ существует перестановка чисел $1, 2, 3, \ldots, n$, число инверсий которой равно k.

149*. Обозначим через (n, k) число перестановок чисел $1, 2, \ldots, n$, каждая из которых содержит ровно k инверсий. Вывести для числа (n, k) рекуррентное соотношение:

$$(n+1, k) = (n, k) + (n, k-1) + (n, k-2) + \ldots + (n, k-n),$$

где надо положить $(n, j) = 0$ при $j > C_n^2$ и при $j < 0$. Пользуясь этим соотношением, составить таблицу чисел (n, k) для $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ и $k = 0, 1, 2, \ldots, 15$.

150* Показать, что число перестановок чисел $1, 2, \ldots, n$, содержащих k инверсий, равно числу перестановок тех же чисел, содержащих $C_n^2 - k$ инверсий.

Следующие подстановки разложить в произведение независимых циклов и по декременту (т. е. разности между числом действительно перемещаемых элементов и числом циклов) определить их четность. Для удобства подсчета декремента можно для чисел, остающихся на месте, ввести в разложение одночленные циклы.

151. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

152. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

153. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 1 & 3 & 6 & 5 & 7 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

154. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 8 & 9 & 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}$.

155. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 1 \end{pmatrix}$.

156. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

157. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & 2n-1 & 2n \\ 2 & 1 & 4 & 3 & \ldots & 2n & 2n-1 \end{pmatrix}$.

158. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots & 3n-2 & 3n-1 & 3n \\ 3 & 2 & 1 & 6 & 5 & 4 & \ldots & 3n & 3n-1 & 3n-2 \end{pmatrix}$.

159. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & 2n-3 & 2n-2 & 2n-1 & 2n \\ 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots & 2n-1 & 2n & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

160. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots & 3n-2 & 3n-1 & 3n \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 4 & \ldots & 3n-1 & 3n & 3n-2 \end{pmatrix}$.

161. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots & 3n-2 & 3n-1 & 3n \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \ldots & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

162. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & k & \ldots & nk-k+1 & nk-k+2 & \ldots & nk \\ k+1 & k+2 & \ldots & 2k & \ldots & 1 & 2 & \ldots & k \end{pmatrix}$.

В следующих подстановках перейти от записи в циклах к записи двумя строками:

163. $(1\,5)(2\,3\,4)$.

164. $(1\,3)(2\,5)(4)$.

165. $(7\,5\,3\,1)(2\,4\;6)(8)(9)$.

166. $(1\,2)(3\,4)\ldots(2n-1, 2n)$.

167. $(1, 2, 3, 4, \ldots, 2n-1, 2n)$.

168. $(3\,2\,1)(6\,5\,4)\ldots(3n, 3n-1, 3n-2)$.

Перемножить подстановки:

169. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

170. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

171. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

172. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}^2$. **173.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}^3$.

174. Доказать, что если некоторая степень цикла равна единице, то показатель степени делится на длину цикла. (Длиной цикла называется число его элементов.)

175. Доказать, что среди всех степеней подстановки, равных единице, наименьший показатель равен наименьшему общему кратному длин циклов, входящих в разложение подстановки.

176*. Найти A^{100}, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 7 & 10 & 2 & 6 & 9 & 8 \end{pmatrix}$.

177. Найти A^{150}, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 5 & 4 & 6 & 9 & 7 & 1 & 10 & 8 & 2 \end{pmatrix}$.

178. Найти подстановку X из равенства $AXB = C$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 3 & 2 & 1 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 2 & 7 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 1 & 3 & 6 & 4 & 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

179. Доказать, что умножение подстановки на транспозицию (т. е. двучленный цикл) (α, β) слева равносильно транспозиции (т. е. перемене местами) чисел α и β в верхней строке подстановки, а умножение на ту же транспозицию справа равносильно транспозиции α и β в нижней строке подстановки.

180. Доказать, что если числа α и β входят в один цикл подстановки, то при умножении этой подстановки на транспозицию (α, β) (слева или справа) данный цикл распадается на два цикла, а если числа α и β входят в различные циклы, то при указанном умножении эти циклы сливаются в один.

181*. Пользуясь двумя предыдущими задачами, доказать, что число инверсий и декремент любой подстановки имеют одинаковую четность.

182*. Доказать, что наименьшее число транспозиций, на произведение которых разлагается данная подстановка, равно ее декременту.

183*. Доказать, что наименьшее число транспозиций, переводящих перестановку $a_1, a_2, \ldots, a_n$ в перестановку $b_1, b_2, \ldots, b_n$ тех же элементов, равно декременту подстановки

$$P = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_n \end{pmatrix}.$$

184.* Найти все подстановки чисел 1, 2, 3, 4, перестановочные с подстановкой
$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

185. Найти все подстановки чисел 1, 2, 3, 4, 5, перестановочные с подстановкой
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

186.* Для любых целых чисел x и m, где $m \neq 0$, обозначим через $r(x, m)$ остаток (принимаемый неотрицательным) от деления x на m. Доказать, что если $m \geqslant 2$ и a — целое число, взаимно простое с m, то соответствие $x \to r(ax, m)$, $x = 1, 2, \ldots, m-1$, является подстановкой чисел $1, 2, \ldots, m-1$.

187. Написать подстановку чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, при которой число x переходит в остаток от деления $5x$ на 9.

§ 3. Определение и простейшие свойства определителей любого порядка

Задачи этого параграфа имеют целью пояснение понятия определителя любого порядка и его простейших свойств, включая равенство нулю определителя, строки которого линейно зависимы, и разложение определителя по строке.

Задачи на развитие навыка вычисления определителей с числовыми элементами, на методы вычисления определителей специального вида, на теорему Лапласа, на умножение определителей и т. д. содержатся в следующих параграфах.

Выяснить, какие из приведенных ниже произведений входят в определители соответствующих порядков и с какими знаками:

188. $a_{43}a_{21}a_{35}a_{12}a_{54}$.

189. $a_{61}a_{23}a_{45}a_{36}a_{12}a_{54}$.

190. $a_{27}a_{36}a_{51}a_{74}a_{25}a_{43}a_{62}$.

191. $a_{33}a_{16}a_{72}a_{27}a_{55}a_{61}a_{44}$.

192. $a_{12}a_{23}a_{34}\ldots a_{n-1,n}a_{kk}$, $1 \leqslant k \leqslant n$.

193. $a_{12}a_{23}\ldots a_{n-1,n}a_{n1}$.

194. $a_{12}a_{21}a_{34}a_{43}\ldots a_{2n-1,2n}a_{2n,\,2n-1}$.

195. $a_{11}a_{2,n}a_{3,n-1}\ldots a_{2n,\,2}$.

196. $a_{13}a_{22}a_{31}a_{46}a_{55}a_{64}\ldots a_{3n-2,\,3n}a_{3n-1,3n-1}a_{3n,\,3n-2}$.

197. Выбрать значения i и k так, чтобы произведение
$$a_{62}a_{i5}a_{33}a_{k4}a_{46}a_{21}$$
входило в определитель 6-го порядка со знаком минус.

198. Выбрать значения i и k так, чтобы произведение

$$a_{47}a_{63}a_{1i}a_{55}a_{7k}a_{24}a_{31}$$

входило в определитель 7-го порядка со знаком плюс.

199. Найти члены определителя 4-го порядка, содержащие элемент a_{32} и входящие в определитель со знаком плюс.

200. Найти члены определителя

$$\begin{vmatrix} 5x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ x & 1 & 2 & 2x \end{vmatrix},$$

содержащие x^4 и x^3.

201. С каким знаком входит в определитель порядка n произведение элементов главной диагонали?

202. С каким знаком входит в определитель порядка n произведение элементов побочной диагонали?

203. Пользуясь только определением, вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

в котором все элементы по одну сторону от главной диагонали равны нулю.

204. Пользуясь только определением, вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & a_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & a_{2,\,n-1} & a_{2n} \\ 0 & \dots & a_{3,\,n-2} & a_{3,\,n-1} & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,\,n-2} & a_{n,\,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix},$$

в котором все элементы по одну сторону от побочной диагонали равны нулю.

205. Пользуясь только определением, вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

206. Доказать, что если в определителе порядка n на пересечении некоторых k строк и l столбцов стоят элементы, равные нулю, причем $k+l>n$, то определитель равен нулю.

207*. Решить уравнение

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \ldots & x^n \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \ldots & a_2^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \ldots & a_n^n \end{vmatrix} = 0,$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — различные числа.

208. Решить уравнение

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & n-x \end{vmatrix} = 0.$$

209. Найти элемент определителя порядка n, симметричный элементу a_{ik} относительно побочной диагонали.

210. Найти элемент определителя порядка n, симметричный элементу a_{ik} относительно «центра» определителя.

211. Назовем место элемента a_{ik} определителя четным или нечетным, смотря по тому, будет ли сумма $i+k$ четна или нечетна. Найти число элементов определителя порядка n, стоящих на четных и на нечетных местах.

212. Как изменится определитель порядка n, если первый столбец переставить на последнее место, а остальные столбцы передвинуть влево, сохраняя их расположение?

213. Как изменится определитель порядка n, если его строки написать в обратном порядке?

214. Как изменится определитель, если каждый его элемент заменить элементом, симметричным с данным относительно «центра» определителя.

215*. Как изменится определитель, если каждый его элемент заменить элементом, симметричным с данным относительно побочной диагонали.

216*. Определитель называется *кососимметрическим*, если элементы, симметрично лежащие относительно главной диагонали, отличаются знаком, т. е. $a_{ik} = -a_{ki}$ для любых индексов i, k.

Доказать, что кососимметрический определитель нечетного порядка n равен нулю.

217*. Доказать, что определитель, элементы которого, симметрично лежащие относительно главной диагонали, являются сопряженными комплексными (в частности, действительными) числами, есть число действительное.

218. При каких значениях n все определители порядка n, элементы которых удовлетворяют условиям

$$(\alpha)\ a_{jk} \text{ — действительное число при } j > k,$$

$$(\beta)\ a_{kj} = i a_{jk} \text{ при } j \geqslant k\ (i = \sqrt{-1}),$$

будут действительными?

219. При каких n все определители порядка n, элементы которых удовлетворяют условиям (α) и (β) предыдущей задачи, будут чисто мнимыми?

220. Показать, что при нечетном n все определители порядка n, элементы которых удовлетворяют условиям (α) и (β) задачи 218, имеют вид $a(1 \pm i)$, где a — действительное число.

221. Как изменится определитель порядка n, если у всех его элементов изменить знак на противоположный?

222*. Как изменится определитель, если каждый его элемент a_{ik} умножить на c^{i-k}, где $c \neq 0$?

223*. Доказать, что в каждый член определителя входит четное число элементов, занимающих нечетное место; элементов же, занимающих четное место, входит четное число, если определитель четного порядка, и нечетное число, если определитель нечетного порядка.

224*. Доказать, что определитель не изменится, если изменить знак всех элементов на нечетных местах; если же изменить знак всех элементов на четных местах, то определитель не изменится, если он четного порядка, и изменит знак, если нечетного порядка.

225. Доказать, что определитель не изменится, если к каждой строке, кроме последней, прибавить последующую строку.

226. Доказать, что определитель не изменится, если к каждому столбцу, начиная со второго, прибавить предыдущий столбец.

227. Доказать, что определитель не изменится, если из каждой строки, кроме последней, вычесть все последующие строки.

228. Доказать, что определитель не изменится, если к каждому столбцу, начиная со второго, прибавить все предыдущие столбцы.

229. Как изменится определитель, если из каждой строки, кроме последней, вычесть последующую строку, из последней строки вычесть прежнюю первую строку?

230*. Как изменится определитель, если к каждому столбцу, начиная со второго, прибавить предыдущий столбец и в то же время к первому прибавить последний?

231. Как изменится определитель порядка n, если его матрицу повернуть на 90° вокруг «центра»?

232. Чему равен определитель, у которого сумма строк с четными номерами равна сумме строк с нечетными номерами?

233. Найти сумму всех определителей порядка $n \geqslant 2$, в каждом из которых в каждой строке и каждом столбце один элемент равен единице, а остальные равны нулю. Сколько всех таких определителей?

234. Найти сумму определителей порядка $n \geqslant 2$:

$$\sum_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n=1}^{n} \begin{vmatrix} a_{1\alpha_1} & a_{1\alpha_2} & \ldots & a_{1\alpha_n} \\ a_{2\alpha_1} & a_{2\alpha_2} & \ldots & a_{2\alpha_n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{n\alpha_1} & a_{n\alpha_2} & \ldots & a_{n\alpha_n} \end{vmatrix},$$

где сумма берется по всем значениям $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, независимо друг от друга изменяющимся от 1 до n.

235. Пусть все элементы определителя

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

являются целыми однозначными числами. Обозначим через N_l число, записанное цифрами i-й строки определителя с сохранением их расположения (a_{in} — число единиц, $a_{i,n-1}$ — число десятков и т. д.). Доказать, что значение определителя делится на наибольший общий делитель чисел $N_1, N_2, \ldots, N_n$.

236. Разлагая по 3-й строке, вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ a & b & c & d \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}.$$

237. Разлагая по 2-му столбцу, вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 5 & a & 2 & -1 \\ 4 & b & 4 & -3 \\ 2 & c & 3 & -2 \\ 4 & d & 5 & -4 \end{vmatrix}.$$

Вычислить определители:

238. $\begin{vmatrix} a & 3 & 0 & 5 \\ 0 & b & 0 & 2 \\ 1 & 2 & c & 3 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$. **239.** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & a \\ 2 & 0 & b & 0 \\ 3 & c & 4 & 5 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$. **240.** $\begin{vmatrix} x & a & b & 0 & c \\ 0 & y & 0 & 0 & d \\ 0 & e & z & 0 & f \\ g & h & k & u & l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v \end{vmatrix}$.

241. Пусть M_{ij} — минор элемента a_{ij} определителя D. Показать, что если D — симметрический определитель или кососимметрический определитель нечетного порядка, то $M_{ij} = M_{ji}$; если же D — кососимметрический определитель четного порядка, то $M_{ij} = -M_{ji}$.

242. Пусть D — определитель порядка $n > 1$, D' и D'' — определители, полученные из D заменой каждого элемента a_{ij} на его алгебраическое дополнение A_{ij} для D' и на его минор M_{ij} для D''. Доказать, что $D' = D''$. Определитель D' называется взаимным (или присоединенным) к D. О выражении D' через D см. задачу 506.

243. Вычислить следующий определитель, не развертывая его:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & 1 \\ b & c & a & 1 \\ c & a & b & 1 \\ \dfrac{b+c}{2} & \dfrac{c+a}{2} & \dfrac{a+b}{2} & 1 \end{vmatrix}.$$

Не развертывая определителей, доказать следующие тождества:

244*.
$$\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & z^2 & y^2 \\ 1 & z^2 & 0 & x^2 \\ 1 & y^2 & x^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

245*.
$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^{n-2} & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \ldots & a_2^{n-2} & a_2^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \ldots & a_n^{n-2} & a_n^n \end{vmatrix} =$$
$$= (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^{n-2} & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \ldots & a_2^{n-2} & a_2^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \ldots & a_n^{n-2} & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

246*.
$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^{i-1} & a_i^{1+1} & \ldots & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \ldots & a_2^{i-1} & a_2^{i+1} & \ldots & a_2^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \ldots & a_n^{i-1} & a_n^{i+1} & \ldots & a_n^n \end{vmatrix} =$$
$$= \left(\sum_{k_1, k_2, \ldots, k_{n-i}} a_{k_1} a_{k_2} \ldots a_{k_{n-1}} \right) \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \ldots & a_2^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \ldots & a_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

где сумма берется по всем сочетаниям из n чисел $1, 2, 3, \ldots, n$ по $n - i$.

Пользуясь свойствами определителей, включая разложение по строке или столбцу, доказать тождества:

247*. $$\begin{vmatrix} \cos\frac{\alpha-\beta}{2} & \sin\frac{\alpha+\beta}{2} & \cos\frac{\alpha+\beta}{2} \\ \cos\frac{\beta-\gamma}{2} & \sin\frac{\beta+\gamma}{2} & \cos\frac{\beta+\gamma}{2} \\ \cos\frac{\gamma-\alpha}{2} & \sin\frac{\gamma+\alpha}{2} & \cos\frac{\gamma+\alpha}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}[\sin(\beta-\alpha)+\sin(\gamma-\beta)+\sin(\alpha-\gamma)].$$

248. $$\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \sin\alpha\cos\alpha & \cos^2\alpha \\ \sin^2\beta & \sin\beta\cos\beta & \cos^2\beta \\ \sin^2\gamma & \sin\gamma\cos\gamma & \cos^2\gamma \end{vmatrix} = \sin(\alpha-\beta)\cos\alpha\cos\beta+\sin(\beta-\gamma)\cos\beta\cos\gamma+\sin(\gamma-\alpha)\cos\gamma\cos\alpha.$$

249. $$\begin{vmatrix} (a+b)^2 & c^2 & c^2 \\ a^2 & (b+c)^2 & a^2 \\ b^2 & b^2 & (c+a)^2 \end{vmatrix} = 2abc(a+b+c)^3.$$

250. $$\begin{vmatrix} \frac{1}{a+x} & \frac{1}{a+y} & 1 \\ \frac{1}{b+x} & \frac{1}{b+y} & 1 \\ \frac{1}{c+x} & \frac{1}{c+y} & 1 \end{vmatrix} = \frac{(a-b)(a-c)(b-c)(x-y)}{(a+x)(b+x)(c+x)(a+y)(b+y)(c+y)}.$$

251. $$\begin{vmatrix} \frac{1}{a+x} & \frac{1}{a+y} & \frac{1}{a+z} \\ \frac{1}{b+x} & \frac{1}{b+y} & \frac{1}{b+z} \\ \frac{1}{c+x} & \frac{1}{c+y} & \frac{1}{c+z} \end{vmatrix} = \frac{(a-b)(a-c)(b-c)(x-y)(x-z)(y-z)}{(a+x)(b+x)(c+x)(a+y)(b+y)(c+y)(a+z)(b+z)(c+z)}.$$

252. $$\begin{vmatrix} a^2+(1-a^2)\cos\varphi & ab(1-\cos\varphi) & ac(1-\cos\varphi) \\ ba(1-\cos\varphi) & b^2+(1-b^2)\cos\varphi & bc(1-\cos\varphi) \\ ca(1-\cos\varphi) & cb(1-\cos\varphi) & c^2+(1-c^2)\cos\varphi \end{vmatrix} = \cos^2\varphi$$
при $a^2+b^2+c^2=1$.

253*. $$\begin{vmatrix} \cos\varphi\cos\psi-\sin\varphi\sin\psi\cos\theta & -\sin\varphi\cos\psi-\cos\varphi\sin\psi\cos\theta & \sin\psi\sin\theta \\ \cos\varphi\sin\psi+\sin\varphi\cos\psi\cos\theta & -\sin\varphi\sin\psi+\cos\varphi\cos\psi\cos\theta & -\cos\psi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & \cos\varphi\sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = 1.$$

254. $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ c- & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{vmatrix} = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2.$

255. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & 1 & b \\ 1 & 1 & 0 & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc - 2ac + 2d.$

256*. $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & -1 & 1 & 1 & y \\ 1 & 1 & -1 & 1 & z \\ 1 & 1 & 1 & -1 & u \\ x & y & z & u & 0 \end{vmatrix} =$

$$= -4[x^2 + y^2 + z^2 + u^2 - 2(xy + xz + xu + yz + yu + zu)].$$

§ 4. Вычисление определителей с числовыми элементами

Вычислить определители:

257. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$. **258.** $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$. **259.** $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

260. $\begin{vmatrix} -3 & 9 & 3 & 6 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}$. **261.** $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ -3 & 2 & 4 & -6 \\ 2 & -5 & -7 & 5 \\ -4 & 3 & 5 & -6 \end{vmatrix}$.

262. $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 & 3 \\ 3 & -4 & 7 & 5 \\ 4 & -9 & 8 & 5 \\ -3 & 2 & -5 & 3 \end{vmatrix}$. **263.** $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & 6 \\ 5 & 5 & 8 & 7 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$.

264. $\begin{vmatrix} 3 & -5 & -2 & 2 \\ -4 & 7 & 4 & 4 \\ 4 & -9 & -3 & 7 \\ 2 & -6 & -3 & 2 \end{vmatrix}$. **265.** $\begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & -4 \\ -3 & 4 & -5 & 3 \\ -5 & 7 & -7 & 5 \\ 8 & -8 & 5 & -6 \end{vmatrix}$. **266.** $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 9 & -8 & 5 & 10 \\ 5 & -8 & 5 & 8 \\ 6 & -5 & 4 & 7 \end{vmatrix}$.

267. $\begin{vmatrix} 7 & 6 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 5 & 4 \end{vmatrix}$. **268.** $\begin{vmatrix} 6 & -5 & 8 & 4 \\ 9 & 7 & 5 & 2 \\ 7 & 5 & 3 & 7 \\ -4 & 8 & -8 & -3 \end{vmatrix}$. **269.** $\begin{vmatrix} 7 & 3 & 2 & 6 \\ 8 & -9 & 4 & 9 \\ 7 & -2 & 7 & 3 \\ 5 & -3 & 3 & 4 \end{vmatrix}$.

270. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 10 & 13 \\ 3 & 5 & 11 & 16 & 21 \\ 2 & -7 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 10 \end{vmatrix}$. **271.** $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 5 & 6 & 4 \\ 5 & 9 & 7 & 8 & 6 \\ 6 & 12 & 13 & 9 & 7 \\ 4 & 6 & 6 & 5 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}$. **272.** $\begin{vmatrix} 35 & 59 & 71 & 52 \\ 42 & 70 & 77 & 54 \\ 43 & 68 & 72 & 52 \\ 29 & 49 & 65 & 50 \end{vmatrix}$.

273. $\begin{vmatrix} 27 & 44 & 40 & 55 \\ 20 & 64 & 21 & 40 \\ 13 & -20 & -13 & 24 \\ 46 & 45 & -55 & 84 \end{vmatrix}$. **274.** $\begin{vmatrix} 24 & 11 & 13 & 17 & 19 \\ 51 & 13 & 32 & 40 & 46 \\ 61 & 11 & 14 & 50 & 56 \\ 62 & 20 & 7 & 13 & 52 \\ 80 & 24 & 45 & 57 & 70 \end{vmatrix}$.

275. $\begin{vmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{9}{2} & -\frac{3}{2} & -3 \\ \frac{5}{3} & -\frac{8}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{7}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{5}{3} & -1 & -\frac{2}{3} \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}$. **276*.** $\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{5}{2} & \frac{2}{5} & \frac{3}{2} \\ 3 & -12 & \frac{21}{5} & 15 \\ \frac{2}{3} & -\frac{9}{2} & \frac{4}{5} & \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{vmatrix}$.

277. $\begin{vmatrix} \frac{3}{4} & 2 & -\frac{1}{2} & -5 \\ 1 & -2 & \frac{3}{2} & 8 \\ \frac{5}{6} & -\frac{4}{3} & \frac{4}{3} & \frac{14}{3} \\ \frac{2}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{1}{2} & \frac{12}{5} \end{vmatrix}$. **278.** $\begin{vmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & \sqrt{5} & \sqrt{3} \\ \sqrt{6} & \sqrt{21} & \sqrt{10} & -2\sqrt{3} \\ \sqrt{10} & 2\sqrt{15} & 5 & \sqrt{6} \\ 2 & 2\sqrt{6} & \sqrt{10} & \sqrt{15} \end{vmatrix}$.

§ 5. Методы вычисления определителей n-го порядка

Введение. Метод вычисления определителей с числовыми элементами, состоящий в обращении в нуль всех элементов некоторой строки (столбца), кроме одного, и последующем понижении порядка, становится весьма громоздким в случае определителей данного порядка с буквенными элементами. Этот путь в общем случае приводит к выражению, которое получается вычислением определителя прямым применением его определения. Тем более этот метод неудобен в случае определителя с буквенными или числовыми элементами и произвольным порядком n.

Общего метода для вычисления таких определителей не существует (если не считать выражения определителя, данного в его определении).

К определителям того или иного специального вида применяются различные методы вычисления, приводящие к выражениям, более простым (т. е. содержащим меньшее число действий), чем выражение определителя по определению. Мы разберем некоторые, наиболее употребительные из этих методов, затем дадим задачи на каждый из этих методов для их усвоения и задачи, где учащийся сам должен выбрать метод решения. Для удобства ориентации в материале задачи, связанные с теоремой Лапласа и умножением определителей, выделены в отдельные параграфы.

1. Метод приведения к треугольному виду. Этот метод заключается в преобразовании определителя к такому виду, где все элементы, лежащие по одну сторону одной из диагоналей, равны нулю. Случай побочной диагонали путем изменения порядка строк (или столбцов) на обратный сводится на случай главной диагонали. Полученный определитель равен произведению элементов главной диагонали.

Пример 1. Вычислить определитель порядка n:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

Вычитаем первую строку из всех остальных:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}.$$

Пример 2. Вычислить определитель

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & x & x & \dots & x \\ x & a_2 & x & \dots & x \\ x & x & a_3 & \dots & x \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ x & x & x & \dots & a_n \end{vmatrix}.$$

Вычитаем первую строку из всех остальных:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & x & x & \dots & x \\ x-a_1 & a_2-x & 0 & \dots & 0 \\ x-a_1 & 0 & a_3-x & \dots & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ x-a_1 & 0 & 0 & \dots & a_n-x \end{vmatrix}.$$

Из первого столбца выносим a_1-x, из второго $a_2-x, \ldots$, из n-го a_n-x:

$$D=(a_1-x)(a_2-x)\ldots(a_n-x)\begin{vmatrix} \dfrac{a_1}{a_1-x} & \dfrac{x}{a_2-x} & \dfrac{x}{a_3-x} & \ldots & \dfrac{x}{a_n-x} \\ -1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -1 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix}.$$

Положим $\dfrac{a}{a_1-x}=1+\dfrac{x}{a_1-x}$ и все столбцы прибавим к первому:

$$\begin{aligned} D &= (a_1-x)(a_2-x)\ldots(a_n-x)\times \\ &\times\begin{vmatrix} 1+\dfrac{x}{a_1-x}+\ \ldots\ +\dfrac{x}{a_n-x} & \dfrac{x}{a_2-x} & \dfrac{x}{a_3-x} & \ldots & \dfrac{x}{a_n-x} \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix} = \\ &= x(a_1-x)(a_2-x)\ldots(a_n-x)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{a_1-x}+\frac{1}{a_2-x}+\cdots+\frac{1}{a_n-x}\right). \end{aligned}$$

2. Метод выделения линейных множителей. Определитель рассматривается как многочлен от одной или нескольких входящих в него букв. Преобразуя его, обнаруживают, что он делится на ряд линейных множителей, а значит (если эти множители взаимно просты), и на их произведение.

Сравнивая отдельные члены определителя с членами произведения линейных множителей, находят частное от деления определителя на это произведение и тем самым находят выражение определителя.

Пример 3. Вычислить определитель

$$D=\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix}.$$

Если к первому столбцу прибавить остальные, то обнаружится, что определитель делится на $x+y+z$; если к первому столбцу прибавить второй и вычесть третий и четвертый, то выделится множитель $y+z-x$; если к первому столбцу прибавить третий и вычесть второй и четвертый, то выделится множитель $x-y+z$; наконец, если к первому столбцу прибавить четвертый и вычесть второй и третий, то выделится множитель $x+y-z$. Считая x, y, z независимыми неизвестными, заключаем, что все эти четыре множителя попарно взаимно просты, и значит, определитель делится на их произведение $(x+y+z)(y+z-x)(x-y+z)(x+y-z)$.

Это произведение содержит член z^4 с коэффициентом -1, а сам определитель содержит тот же член z^4 с коэффициентом $+1$. Значит,

$$\begin{aligned} D &= -(x+y+z)(y+z-x)(x+z-y)(x+y-z) = \\ &= x^4+y^4+z^4-2x^2y^2-2x^2z^2-2y^2z^3. \end{aligned}$$

Пример 4. Вычислить методом выделения линейных множителей определитель Вандермонда n-го порядка:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Рассматривая D_n как многочлен от одного неизвестного x_n с коэффициентами, зависящими от $x_1, \dots, x_{n-1}$, видим, что он обращается в нуль при $x_n = x_1$, $x_n = x_2, \dots, x_n = x_{n-1}$ и потому делится на $x_n - x_1$, $x_n - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}$.

Все эти множители взаимно просты (так как $x_1, x_2, \dots, x_n$ алгебраически независимы).

Значит, D_n делится на их произведение, т. е.

$$D_n = q(x_1, x_2, \dots, x_n)(x_n - x_1)(x_n - x_2)\dots(x_n - x_{n-1}).$$

Разлагая D_n по последней строке, видим, что он является многочленом степени $n-1$ относительно x_n, причем коэффициент при x_n^{n-1} равен определителю Вандермонда D_{n-1} из неизвестных $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$; так как произведение скобок в правой части последнего равенства содержит x_n^{n-1} с коэффициентом 1, то многочлен $q(x_1, x_2, \dots, x_n)$ не содержит x_n, и, сравнивая коэффициенты при x_n^{n-1} в обеих частях равенства, получим $D_{n-1} = q(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$, откуда $D_n = D_{n-1}(x_n - x_1)(x_n - x_2)(x_n - x_{n-1})$. Применяя это равенство с заменой n на $n-1$, имеем

$$D_{n-1} = D_{n-2}(x_{n-1} - x_1)\dots(x_{n-1} - x_{n-2}).$$

Это выражение для D_{n-1} подставим в предыдущее выражение для D_n. Повторяя это рассуждение, мы выделим, наконец, множитель $x_2 - x_1$, после чего придем к определителю Вандермонда первого порядка $D_1 = 1$.

Таким образом,

$$\begin{aligned} D_n &= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)\dots(x_n - x_1)(x_n - x_2)\dots(x_n - x_{n-1}) = \\ &= \prod_{i>j}(x_i - x_j). \end{aligned}$$

3. Метод рекуррентных (рекурсивных, или возвратных) соотношений. Этот метод заключается в том, что данный определитель выражают, преобразуя и разлагая его по строке или столбцу, через определители того же вида, но более низкого порядка. Полученное равенство называется рекуррентным соотношением.

Затем вычисляют непосредственно по общему виду определителя столько определителей низших порядков, сколько их было в правой части рекуррентного соотношения. Определители более высокого порядка вычисляются последовательно из рекуррентного соотношения. Если надо получить выражение для определителя любого порядка n, то, вычислив из рекуррентного соотношения несколько определителей низших порядков, стараются заметить общий вид искомого выражения, а затем доказывают справедливость этого выражения при любом n с помощью рекуррентного соотношения и метода индукции по n.

Общее выражение можно получить и другим путем. Для этого в рекуррентное соотношение, выражающее определитель n-го порядка, подставляют выражение определителя $(n-1)$-го порядка из того же рекуррентного соотношения с заменой n на $n-1$, далее подставляют аналогичное выражение определителя $(n-2)$-го порядка и т. д., пока не выяснится вид искомого общего выражения определителя n-го порядка. Можно также комбинировать оба пути, используя второй путь для обнаружения искомого выражения и доказывая затем справедливость этого выражения индукцией по n. Метод рекуррентных соотношений является наиболее сильным среди разбираемых здесь методов и применим к более сложным определителям.

Прежде чем перейти к примерам вычисления определителей методом рекуррентных соотношений, разберем один его частный случай, где рекуррентное соотношение дает алгоритм для решения задачи, исключающий элемент догадки, имеющийся в общем случае. Пусть рекуррентное соотношение имеет вид

$$D_n = pD_{n-1} + qD_{n-2}, \quad n > 2, \tag{1}$$

где p, q — постоянные, т. е. не зависящие от n величины[1].

При $q = 0$ D_n вычисляется как член геометрической прогрессии: $D_n = p^{n-1}D_1$; здесь D_1 — определитель 1-го порядка данного вида, т. е. элемент определителя D_n, стоящий в левом верхнем углу.

Пусть $q \neq 0$ и α, β — корни квадратного уравнения $x^2 - px - q = 0$. Тогда $p = \alpha + \beta$, $q = -\alpha\beta$, и равенство (1) можно переписать так:

$$D_n - \beta D_{n-1} = \alpha(D_{n-1} - \beta D_{n-2}), \tag{2}$$

или

$$D_n - \alpha D_{n-1} = \beta(D_{n-1} - \alpha D_{n-2}), \tag{3}$$

Предположим сначала, что $\alpha \neq \beta$.

[1] Этот метод сообщен автору Л. Я. Окуневым. Он применим также к рекуррентному соотношению $D_n = p_1 D_{n-1} + \dots + p_k D_{n-k}$ с постоянными $p_1, \dots, p_k$ и любым k, но ввиду громоздкости рассуждений мы остановимся лишь на $k = 2$.

По формуле для $(n-1)$-го члена геометрической прогрессии из равенств (2) и (3) находим

$$D_n - \beta D_{n-1} = \alpha^{n-2}(D_2 - \beta D_1) \quad \text{и} \quad D_n - \alpha D_{n-1} = \beta^{n-2}(D_2 - \alpha D_1),$$

откуда $D_n = \dfrac{\alpha^{n-1}(D_2 - \beta D_1) - \beta^{n-1}(D_2 - \alpha D_1)}{\alpha - \beta}$, или

$$D^n = C_1\alpha_n + C_2\beta^n, \quad \text{где} \quad C_1 = \frac{D_2 - \beta D_1}{\alpha(\alpha - \beta)}, \quad C_2 = -\frac{D_2 - \alpha D_1}{\beta(\alpha - \beta)}. \qquad (4)$$

Последнее выражение для D_n легко запоминается. Оно выводилось для $n > 2$, но непосредственно проверяется для $n = 1$ и $n = 2$. Значение C_1 и C_2 можно находить не из приведенных выражений (4), а из начальных условий $D_1 = C_1\alpha + C_2\beta$, $D_2 = C_1\alpha^2 + C_2\beta^2$.

Пусть теперь $\alpha = \beta$. Равенства (2) и (3) обращаются в одно и то же

$$D_n - \alpha D_{n-1} = \alpha(D_{n-1} - \alpha D_{n-2}),$$

откуда

$$D_n - \alpha D_{n-1} = A\alpha^{n-2}, \qquad (5)$$

где

$$A = D_2 - \alpha D_1.$$

Заменяя здесь n на $n-1$, получим $D_{n-1} - \alpha D_{n-2} = A\alpha^{n-3}$, откуда $D_{n-1} = \alpha D_{n-2} + A\alpha^{n-3}$. Вставляя это выражение в равенство (5), найдем $D_n = \alpha^2 D_{n-2} + 2A\alpha^{n-2}$. Повторяя тот же прием несколько раз, получим $D_n = \alpha^{n-1}D_1 + (n-1)A\alpha^{n-2}$ или $D_n = \alpha^n[(n-1)C_1 + C_2]$, где $C_1 = \dfrac{A}{\alpha^2}$, $C_2 = \dfrac{D_1}{\alpha}$ (здесь $\alpha \neq 0$, так как $q \neq 0$).

Пример 5. Вычислить методом рекуррентных соотношений определитель примера 2.

Представив элемент в правом нижнем углу в виде $a_n = x + (a_n - x)$, мы можем определитель D_n разбить на сумму двух определителей:

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & x & \dots & x & x \\ x & a_2 & \dots & x & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & \dots & a_{n-1} & x \\ x & x & \dots & x & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & x & \dots & x & 0 \\ x & a_2 & \dots & x & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & \dots & a_{n-1} & 0 \\ x & x & \dots & x & a_n - x \end{vmatrix}.$$

В первом определителе последний столбец вычтем из остальных, а второй определитель разложим по последнему столбцу:

$$D_n = x(a_1 - x)(a_2 - x)\dots(a_{n-1} - x) + (a_n - x)D_{n-1}.$$

Это и есть рекуррентное соотношение. Вставляя в него аналогичное выражение для D_{n-1}, найдем

$$\begin{aligned} D_n &= x(a_1 - x)(a_2 - x)\dots(a_{n-1} - x) + \\ &\quad + x(a_1 - x)(a_2 - x)\dots(a_{n-2} - x)(a_n - x) + D_{n-2}(a_{n-1} - x)(a_n - x). \end{aligned}$$

Повторяя то же рассуждение $n-1$ раз и замечая, что $D_1 = a_1 = x + (a_1 - x)$, получим

$$\begin{aligned} D_n &= x(a_1-x)(a_2-x)\dots(a_{n-1}-x) + x(a_1-x)\dots(a_{n-2}-x)(a_n-x)+\dots \\ &\quad \dots + x(a_2-x)\dots(a_n-x) + (a_1-x)(a_2-x)\dots(a_n-x) = \\ &= x(a_1-x)(a_2-x)\dots(a_n-x)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{a_1-x}+\dots+\frac{1}{a_n-x}\right), \end{aligned}$$

что совпадает с результатом примера 2.

Пример 6. Вычислить определитель порядка n:

$$D_n = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

Разлагая по первой строке, найдем рекуррентное соотношение

$$D_n = 5D_{n-1} - 6D_{n-2}.$$

Уравнение $x^2 - 5x + 6 = 0$ имеет корни $\alpha = 2$, $\beta = 3$.

По формуле (4)

$$D_n = C_1\alpha^n + C_2\beta^n = 3^{n+1} - 2^{n+1}.$$

4. Метод представления определителя в виде суммы определителей. Некоторые определители легко вычисляются путем разложения их в сумму определителей того же порядка относительно строк (или столбцов).

Пример 7. Вычислить определитель

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 & \dots & a_1+b_n \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 & \dots & a_2+b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n+b_1 & a_n+b_2 & \dots & a_n+b_n \end{vmatrix}.$$

Этот определитель относительно первой строки разлагается на два определителя, каждый из них относительно второй строки снова разлагается на два определителя и т. д. Дойдя до последней строки, получим 2^n определителей.

Если при каждом разложении за первые слагаемые принимать числа a_i, а за вторые числа b_j, то строки полученных определителей будут либо вида $a_i, a_i, \dots, a_i$, либо вида $b_1, b_2 \dots, b_n$. Две строки первого типа пропорциональны, а второго типа равны. При $n > 2$ в каждый получившийся определитель попадают по крайней мере две строки одного типа, и он обратится в нуль. Так $D_n = 0$ при $n > 2$.

Далее,

$$D_1 = a_1 + b_1, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_1 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ a_2 & a_2 \end{vmatrix} = (a_1 - a_2)(b_2 - b_1).$$

5. Метод изменения элементов определителя. Этот метод применяется в тех случаях, когда путем изменения всех элементов определителя на одно и то же число он приводится к такому виду, в котором легко сосчитать алгебраические дополнения всех элементов. Метод основан на следующем свойстве: если ко всем элементам определителя D прибавить одно и то же число x, то определитель увеличится на произведение числа x на сумму алгебраических дополнений всех элементов определителя D. В самом деле, пусть

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \hdotsfor{3} \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad D' = \begin{vmatrix} a_{11} + x & \dots & a_{1n} + x \\ \hdotsfor{3} \\ a_{n1} + x & \dots & a_{nn} + x \end{vmatrix}.$$

Разложим D' на два определителя относительно первой строки, каждый из них на два определителя относительно второй строки и т. д.

Слагаемые, содержащие более одной строки элементов, равных x, равны нулю.

Слагаемые, содержащие одну строку элементов, равных x, разложим по этой строке. Тогда получим $D' = D + x \sum\limits_{i,j=1} A_{ij}$, что и требовалось.

Таким образом, вычисление определителя D' сводится к вычислению определителя D и суммы его алгебраических дополнений.

Пример 8. Вычислить определитель D_n примера 2.

Вычитая из всех его элементов число x, получим определитель

$$D = \begin{vmatrix} a_1 - x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 - x & \dots & 0 \\ \hdotsfor{4} \\ 0 & 0 & \dots & a_n - x \end{vmatrix}.$$

Алгебраические дополнения элементов D, не лежащих на главной диагонали, равны нулю, а каждого элемента на главной диагонали — произведению остальных элементов главной диагонали. Поэтому

$$\begin{aligned} D_n &= (a_1 - x) \dots (a_n - x) + x \sum_{i=1}^{n} (a_1 - x) \dots (a_{i-1} - x)(a_{i+1} - x) \dots (a_n - x) = \\ &= x(a_1 - x)(a_2 - x) \dots (a_n - x) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{a_1 - x} + \dots + \frac{1}{a_n - x} \right). \end{aligned}$$

Вычислить следующие определители приведением к треугольному виду[1]:

279. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}$.

280. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n & n \\ 3 & 4 & 5 & \dots & n & n & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n & n & \dots & n & n \end{vmatrix}$.

281. $\begin{vmatrix} x_1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ x_1 & x_2 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \end{vmatrix}$.

282. $\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & \dots & a_1 & a_1-b_1 & a_1 \\ a_2 & \dots & a_2-b_2 & a_2 & a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n-b_n & \dots & a_n & a_n & a_n \end{vmatrix}$.

283. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 3 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 3 \end{vmatrix}$.

284. $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ -x & x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -x & x & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x \end{vmatrix}$.

285*. $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ -x_1 & x_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -x_2 & x_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x_n \end{vmatrix}$.

286. Вычислить определитель порядка n, элементы которого заданы условиями $a_{ij} = \min(i, j)$.

287. Вычислить определитель порядка n, элементы которого заданы условиями $a_{ij} = \max(i, j)$.

288*. Вычислить определитель порядка n, элементы которого заданы условиями $a_{ij} = |i - j|$.

Вычислить следующие определители методом выделения линейных множителей:

289. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & x+1 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & x+1 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & x+1 \end{vmatrix}$.

290. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2-x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 3-x & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n+1-x \end{vmatrix}$.

[1] Всюду, где по виду определителя нельзя узнать его порядок, предполагается, что порядок равен n.

291. $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_0 & x & a_2 & \dots & a_n \\ a_0 & a_1 & x & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & x \end{vmatrix}$.

292. $\begin{vmatrix} -x & a & b & c \\ a & -x & c & b \\ b & c & -x & a \\ c & b & a & -x \end{vmatrix}$.

293. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix}$.

294*. $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-z \end{vmatrix}$.

Вычислить следующие определители методом рекуррентных соотношений:

295*. $\begin{vmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \dots & a_1b_n \\ a_1b_2 & a_2b_2 & a_2b_3 & \dots & a_2b_n \\ a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 & \dots & a_3b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1b_n & a_2b_n & a_3b_n & \dots & a_nb_n \end{vmatrix}$.

296*. $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ -y_1 & x_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -y_2 & x_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x_n \end{vmatrix}$.

297. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}$.

298. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & a_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a_n \end{vmatrix}$.

299. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{vmatrix}$.

300. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 3 \end{vmatrix}$.

301. $\begin{vmatrix} 7 & 5 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 7 & 5 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 7 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 7 \end{vmatrix}$.

302. $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

303. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 5 \end{vmatrix}$.

304. $\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha+\beta \end{vmatrix}$.

Вычислить определители методом представления их в виде суммы определителей:

305.* $\begin{vmatrix} x+a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & x+a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & x+a_3 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & x+a_n \end{vmatrix}$. **306**.* $\begin{vmatrix} x_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & x_2 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & \dots & x_n \end{vmatrix}$.

307.* $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ x_1 & a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x_2 & x_2 & a_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x_3 & x_3 & x_3 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n & x_n & x_n & x_n & \dots & x_n & x_n \end{vmatrix}$. **308.** $\begin{vmatrix} x_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \dots & a_1n_n \\ a_2b_1 & x_2 & a_2b_3 & \dots & a_2b_n \\ a_3b_1 & a_3b_2 & x_3 & \dots & a_3b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & a_nb_3 & \dots & x_n \end{vmatrix}$.

Вычислить определители[1]:

309. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 3 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 2 & 5 & \dots & n-1 & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 2n-3 & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & 2n-1 \end{vmatrix}$.

310. $\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & a_1+b_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & a_1 & a_2+b_2 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_n+b_n \end{vmatrix}$. **311.** $\begin{vmatrix} 2 & 2 & \dots & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & \dots & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & \dots & 3 & 2 & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & n-1 & \dots & 2 & 2 & 2 \\ n & 2 & \dots & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$.

312. $\begin{vmatrix} 1 & n & n & \dots & n \\ n & 2 & n & \dots & n \\ n & n & 3 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n & n & \dots & n \end{vmatrix}$. **313.** $\begin{vmatrix} x & y & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & y & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & x & y \\ y & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix}$.

314. $\begin{vmatrix} 1-n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-n & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1-n & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1-n \end{vmatrix}$. **315.** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & -n \\ 1 & 1 & \dots & -n & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & -n & \dots & 1 & 1 \\ -n & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

[1] Всюду, где неясно, чему равен порядок определителя, он предполагается равным n.

316. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix}$. **317.** $\begin{vmatrix} n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & n & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & n & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n \end{vmatrix}$. **318.** $\begin{vmatrix} a & b & \dots & b & b \\ b & a & \dots & b & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & \dots & a & b \\ b & b & \dots & a & b \end{vmatrix}$.

319. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 3 \end{vmatrix}$. **320.** $\begin{vmatrix} 1 & b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1-b_1 & b_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-b_2 & b_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1-b_n \end{vmatrix}$.

321. $\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & x & a_2 & \dots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & a_2 & x & \dots & a_{n-1} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & x & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n & 1 \end{vmatrix}$. **322.** $\begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_1 & x & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & x & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & x & -1 \\ a_n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix}$.

323. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & x \end{vmatrix}$. **324.** $\begin{vmatrix} n & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ n-1 & x & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ n-2 & 0 & x & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 0 & 0 & 0 & \dots & x & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix}$.

325. $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & \dots & x^n \\ a_{11} & 1 & x & x^2 & \dots & x^{n-1} \\ a_{21} & a_{22} & 1 & x & \dots & x^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \dots & 1 \end{vmatrix}$.

326. $\begin{vmatrix} 1 & C_n^1 & C_n^2 & \dots & C_n^{n-1} & C_n^n \\ 1 & C_{n-1}^1 & C_{n-1}^2 & \dots & C_{n-1}^{n-1} & 0 \\ 1 & C_{n-2}^1 & C_{n-2}^2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & C_2^1 & C_2^2 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & C_1^1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \end{vmatrix}$. **327.** $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x & \dots & x & x \\ 1 & x & 0 & \dots & x & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x & x & \dots & 0 & x \\ 1 & x & x & \dots & x & 0 \end{vmatrix}$.

328. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \dots & 2^n \\ 1 & 3 & 3^2 & \dots & 3^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & n+1 & (n+1)^2 & \dots & (n+1)^n \end{vmatrix}$.

329. $$\begin{vmatrix} a^n & (a-1)^n & \dots & (a-n)^n \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \dots & (a-n)^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a-1 & \dots & a-n \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

330. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1+1 & x_2+1 & \dots & x_n+1 \\ x_1^2+x_1 & x_2^2+x_2 & \dots & x_n^2+x_n \\ x_1^3+x_1^2 & x_2^3+x_2^2 & \dots & x_n^3+x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1}+x_1^{n-2} & x_2^{n-1}+x_2^{n-2} & \dots & x_n^{n-1}+x_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

331. $$\begin{vmatrix} (x+a_1)^n & (x+a_1)^{n-1} & \dots & x+a_1 & 1 \\ (x+a_2)^n & (x+a_2)^{n-1} & \dots & x+a_2 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (x+a_{n+1})^n & (x+a_{n+1})^{n-1} & \dots & x+a_{n+1} & 1 \end{vmatrix}.$$

332. $$\begin{vmatrix} 1 & \sin\varphi_1 & \sin^2\varphi_1 & \dots & \sin^{n-1}\varphi_1 \\ 1 & \sin\varphi_2 & \sin^2\varphi_2 & \dots & \sin^{n-1}\varphi_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \sin\varphi_n & \sin^2\varphi_n & \dots & \sin^{n-1}\varphi_n \end{vmatrix}.$$

333. $$\begin{vmatrix} 1 & \cos\varphi_1 & \cos^2\varphi_1 & \dots & \cos^{n-1}\varphi_1 \\ 1 & \cos\varphi_2 & \cos^2\varphi_2 & \dots & \cos^{n-1}\varphi_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \cos\varphi_n & \cos^2\varphi_n & \dots & \cos^{n-1}\varphi_n \end{vmatrix}.$$

334. $$\begin{vmatrix} 1 & \varphi_1(x_1) & \varphi_2(x_1) & \dots & \varphi_{n-1}(x_1) \\ 1 & \varphi_1(x_2) & \varphi_2(x_2) & \dots & \varphi_{n-1}(x_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \varphi_1(x_n) & \varphi_2(x_n) & \dots & \varphi_{n-1}(x_n) \end{vmatrix},$$

где $\varphi_k(x) = x^k + a_{k1}x^{k-1} + a_{k2}x^{k-2} + \dots + a_{kk}$.

335. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ f_1(\cos\varphi_1) & f_1(\cos\varphi_2) & \dots & f_1(\cos\varphi_n) \\ f_2(\cos\varphi_1) & f_2(\cos\varphi_2) & \dots & f_2(\cos\varphi_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n-1}(\cos\varphi_1) & f_{n-1}(\cos\varphi_2) & \dots & f_{n-1}(\cos\varphi_n) \end{vmatrix},$$

где $f_k(x) = a_{k0}x^k + a_{k1}x^{k-1} + a_{k2}x^{k-2} + \dots + a_{kk}$.

336. $$\begin{vmatrix} 1 & C_{x_1}^1 & C_{x_1}^2 & \dots & C_{x_1}^{n-1} \\ 1 & C_{x_2}^1 & C_{x_2}^2 & \dots & C_{x_2}^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & C_{x_n}^1 & C_{x_n}^2 & \dots & C_{x_n}^{n-1} \end{vmatrix},$$

где $C_x^k = \dfrac{x(x-1)(x-2)\dots(x-k+1)}{k!}$.

337. $\begin{vmatrix} (2n-1)^n & (2n-2)^n & \dots & n^n & (2n)^n \\ (2n-1)^{n-1} & (2n-2)^{n-1} & \dots & n^{n-1} & (2n)^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2n-1 & 2n-2 & \dots & n & 2n \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}.$

338. $\begin{vmatrix} \dfrac{x_1}{x_1-1} & \dfrac{x_2}{x_2-1} & \dots & \dfrac{x_n}{x_n-1} \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$ **339.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2^3 & 3^3 & \dots & n^3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2^{2n-1} & 3^{2n-1} & \dots & n^{2n-1} \end{vmatrix}.$

340. $\begin{vmatrix} a_1^n & a_1^{n-1}b_1 & a^{n-2}b_1^2 & \dots & b_1^n \\ a_2^n & a_2^{n-1}b_2 & a_2^{n-2}b_2^2 & \dots & b_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n+1}^n & a_{n+1}^{n-1}b_{n+1} & a_{n+1}^{n-2}b_{n+1}^2 & \dots & b_{n+1}^n \end{vmatrix}.$

341. $\begin{vmatrix} \sin^{n-1}\alpha_1 & \sin^{n-2}\alpha_1\cos\alpha_1 & \dots & \cos^{n-1}\alpha_1 \\ \sin^{n-1}\alpha_2 & \sin^{n-2}\alpha_2\cos\alpha_2 & \dots & \cos^{n-1}\alpha_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sin^{n-1}\alpha_n & \sin^{n-2}\alpha_n\cos\alpha_n & \dots & \cos^{n-1}\alpha_n \end{vmatrix}.$

342. $\begin{vmatrix} f_n(x_1,y_1) & y_1f_{n-1}(x_1,y_1) & \dots & y_1^{n-1}f_1(x_1,y_1) & y_1^n \\ f_n(x_2,y_2) & y_2f_{n-1}(x_2,y_2) & \dots & y_1^{n-2}f_1(x_2,y_2) & y_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_n(x_{n+1},y_{n+1}) & y_{n+1}f_{n-1}(x_{n+1},y_{n+1}) & \dots & y_{n+1}^{n-1}f_1(x_{n+1},y_{n+1}) & y_{n+1}^n \end{vmatrix},$

где $f_i(x,y)$ — однородный многочлен x, y степени i.

343*. $\begin{vmatrix} a_1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ a_2 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$ **344*.** $\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-2} & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-2} & x_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-2} & x_n^n \end{vmatrix}.$

345. $\begin{vmatrix} 1 & x_1^2 & x_1^3 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2^2 & x_2^3 & \dots & x_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n^2 & x_n^3 & \dots & x_n^n \end{vmatrix}.$ **346.** $\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{s-1} & x_1^{s+1} & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{s-1} & x_2^{s+1} & \dots & x_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{s-1} & x_n^{s+1} & \dots & x_n^n \end{vmatrix}.$

347*. $\begin{vmatrix} 1 & x_1(x_1-1) & x_1^2(x_1-1) & \dots & x_1^{n-1}(x_1-1) \\ 1 & x_2(x_2-1) & x_2^2(x_2-1) & \dots & x_2^{n-1}(x_2-1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n(x_n-1) & x_n^2(x_n-1) & \dots & x_n^{n-1}(x_n-1) \end{vmatrix}.$

348*. $\begin{vmatrix} 1+x_1 & 1+x_1^2 & \dots & 1+x_1^n \\ 1+x_2 & 1+x_2^2 & \dots & 1+x_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1+x_n & 1+x_n^2 & \dots & 1+x_n^n \end{vmatrix}.$

349*. $\begin{vmatrix} 1 & \cos\varphi_1 & \cos 2\varphi_1 & \dots & \cos(n-1)\varphi_1 \\ 1 & \cos\varphi_2 & \cos 2\varphi_2 & \dots & \cos(n-1)\varphi_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \cos\varphi_n & \cos 2\varphi_n & \dots & \cos(n-1)\varphi_n \end{vmatrix}.$

350*. $\begin{vmatrix} \sin\varphi_1 & \sin 2\varphi_1 & \dots & \sin n\varphi_1 \\ \sin\varphi_2 & \sin 2\varphi_2 & \dots & \sin n\varphi_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sin\varphi_n & \sin 2\varphi_n & \dots & \sin n\varphi_n \end{vmatrix}.$ **351*.** $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}.$

352. $\begin{vmatrix} a & b & c & d & e & f & g & h \\ b & a & d & c & f & e & h & g \\ c & d & a & b & g & h & e & f \\ d & c & b & a & h & g & f & e \\ e & f & g & h & a & b & c & d \\ f & e & h & g & b & a & d & c \\ g & h & e & f & c & d & a & b \\ h & g & f & e & d & c & b & a \end{vmatrix}.$ **353*.** $\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & x & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & x & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & x \end{vmatrix}.$

354. $\begin{vmatrix} a_1-b_1 & a_1-b_2 & \dots & a_1-b_n \\ a_2-b_1 & a_2-b_2 & \dots & a_2-b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n-b_1 & a_n-b_2 & \dots & a_n-b_n \end{vmatrix}.$

355. $\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \dots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \dots & 1+x_2y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \dots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}.$

356. $\begin{vmatrix} f_1(a_1) & f_1(a_2) & \dots & f_1(a_n) \\ f_2(a_1) & f_2(a_2) & \dots & f_2(a_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_n(a_1) & f_n(a_2) & \dots & f_n(a_n) \end{vmatrix},$

где $f_i(x)$ — многочлен степени не выше $n-2$.

357. $\begin{vmatrix} 1+a_1+b_1 & a_1+b_2 & \dots & a_1+b_n \\ a_2+b_1 & 1+a_2+b_2 & \dots & a_2+b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n+b_1 & a_n+b_2 & \dots & 1+a_n+b_n \end{vmatrix}.$

358* $\begin{vmatrix} x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \dots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & x_2y_2 & \dots & 1+x_2y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \dots & x_ny_n \end{vmatrix}$.

359* $\begin{vmatrix} a_1-b_1+x & a_1-b_2 & \dots & a_1-b_n \\ a_2-b_1 & a_2-b_2+x & \dots & a_2-b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n-b_1 & a_n-b_2 & \dots & a_n-b_n+x \end{vmatrix}$.

360. $\begin{vmatrix} x_1+a_1b_1 & a_1b_2 & \dots & a_1b_n \\ a_2b_1 & x_2+a_2b_2 & \dots & a_2b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \dots & x_n+a_nb_n \end{vmatrix}$. **361*** $\begin{vmatrix} a & 0 & \dots & 0 & b \\ 0 & a & \dots & b & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & b & \dots & a & 0 \\ b & 0 & \dots & 0 & a \end{vmatrix}$.

362. $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & \dots & b_2 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & b_{2n-1} & \dots & a_{2n-1} & 0 \\ b_{2n} & 0 & \dots & 0 & a_{2n} \end{vmatrix}$ (порядок определителя $2n$).

363. $\begin{vmatrix} \frac{2}{x} & \frac{1}{x^2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \frac{2}{x} & \frac{1}{x^2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{x} & \frac{1}{x^2} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \frac{2}{x} \end{vmatrix}$. **364*** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

365* *Рядом Фибоначчи*[1] называется числовой ряд, который начинается числами 1, 2 и в котором каждое следующее число равно сумме двух предыдущих, т. е. ряд 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,..

Доказать, что n-й член ряда Фибоначчи равен определителю n-го порядка:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

[1] Fibonacci — итальянский математик XIII в.

Вычислить определители:

366. $\begin{vmatrix} 9 & 5 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 4 & 9 & 5 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 9 & 5 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 4 & 9 \end{vmatrix}.$ **367.** $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{vmatrix}.$

368. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & 0 \end{vmatrix}.$ **369*.** $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & a & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & a \end{vmatrix}.$

370. $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -1 & a & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & a \end{vmatrix}.$

371*. Доказать равенство

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\alpha & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix} = \cos n\alpha.$$

Пользуясь этим равенством и результатом задачи 369, получить выражение $\cos n\alpha$ через $\cos\alpha$.

372. Доказать равенство

$$\frac{\sin n\alpha}{\sin\alpha} = \begin{vmatrix} 2\cos\alpha & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\alpha & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix},$$

где определитель имеет порядок $n-1$. Пользуясь этим равенством и результатом задачи 369, представить $\sin n\alpha$ в виде произведения $\sin\alpha$ на многочлен от $\cos\alpha$.

373*. Доказать равенство, не вычисляя самих определителей:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ c_1 & a_2 & b_2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & a_3 & b_3 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & c_{n-1} & a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1c_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & a_2 & b_2c_2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_3 & b_3c_3 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & a_n \end{vmatrix}.$$

Вычислить определители:

374. $$\begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x & 1+x^2 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & 1+x^2 & x & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & x & 1+x^2 \end{vmatrix}.$$

375. $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \dots & 1 & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & 1 & 2 & \dots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}.$$

376*. $$\begin{vmatrix} a & a+x & a+2x & \dots & a+(n-2)x & a+(n-1)x \\ a+(n-1)x & a & a+x & \dots & a+(n-3)x & a+(n-2)x \\ a+(n-2)x & a+(n-1)x & a & \dots & a+(n-4)x & a+(n-3)x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a+x & a+2x & a+3x & \dots & a+(n-1)x & a \end{vmatrix}.$$

377. $$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^{n-2} & x^{n-1} \\ x^{n-1} & 1 & x & \dots & x^{n-3} & x^{n-2} \\ x^{n-2} & x^{n-1} & 1 & \dots & x^{n-4} & x^{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x^2 & x^3 & \dots & x^{n-1} & 1 \end{vmatrix}.$$

378. Не вычисляя определителей, установить, как связаны между собой два циркулянта:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \dots & a_{n-3} & a_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_n & a_1 \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_n & a_1 \\ a_3 & a_4 & a_5 & \dots & a_1 & a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \end{vmatrix},$$

построенные из одних и тех же чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ применением круговых перестановок в двух противоположных направлениях.

Вычислить определители:

379*. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \binom{2}{1} & \binom{3}{1} & \dots & \binom{n}{1} \\ 1 & \binom{3}{2} & \binom{4}{2} & \dots & \binom{n+1}{2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \binom{n}{n-1} & \binom{n+1}{n-1} & \dots & \binom{2n-2}{n-1} \end{vmatrix}, \quad \text{где } \binom{n}{k} = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

380*. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \binom{m}{1} & \binom{m+1}{1} & \binom{m+2}{1} & \dots & \binom{m+n}{1} \\ \binom{m+1}{2} & \binom{m+2}{2} & \binom{m+3}{2} & \dots & \binom{m+n+1}{2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \binom{m+n-1}{n} & \binom{m+n}{n} & \binom{m+n+1}{n} & \dots & \binom{m+2n-1}{n} \end{vmatrix}.$$

381*. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \binom{n}{3} & \dots & \binom{n}{n-1} \end{vmatrix}.$$

382*. $$\begin{vmatrix} 1 & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \dots & \binom{n}{n} \\ 1 & \binom{n+1}{1} & \binom{n+1}{2} & \dots & \binom{n+1}{n} \\ 1 & \binom{n+2}{1} & \binom{n+2}{2} & \dots & \binom{n+2}{n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \binom{2n}{1} & \binom{2n}{2} & \dots & \binom{2n}{n} \end{vmatrix}.$$

383*. $$\begin{vmatrix} \binom{p+n}{n} & \binom{p+n+1}{n} & \dots & \binom{p+2n}{n} \\ \binom{p+n+1}{n} & \binom{p+n+2}{n} & \dots & \binom{p+2n+1}{n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \binom{p+2n}{a} & \binom{p+2n+1}{n} & \dots & \binom{p+3n}{n} \end{vmatrix}.$$

384*. $$\begin{vmatrix} 1 & \binom{p}{1} & \binom{p}{2} & \dots & \binom{p}{n} \\ 1 & \binom{p+1}{1} & \binom{p+1}{2} & \dots & \binom{p+1}{n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \binom{p+n}{1} & \binom{p+n}{2} & \dots & \binom{p+n}{n} \end{vmatrix}.$$

385*. $$\begin{vmatrix} \binom{m}{p} & \binom{m}{p+1} & \dots & \binom{m}{p+n} \\ \binom{m+1}{p} & \binom{m+1}{p+1} & \dots & \binom{m+1}{p+n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \binom{m+n}{p} & \binom{m+n}{p+1} & \dots & \binom{m+n}{p+n} \end{vmatrix}.$$

386*. $$\begin{vmatrix} 1 & \binom{2}{2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \binom{n}{2} & \binom{n}{3} & \binom{n}{4} & \dots & \binom{n}{n} \\ 1 & \binom{n+1}{2} & \binom{n+1}{3} & \binom{n+1}{4} & \dots & \binom{n+1}{n} \end{vmatrix}.$$

387*. $$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 3 & 6 & 10 & \dots & \frac{n(n+1)}{2!} \\ 4 & 10 & 20 & \dots & \frac{n(n+1)(n+2)}{3!} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & \frac{n(n+1)}{2!} & \frac{n(n+1)(n+2)}{3!} & \dots & \frac{n(n+1)\dots(2n-2)}{(n-1)!} \end{vmatrix}.$$

388*. $$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \binom{1}{1} & 0 & 0 & \dots & 0 & x \\ 1 & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & 0 & \dots & 0 & x^2 \\ 1 & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & \dots & 0 & x^3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \binom{n}{3} & \dots & \binom{n}{n-1} & x^n \end{vmatrix}.$$

389*. $$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 1! & 0 & 0 & 0 & \dots & x \\ 1 & 2 & 2! & 0 & 0 & \dots & x^2 \\ 1 & 3 & 3\cdot 2 & 3! & 0 & \dots & x^3 \\ 1 & 4 & 4\cdot 3 & 4\cdot 3\cdot 2 & 4! & \dots & x^4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & n & n(n-1) & n(n-1)(n-2) & n(n-1)(n-2)(n-3) & \dots & x^n \end{vmatrix}.$$

390*. $$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x_0 \\ 1 & \binom{1}{1} & 0 & 0 & \dots & 0 & x_1 \\ 1 & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & 0 & \dots & 0 & x_2 \\ 1 & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & \dots & 0 & x_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \binom{n}{3} & \dots & \binom{n}{n-1} & x_n \end{vmatrix}.$$

391*. $$\begin{vmatrix} 0 & x & x & \dots & x \\ y & 0 & x & \dots & x \\ y & y & 0 & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y & y & y & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

392. $$\begin{vmatrix} a & x & x & \dots & x \\ y & a & x & \dots & x \\ y & y & a & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y & y & y & \dots & a \end{vmatrix}.$$

393. $$\begin{vmatrix} a_1 & x & x & \dots & x \\ y & a_2 & x & \dots & x \\ y & y & a_3 & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y & y & y & \dots & a_n \end{vmatrix}.$$

394. $$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a_1 & x & x & \dots & x \\ 1 & y & a_2 & x & \dots & x \\ 1 & y & y & a_3 & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & y & y & y & \dots & a_n \end{vmatrix}.$$

395. $$\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2 & \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha+\beta & \alpha\beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}.$$

396. $$\begin{vmatrix} a+1 & a & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & a+1 & a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+1 & a & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a+1 \end{vmatrix}.$$

397. $$\begin{vmatrix} n!a_0 & (n-1)!a_1 & (n-2)!a_2 & \dots & a_n \\ -n & x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -(n-1) & x & \dots & 0 \\ \hdotsfor{5} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x \end{vmatrix}.$$

398. $$\begin{vmatrix} \operatorname{cosec}\alpha & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2\operatorname{cosec}\alpha & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2\operatorname{cosec}\alpha & 1 & \dots & 0 \\ \hdotsfor{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2\operatorname{cosec}\alpha \end{vmatrix}.$$

399*. $$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ n-1 & x & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & n-2 & x & 3 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n-3 & x & \dots & 0 & 0 \\ \hdotsfor{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & x \end{vmatrix}.$$

400. $$\begin{vmatrix} a^p - x & a^{p+1} - x & \dots & a^{p+n-1} - x \\ a^{p+n} - x & a^{p+n+1} - x & \dots & a^{p+2n-1} - x \\ \hdotsfor{4} \\ a^{p+n(n-1)} - x & a^{p+n(n-1)+1} - x & \dots & a^{p+n^2-1} - x \end{vmatrix}.$$

401. $$\begin{vmatrix} 1-x & a & a^2 & \dots & a^{n-1} \\ a & a^2-x & a^3 & \dots & a^n \\ a^2 & a^3 & a^4-x & \dots & a^{n+1} \\ \hdotsfor{5} \\ a^{n-1} & a^n & a^{n+1} & \dots & a^{2n-2}-x \end{vmatrix}.$$

402. $$\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & 0 & \dots & 0 \\ \hdotsfor{6} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}.$$ **403.** $$\begin{vmatrix} c_0 & b & b & b & \dots & b \\ a & c_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a & 0 & c_2 & 0 & \dots & 0 \\ \hdotsfor{6} \\ a & 0 & 0 & 0 & \dots & c_n \end{vmatrix}.$$

404*. $$\begin{vmatrix} 1 & -b & -b & -b & \dots & -b \\ 1 & na & -2b & -3b & \dots & -(n-1)b \\ 1 & (n-1)a & a & -3b & \dots & -(n-1)b \\ \hdotsfor{6} \\ 1 & 2a & a & a & \dots & a \end{vmatrix}.$$

405*. $$\begin{vmatrix} (x_1-a_1)^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ a_1^2 & (x_2-a_2)^2 & \dots & a_n^2 \\ \hdotsfor{4} \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & (x_n-a_n)^2 \end{vmatrix}.$$

406. $$\begin{vmatrix} (x_1-a_1)^2 & a_1a_2 & a_1a_3 & \dots & a_1a_n \\ a_2a_1 & (x_2-a_2)^2 & a_2a_3 & \dots & a_2a_n \\ a_3a_1 & a_3a_2 & (x_3-a_3)^2 & \dots & a_3a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_na_1 & a_na_2 & a_na_3 & \dots & (x_n-a_n)^2 \end{vmatrix}.$$

407*. $$\begin{vmatrix} 1-b_1 & b_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 1-b_2 & b_3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1-b_3 & b_4 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1-b_n \end{vmatrix}.$$

408. $$\begin{vmatrix} 0 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ b_1 & 0 & a_3 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & 0 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_1 & b_2 & b_3 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

409*. $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 1 & 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 \\ 1 & x & 1 & 2 & \dots & n-2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x & x & x & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

410*. $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ x & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ x & x & 1 & \dots & n-2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & x & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

411*. $$\begin{vmatrix} a_0x^n & a_1x^{n-1} & a_2x^{n-2} & \dots & a_{n-1}x & a_n \\ a_0x & b_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_0x^2 & a_1x & b_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_0x^{n-1} & a_1x^{n-2} & a_2x^{n-3} & \dots & b_{n-1} & 0 \\ a_0x^n & a_1x^{n-1} & a_2x^{n-2} & \dots & a_{n-1}x & b_n \end{vmatrix}.$$

412. $$\begin{vmatrix} x+1 & x & x & \dots & x \\ x & x+2 & x & \dots & x \\ x & x & x+3 & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & x & \dots & x+n \end{vmatrix}.$$

413. $$\begin{vmatrix} x+1 & x & x & \dots & x \\ x & x+2 & x & \dots & x \\ x & x & x+4 & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & x & \dots & x+2^n \end{vmatrix}.$$

414. $$\begin{vmatrix} x+1 & x & x & \dots & x \\ x & x+\frac{1}{2} & x & \dots & x \\ x & x & x+\frac{1}{3} & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & x & \dots & x+\frac{1}{n} \end{vmatrix}.$$

415. $$\begin{vmatrix} x+1 & x & x & \dots & x \\ x & x+a & x & \dots & x \\ x & x & x+a^2 & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & x & \dots & x+a^n \end{vmatrix}.$$

416*. $\begin{vmatrix} (a_1+b_1)^{-1} & (a_1+b_2)^{-1} & \dots & (a_1+b_n)^{-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a_n+b_1)^{-1} & (a_n+b_2)^{-1} & \dots & (a_n+b_n)^{-1} \end{vmatrix}.$

417*. $\begin{vmatrix} \dfrac{1}{x_1-a_1} & \dfrac{1}{x_1-a_2} & \dots & \dfrac{1}{x_1-a_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{1}{x_n-a_1} & \dfrac{1}{x_n-a_2} & \dots & \dfrac{1}{x_n-a_n} \end{vmatrix}.$

418*. $\begin{vmatrix} 1 & \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{3} & \dots & \dfrac{1}{n} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{4} & \dots & \dfrac{1}{n+1} \\ \dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{4} & \dfrac{1}{5} & \dots & \dfrac{1}{n+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{1}{n} & \dfrac{1}{n+1} & \dfrac{1}{n+2} & \dots & \dfrac{1}{2n-1} \end{vmatrix}.$

419*. $\begin{vmatrix} a_0+a_1 & a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_1 & a_1+a_2 & a_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & a_2+a_3 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & a_{n-1}+a_n \end{vmatrix}.$

420*. Получить закон составления развернутого выражения для континуанты n-го порядка[1]:

$$(a_1a_2\dots a_n) = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & a_2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a_3 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & a_n \end{vmatrix},$$

т. е. выражения в виде многочлена от $a_1, a_2, \dots, a_n$. Написать в развернутом виде континуанты 4-го, 5-го и 6-го порядков.

[1] Название «континуанта» объясняется связью с непрерывными дробями, которая устанавливается в задаче 539.

§ 6. Миноры, алгебраические дополнения и теорема Лапласа

421. Сколько миноров k-го порядка содержит определитель порядка n?

422. Доказать, что при определении знака алгебраического дополнения можно пользоваться суммой номеров строк и столбцов не данного минора, а дополнительного к нему. Иными словами, если M — данный минор, M' — дополнительный минор, A — алгебраическое дополнение минора M, A' — алгебраическое дополнение минора M', то из $A = \varepsilon M'$, где $\varepsilon = \pm 1$, следует $A' = \varepsilon M$.

423. Показать, что разложение Лапласа определителя порядка n по любым k строкам (столбцам) совпадает с его разложением по остальным $n - k$ строкам (столбцам).

424*. Показать, что правило знаков, связывающее алгебраическое дополнение A с дополнительным минором M' минора M, можно формулировать так: пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ — номера строк, $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ — номера столбцов минора M в определителе D порядка n, записанные в порядке возрастания, а

$$\alpha_{k+1}, \alpha_{k+2}, \ldots, \alpha_n \quad \text{и} \quad \beta_{k+1}, \beta_{k+2}, \ldots, \beta_n$$

— соответственно номера строк и столбцов дополнительного минора M', также записанные в порядке возрастания; тогда $A = M'$, если подстановка

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \\ \beta_1 \beta_2 \ldots \beta_n \end{pmatrix}$$

четна, и $A = -M'$, если эта подстановка нечетна.

Пользуясь теоремой Лапласа, вычислить определители:

425. $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$. **426.** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 7 & 5 \end{vmatrix}$. **427.** $\begin{vmatrix} 0 & 5 & 2 & 0 \\ 8 & 3 & 5 & 4 \\ 7 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

428. $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 7 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 6 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{vmatrix}$. **429.** $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 0 & 7 & 0 \end{vmatrix}$. **430.** $\begin{vmatrix} 7 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 7 \\ 6 & 3 & 2 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

431. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$. **432.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 6 & 7 & 3 \\ 2 & 7 & 5 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$. **433.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 3 \\ 6 & 5 & 7 & 8 & 4 & 2 \\ 9 & 8 & 6 & 7 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

434. $\begin{vmatrix} 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 9 & 7 & 8 & 9 & 4 & 3 \\ 7 & 4 & 9 & 7 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 8 & 0 & 0 \end{vmatrix}$. **435.** $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 9 & 4 & 0 & 0 & 3 & 7 \\ 4 & 5 & 1 & -1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 3 & 7 & 6 & 9 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

436. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 2 & 7 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 9 & 0 \\ 8 & 1 & 5 & 3 & 7 & 6 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 27 & 0 \\ 9 & 1 & 5 & 4 & 3 & 10 \end{vmatrix}$. **437.** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ y_1 & y_2 & \cos\beta & \sin\beta \\ z_1 & z_2 & \cos\gamma & \sin\gamma \end{vmatrix}$.

438. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & a' & b' & c' \\ a & a' & x_1 & y_3 & y_2 \\ b & b' & y_3 & x_2 & y_1 \\ c & c' & y_2 & y_1 & x_3 \end{vmatrix}$.

439. $\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ 1 & x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & y & 0 \\ 1 & 0 & 0 & z \end{vmatrix}$. **440.** $\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a' & 1 & 0 & 0 \\ b' & 0 & 1 & 0 \\ c' & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$. **441.** $\begin{vmatrix} 1 & x & x & x \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & 0 & c \end{vmatrix}$.

442. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 0 & x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \end{vmatrix}$.

443. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\ldots a_{1,2n-2} & a_{1,2n-1} & a_{1,2n} \\ 0 & a_{22} & a_{23}\ldots a_{2,2n-2} & a_{2,2n-1} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}\ldots a_{3,2n-2} & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & a_{2n-2,3}\ldots a_{2n-2,2n-2} & 0 & 0 \\ 0 & a_{2n-1,2} & a_{2n-1,3}\ldots a_{2n-1,2n-2} & a_{2n-1,2n-1} & 0 \\ a_{2n,1} & a_{2n,2} & a_{2n,3}\ldots a_{2n,2n-2} & a_{2n,2n-1} & a_{2n,2n} \end{vmatrix}$.

444. $\begin{vmatrix} a_{11} & 1 & a_{12} & 1 & \ldots & a_{1n} & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ a_{21} & x_1 & a_{22} & x_2 & \ldots & a_{2n} & x_n \\ x_1 & 0 & x_2 & 0 & \ldots & x_n & 0 \\ a_{31} & x_1^2 & a_{32} & x_2^2 & \ldots & a_{3n} & x_n^2 \\ x_1^2 & 0 & x_2^2 & 0 & \ldots & x_n^2 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & x_1^{n-1} & a_{n2} & x_2^{n-1} & \ldots & a_{nn} & x_n^{n-1} \\ x_1^{n-1} & 0 & x_2^{n-1} & 0 & \ldots & x_n^{n-1} & 0 \end{vmatrix}$.

Пользуясь теоремой Лапласа, вычислить следующие определители, предварительно преобразовав их:

445*. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & -5 \\ 4 & -2 & 7 & 8 & -7 \\ -6 & 4 & -9 & -2 & 3 \\ 3 & -2 & 4 & 1 & -2 \\ -2 & 6 & 5 & 4 & -3 \end{vmatrix}$. **446.** $\begin{vmatrix} 5 & -5 & -3 & 4 & 2 \\ -4 & 4 & 3 & 6 & 3 \\ 3 & -1 & 5 & -9 & -5 \\ -7 & 7 & 6 & 8 & 4 \\ 5 & -3 & 2 & -1 & -2 \end{vmatrix}$.

447. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 7 & 5 & -1 \\ 3 & -1 & -5 & -3 & -2 \\ 5 & -6 & 4 & 2 & -4 \\ 2 & -3 & 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$. **448.** $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & -4 & -3 \\ -2 & 3 & -4 & 2 & -3 \\ 6 & 4 & 7 & -8 & -1 \\ 2 & -1 & 7 & 1 & 5 \end{vmatrix}$.

449. $\begin{vmatrix} 5 & 9 & -2 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 4 & -3 & 3 \\ -5 & -7 & 2 & 4 & -2 \\ 4 & -5 & 8 & -6 & 8 \\ 6 & -5 & 3 & -3 & 7 \end{vmatrix}$. **450.** $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -3 & -1 & 2 \\ -5 & 6 & 5 & 2 & 3 \\ 4 & -9 & -3 & 7 & -5 \\ -1 & -4 & 1 & 1 & -2 \\ -3 & 7 & 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

451. $\begin{vmatrix} 1+x & x & \ldots & x & x & \ldots & x & 1+x \\ x & 1+x & \ldots & x & x & \ldots & 1+x & x \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x & x & \ldots & 1+x & 1+x & \ldots & x & x \\ x & x & \ldots & 1+2x & 1+x & \ldots & x & x \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x & 1+2x & \ldots & x & x & \ldots & 1+x & x \\ 1+2x & x & \ldots & x & x & \ldots & x & 1+x \end{vmatrix}$

(порядок определителя равен $2n$).

452. $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\dots a_{1,n-1} & a_{1n} & 0 & 0 & \dots & 0 & b_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\dots a_{2,n-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & b_{2,n-1} & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & 0\dots 0 & 0 & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{n,n-1} & b_{nn} \\ c_{11} & c_{12}\dots c_{1,n-1} & c_{1n} & 0 & 0 & \dots & 0 & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{21} & c_{22}\dots c_{2,n-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & b_{2,n-1} & b_{2n} \\ c_{n1} & 0\dots 0 & 0 & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{n,n-1} & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

453. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & x & a_1 & a_2-1 & \dots & a_{n-1}-1 & a_n-1 \\ 1 & 1 & \dots & x & 1 & a_1-1 & a_2 & \dots & a_{n-1}-1 & a_n-1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & 1 & \dots & 1 & 1 & a_1-1 & a_2-1 & \dots & a_{n-1}-1 & a_n \\ a_1-x & a_1 & \dots & a_1 & a_1 & -a_1 & -a_1 & \dots & -a_1 & x-a_1 \\ a_2 & a_2-x & \dots & a_2 & a_2 & -a_2 & -a_2 & \dots & x-a_2 & -a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & a_n & \dots & a_n & a_n-x & x-a_n & -a_n & \dots & -a_n & -a_n \end{vmatrix}.$$

454. В определителе D четного порядка $n = 2k$ выделим четыре минора M_1, M_2, M_3, M_4 порядка k, как показано на схеме:

$$\begin{array}{c|c|c|} & M_1 & M_2 \\ & \begin{array}{ccc} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{array} & \begin{array}{ccc} a_{1,k+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k,k+1} & \dots & a_{k,n} \end{array} \\ \cline{2-3} & \begin{array}{ccc} a_{k+1,1} & \dots & a_{k+1,k} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} \end{array} & \begin{array}{ccc} a_{k+1,k+1} & \dots & a_{k+1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n,k+1} & \dots & a_{nn} \end{array} \\ & M_3 & M_4 \end{array}$$

Выразить определитель D через миноры M_1, M_2, M_3, M_4 в следующих двух случаях:

а) если все элементы M_2 или M_3 равны нулю;

б) если все элементы M_1 или M_4 равны нулю.

455. Пусть в определителе D порядка $n = kl$ выделены l миноров порядка k, расположенных вдоль второй диагонали, т. е. M_1 лежит в первых k строках и последних k столбцах, M_2 в следующих k строках и предыдущих k столбцах и т. д., наконец, M_l — в последних k строках и первых k столбцах.

Выразить D через $M_1, M_2, \dots, M_l$, если все элементы D, лежащие по одну сторону от указанной цепочки миноров, равны нулю.

456. Пусть в определителе D порядка n выделены k строк и l столбцов, причем $l \leqslant k$ и все элементы выделенных l столбцов, не лежащие в выделенных k строках, равны нулю. Показать, что в разложении Лапласа определителя D по выделенным k строкам нужно брать только те миноры порядка k, которые содержат выделенные l столбцов;

утверждение, полученное переменой роли строк и столбцов, также верно.

457. Пользуясь теоремой Лапласа, решить задачу 206.

458. Доказать, что

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{12} & 0 & \ldots & a_{1n} & 0 \\ 0 & b_{11} & 0 & b_{12} & \ldots & 0 & b_{1n} \\ a_{21} & 0 & a_{22} & 0 & \ldots & a_{2n} & 0 \\ 0 & b_{21} & 0 & b_{22} & \ldots & 0 & b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & 0 & a_{n2} & 0 & \ldots & a_{nn} & 0 \\ 0 & b_{n1} & 0 & b_{n2} & \ldots & 0 & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

459*. Вычислить определитель порядка $k+l$:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 1 & 3 & 2 & 0 & \ldots & & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 2 & 5 & 3 & \ldots & & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 2 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\\1\\1\end{matrix}}\right\} k \text{ строк} \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\\1\\1\end{matrix}}\right\} l \text{ строк} \end{matrix}$$

460. Написать разложение континуанты (ср. с задачей 420) порядка n:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -1 & a_2 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a_3 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & a_n \end{vmatrix}$$

по первым k строкам. Какое свойство чисел Фибоначчи (задача 365) получается отсюда при $n = 2k$?

461. Не раскрывая скобок, доказать, что равенство

$$(ab' - a'b)(cd' - c'd) - (ac' - a'c)(bd' - b'd) + \\ + (ad' - a'd)(bc' - b'c) = 0$$

справедливо при любых значениях a, b, c, d, a', b', c', d'.

462*. В матрице

$$\left(\begin{array}{c|c} a_{11} \ldots a_{1n} & a_{1,n+1} \ldots a_{1,2n} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} \ldots a_{nn} & a_{n,n+1} \ldots a_{n,2n} \end{array} \right),$$

содержащей n строк и $2n$ столбцов, берем любой минор M порядка n, содержащий по крайней мере половину столбцов левой половины матрицы.

Пусть σ — сумма номеров столбцов минора M, и пусть M' — минор порядка n, составленный из остальных столбцов матрицы. Доказать, что $\sum(-1)^{\sigma}MM' = 0$, где сумма берется по всем минорам M указанного типа.

463.* Показать, что три определителя

$$D = \begin{vmatrix} a_1x_1 & b_1x_1 & a_1x_2 & b_1x_2 & a_1x_3 & b_1x_3 \\ a_2x_1 & b_2x_1 & a_2x_2 & b_2x_2 & a_2x_3 & b_2x_3 \\ a_1y_1 & b_1y_1 & a_1y_2 & b_1y_2 & a_1y_3 & b_1y_3 \\ a_2y_1 & b_2y_1 & a_2y_2 & b_2y_2 & a_2y_3 & b_2y_3 \\ a_1z_1 & b_1z_1 & a_1z_2 & b_1z_2 & a_1z_3 & b_1z_3 \\ a_2z_1 & b_2z_1 & a_2z_2 & b_2z_2 & a_2z_3 & b_2z_3 \end{vmatrix},$$

$$\delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \Delta = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

связаны равенством $D = \delta^3\Delta^2$.[1)]

464.* Пусть

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4, \\ g(x) &= b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4, \\ h(x) &= c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 \end{aligned}$$

и

$$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) = x^3 + px^2 + qx + r.$$

Показать, что

$$\begin{vmatrix} f(\alpha) & f(\beta) & f(\gamma) \\ g(\alpha) & g(\beta) & g(\gamma) \\ h(\alpha) & h(\beta) & h(\gamma) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \beta & \beta^2 \\ 1 & \gamma & \gamma^2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ r & q & p & 1 & 0 \\ 0 & r & q & p & 1 \end{vmatrix}.$$

465. Говорят, что определитель

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & x_{11} & \dots & x_{1k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & x_{n1} & \dots & x_{nk} \\ y_{11} & \dots & y_{1n} & 0 & \dots & 0 \\ y_{k1} & \dots & y_{kn} & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

получен окаймлением при помощи k строк и k столбцов из определителя

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

[1)] Обобщение этого свойства дано в задаче 540.

Показать, что при $k > n$ $D = 0$, а при $k \leqslant n$ D является формой (т. е. однородным многочленом) степени $n-k$ относительно элементов a_{ij} определителя Δ и формой степени $2k$ относительно окаймляющих элементов x_{ij}, y_{ij}, коэффициентами которой служат алгебраические дополнения миноров k-го порядка в определителе Δ. А именно, доказать, что

$$D = (-1)^k \sum A_{i_1 i_2 \ldots i_k j_1 j_2 \ldots j_k} X_{i_1 i_2 \ldots i_k} Y_{j_1 j_2 \ldots j_k},$$

где $A_{i_1 i_2 \ldots i_k j_1 j_2 \ldots j_k}$ есть алгебраическое дополнение минора определителя Δ, стоящего в строках с номерами $i_1 i_2, \ldots, i_k$ и в столбцах с номерами $j_1 j_2, \ldots, j_k$, а $X_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ и $Y_{j_1 j_2 \ldots j_k}$ — миноры определителя D, составленные из окаймляющих элементов и лежащие в строках (соответственно в столбцах) с указанными номерами. При этом сумма берется по всем комбинациям индексов, изменяющихся от единицы до n при условии, что $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$, $j_1 < j_2 < \ldots < j_k$.

466*. Доказать следующее обобщение теоремы Лапласа: если строки определителя n-го порядка D разбить на p систем без общих строк, причем в первую систему входят строки с номерами $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_k$, во вторую — строки с номерами $\alpha_{k+1} < \alpha_{k+2} < \ldots < \alpha_{k+l}$ и т. д., наконец, в последнюю — строки с номерами $\alpha_{n-s+1} < \alpha_{n-s+2} < \ldots < \alpha_n$, если затем в матрице первой системы строк взять минор M_1 порядка k, лежащий в столбцах с номерами $\beta_1 < \beta_2 < \ldots < \beta_k$, во второй матрице минор M_2 порядка l, лежащий в столбцах с номерами $\beta_{k+1} < \beta_{k+2} < \ldots < \beta_{k+l}$, отличными от номеров столбцов M_1, и т. д., наконец, в последней матрице — минор M_p порядка s, лежащий в оставшихся столбцах с номерами $\beta_{n-s+1} < \beta_{n-s+2} < \ldots < \beta_n$, и если затем составим произведение $\varepsilon M_1 M_2 \ldots M_p$, где $\varepsilon = +1$, если подстановка

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \\ \beta_1 & \beta_2 & \ldots & \beta_n \end{pmatrix} \tag{1}$$

четная, и $s = -1$, если эта подстановка нечетная, то определитель D равен сумме всевозможных произведений такого вида. То, что это утверждение обобщает теорему Лапласа, следует из задачи 424.

§ 7. Умножение определителей

467. Перемножить определители

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 4 \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -4 & 3 \\ 1 & -5 & 2 \end{vmatrix}$$

всеми четырьмя возможными способами (т. е. умножая строки или столбцы первого определителя на строки и столбцы второго) и проверить, что во всех случаях значение полученного определителя равно произведению значений данных определителей.

468. Вычислить определитель
$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{vmatrix}$$
путем возведения его в квадрат.

469. Вычислить определитель
$$\begin{vmatrix} a & b & c & d & e & f & g & h \\ -b & a & d & -c & f & -e & -h & g \\ -c & -d & a & b & g & h & -e & -f \\ -d & c & -b & a & h & -g & f & -e \\ e & -f & -g & -h & a & b & c & d \\ -f & e & -h & g & -b & a & -d & c \\ -g & h & e & -f & -c & d & a & -b \\ -h & -g & f & e & -d & -c & b & a \end{vmatrix}$$
путем возведения его в квадрат.

Вычислить следующие определители, представляя их в виде произведений определителей:

470*. $$\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \dots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \dots & 1+x_2y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \dots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}.$$

471. $$\begin{vmatrix} \cos(\alpha_1-\beta_1) & \cos(\alpha_1-\beta_2) & \dots & \cos(\alpha_1-\beta_n) \\ \cos(\alpha_2-\beta_1) & \cos(\alpha_2-\beta_2) & \dots & \cos(\alpha_2-\beta_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \cos(\alpha_n-\beta_1) & \cos(\alpha_n-\beta_2) & \dots & \cos(\alpha_n-\beta_n) \end{vmatrix}.$$

472. $$\begin{vmatrix} 1 & \cos(\alpha_1-\alpha_2) & \cos(\alpha_1-\alpha_3) & \dots & \cos(\alpha_1-\alpha_n) \\ \cos(\alpha_1-\alpha_2) & 1 & \cos(\alpha_2-\alpha_3) & \dots & \cos(\alpha_2-\alpha_n) \\ \cos(\alpha_1-\alpha_3) & \cos(\alpha_2-\alpha_3) & 1 & \dots & \cos(\alpha_3-\alpha_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \cos(\alpha_1-\alpha_n) & \cos(\alpha_2-\alpha_n) & \cos(\alpha_3-\alpha_n) & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

473. $$\begin{vmatrix} \sin 2\alpha_1 & \sin(\alpha_1+\alpha_2) & \dots & \sin(\alpha_1+\alpha_n) \\ \sin(\alpha_2+\alpha_1) & \sin 2\alpha_2 & \dots & \sin(\alpha_2+\alpha_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sin(\alpha_n+\alpha_1) & \sin(\alpha_n+\alpha_2) & \dots & \sin 2\alpha_n \end{vmatrix}.$$

474. $$\begin{vmatrix} \dfrac{1-a_1^nb_1^n}{1-a_1b_1} & \dfrac{1-a_1^nb_2^n}{1-a_1b_2} & \dots & \dfrac{1-a_1^nb_n^n}{1-a_1b_n} \\ \dfrac{1-a_2^nb_1^n}{1-a_2b_1} & \dfrac{1-a_2^nb_2^n}{1-a_2b_2} & \dots & \dfrac{1-a_2^nb_n^n}{1-a_2b_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{1-a_n^nb_1^n}{1-a_nb_1} & \dfrac{1-a_n^nb_2^n}{1-a_nb_2} & \dots & \dfrac{1-a_n^nb_n^n}{1-a_nb_n} \end{vmatrix}.$$

475. $$\begin{vmatrix} (a_0+b_0)^n & (a_0+b_1)^n & \dots & (a_0+b_n)^n \\ (a_1+b_0)^n & (a_1+b_1)^n & \dots & (a_1+b_1)^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a_n+b_0)^n & (a_n+b_1)^n & \dots & (a_n+b_n)^n \end{vmatrix}.$$

476*. $$\begin{vmatrix} 1^{n-1} & 2^{n-1} & \dots & n^{n-1} \\ 2^{n-1} & 3^{n-1} & \dots & (n+1)^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ n^{n-1} & (n+1)^{n-1} & \dots & (2n-1)^{n-1} \end{vmatrix}.$$

477. $$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \dots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \dots & s_n \\ s_2 & s_3 & s_4 & \dots & s_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \dots & s_{2n-2} \end{vmatrix}, \text{ где } s_k = x_1^k + x_2^k + \dots + x_n^k.$$

478*. $$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \dots & s_{n-1} & 1 \\ s_1 & s_2 & s_3 & \dots & s_n & x \\ s_2 & s_3 & s_4 & \dots & s_{n+1} & x^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_n & s_{n+1} & s_{n+2} & \dots & s_{2n-1} & x^n \end{vmatrix}, \text{ где } s_k = x_1^k + x_2^k + \dots + x_n^k.$$

479*. Доказать, что значение циркулянта определяется равенством

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_1 \end{vmatrix} = f(\varepsilon_1)f(\varepsilon_2)\dots f(\varepsilon_n),$$

где $f(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + \dots + a_nx^{n-1}$ и $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ — все значения корня n-й степени из единицы.

480. Доказать, что при обозначениях предыдущей задачи

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_1 \\ a_3 & a_4 & a_5 & \dots & a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} f(\varepsilon_1)f(\varepsilon_2)\dots f(\varepsilon_n).$$

481.* Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 & \dots & \alpha^{n-1} \\ \alpha^{n-1} & 1 & \alpha & \dots & \alpha^{n-2} \\ \alpha^{n-2} & \alpha^{n-1} & 1 & \dots & \alpha^{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha & \alpha^2 & \alpha^3 & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

482. Пользуясь результатом задачи 479, вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & \dots & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & \dots & a \end{vmatrix}.$$

483. Пользуясь результатом задачи 479, вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{vmatrix}.$$

Вычислить определители:

484. $$\begin{vmatrix} 1 & C_n^1 & C_n^2 & \dots & C_n^{n-1} & 1 \\ 1 & 1 & C_n^1 & \dots & C_n^{n-2} & C_n^{n-1} \\ C_n^{n-1} & 1 & 1 & \dots & C_n^{n-3} & C_n^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_n^1 & C_n^2 & C_n^3 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

485. $$\begin{vmatrix} 1 & 2a & 3a^2 & \dots & na^{n-1} \\ na^{n-1} & 1 & 2a & \dots & (n-1)a^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2a & 3a^2 & 4a^3 & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

486.* Доказать равенство

$$\begin{vmatrix} s-a_1 & s-a_2 & \dots & s-a_n \\ s-a_n & s-a_1 & \dots & s-a_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s-a_2 & s-a_3 & \dots & s-a_1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}(n-1)\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_2 & a_3 & \dots & a_1 \end{vmatrix},$$

где $s = a_1 + a_2 + \dots + a_n$.

Вычислить определители:

487.* $$\begin{vmatrix} \overbrace{-1 \quad -1 \quad -1 \quad \dots \quad -1}^{(p\ \text{столбцов})} & \overbrace{1 \quad 1 \quad \dots \quad 1 \quad 1}^{(n-p\ \text{столбцов})} \\ 1 \quad -1 \quad -1 \quad \dots \quad -1 & -1 \quad 1 \quad \dots \quad 1 \quad 1 \\ \dots & \dots \\ -1 \quad -1 \quad -1 \quad \dots \quad 1 & 1 \quad 1 \quad \dots \quad 1 \quad -1 \end{vmatrix}.$$

488*. $$\begin{vmatrix} \overbrace{\begin{matrix} a & a & a & \dots & a \\ b & a & a & \dots & a \\ b & b & a & \dots & a \\ \hdotsfor{5} \\ a & a & a & \dots & b \end{matrix}}^{(p \text{ столбцов})} & \overbrace{\begin{matrix} b & b & \dots & b & b \\ a & b & \dots & b & b \\ a & a & \dots & b & b \\ \hdotsfor{5} \\ b & b & \dots & b & a \end{matrix}}^{(n-p \text{ столбцов})} \end{vmatrix}.$$

489*. $$\begin{vmatrix} \cos\frac{\pi}{n} & \cos\frac{2\pi}{n} & \cos\frac{3\pi}{n} & \dots & -1 \\ -1 & \cos\frac{\pi}{n} & \cos\frac{2\pi}{n} & \dots & \cos\frac{(n-1)\pi}{n} \\ \cos\frac{(n-1)\pi}{n} & -1 & \cos\frac{\pi}{n} & \dots & \cos\frac{(n-2)\pi}{n} \\ \hdotsfor{5} \\ \cos\frac{2\pi}{n} & \cos\frac{3\pi}{n} & \cos\frac{4\pi}{n} & \dots & \cos\frac{\pi}{n} \end{vmatrix}.$$

490*. $$\begin{vmatrix} \cos\theta & \cos 2\theta & \cos 3\theta & \dots & \cos n\theta \\ \cos n\theta & \cos\theta & \cos 2\theta & \dots & \cos(n-1)\theta \\ \hdotsfor{5} \\ \cos 2\theta & \cos 3\theta & \cos 4\theta & \dots & \cos\theta \end{vmatrix}.$$

491. $$\begin{vmatrix} \sin a & \sin(a+h) & \sin(a+2h) & \dots & \sin[a+(n-1)h] \\ \sin[a+(n-1)h] & \sin a & \sin(a+h) & \dots & \sin[a+(n-2)h] \\ \hdotsfor{5} \\ \sin a + h & \sin(a+2h) & \sin(a+3h) & \dots & \sin a \end{vmatrix}.$$

492*. $$\begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 & \dots & n^2 \\ n^2 & 1^2 & 2^2 & \dots & (n-1)^2 \\ (n-1)^2 & n^2 & 1^2 & \dots & (n-2)^2 \\ \hdotsfor{5} \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & \dots & 1^2 \end{vmatrix}.$$

493*. Вычислить косой циркулянт (или косоциклический определитель)

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ -a_n & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ -a_{n-1} & -a_n & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ \hdotsfor{5} \\ -a_2 & -a_3 & -a_4 & \dots & a_1 \end{vmatrix}.$$

494. $$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_n z & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} z & a_n z & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ \hdotsfor{5} \\ a_2 z & a_3 z & a_4 z & \dots & a_1 \end{vmatrix},$$ где z — любое число.

495*. Доказать, что циркулянт порядка $2n$ с первой строкой из элементов $a_1, a_2, \ldots, a_{2n-1}, a_{2n}$ равен произведению циркулянта порядка n с первой строкой из элементов $a_1 + a_{n+1}, a_2 + a_{n+2}, \ldots, a_n + a_{2n}$ и косого циркулянта порядка n с первой строкой из элементов $a_1 - a_{n+1}, a_2 - a_{n+2}, a_n - a_{2n}$.

496*. Перемножая два определителя

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_2 & -x_1 & -x_4 & x_3 \\ x_3 & x_4 & -x_1 & -x_2 \\ x_4 & -x_3 & x_2 & -x_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ y_2 & -y_1 & -y_4 & y_3 \\ y_3 & y_4 & -y_1 & -y_2 \\ y_4 & -y_3 & y_2 & -y_1 \end{vmatrix},$$

доказать тождество Эйлера

$$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2) =$$
$$= (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4)^2 + (x_1y_2 - x_2y_1 - x_3y_4 + x_4y_3)^2 +$$
$$+ (x_1y_3 + x_2y_4 - x_3y_1 - x_4y_2)^2 + (x_1y_4 - x_2y_4 + x_3y_2 - x_4y_1)^2.$$

Какое свойство целых чисел отсюда вытекает?

497*. С помощью умножения определителей доказать тождество

$$(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)(a'^3 + b'^3 + c'^3 - 3a'b'c') = A^3 + B^3 + C^3 - 3ABC,$$

где $A = aa' + bc' + cb'$, $B = ac' + bb' + ca'$, $C = ab' + ba' + cc'$. Какое свойство целых чисел отсюда вытекает?

498*. При обозначениях предыдущей задачи доказать тождество

$$(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)(a'^2 + b'^2 + c'^2 - a'b' - a'c' - b'c') =$$
$$= A^2 + B^2 + C^2 - AB - AC - BC.$$

499*. Доказать следующее обобщение теоремы об умножении определителей. Пусть даны две матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{m1} & b_{m2} & \ldots & b_{mn} \end{pmatrix},$$

каждая из m строк и n столбцов.

Комбинируя строки одной матрицы со строками другой, полагая $c_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}b_{jk}$, составим определитель m-го порядка

$$D = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{m1} & c_{m2} & \ldots & c_{mm} \end{vmatrix}.$$

Далее обозначим через $A_{i_1,i_2,\ldots,i_m}$ и $B_{i_1,i_2,\ldots,i_m}$ соответственно миноры m-го порядка матриц A и B, составленные из столбцов этих матриц с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_m$ в том же порядке. Тогда

$$D = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_m \leqslant n} A_{i_1,i_2,\ldots,i_m} B_{i_1,i_2,\ldots,i_m} \tag{1}$$

при $m \leqslant n$ (формула Бинэ—Коши), т. е. определитель D равен сумме произведений всех миноров порядка m матрицы A на соответствующие миноры матрицы B. При $m > n$

$$D = 0. \tag{2}$$

500*. Доказать утверждение (2) предыдущей задачи, пользуясь теоремой об умножении определителей.

501*. Не производя умножения, доказать тождество Коши

$$\begin{gathered}(a_1c_1 + a_2c_2 + \cdots + a_nc_n)(b_1d_1 + b_2d_2 + \cdots + b_nd_n) - \\ - (a_1d_1 + a_2d_2 + \cdots + a_nd_n)(b_1c_1 + b_2c_2 + \cdots + b_nc_n) = \\ = \sum_{1 \leqslant i < k \leqslant n} (a_ib_k - a_kb_i)(c_id_k - c_kd_i) \quad (n > 1).\end{gathered}$$

502. Не производя умножения, доказать тождество Лагранжа

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\right)^2 = \sum_{1 \leqslant i < k \leqslant n} (a_ib_k - a_kb_i)^2.$$

503*. Доказать, что для любых действительных чисел

$$a_1, a_2, \ldots, a_n \quad \text{и} \quad b_1, b_2, \ldots, b_n$$

справедливо неравенство

$$(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) \geqslant (a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2,$$

причем знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда одна из систем чисел отличается от другой лишь числовым множителем (быть может, равным нулю). (Неравенство Коши—Буняковского.)

504*. Доказать, что для любых комплексных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n$ имеет место равенство

$$\begin{gathered}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\overline{a}_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\overline{b}_k\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\overline{b}_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \overline{a}_kb_k\right) = \\ = \sum_{1 \leqslant j < k \leqslant n} (a_jb_k - a_kb_j)(\overline{a}_j\overline{b}_k - \overline{a}_k\overline{b}_j).\end{gathered}$$

505.* Доказать, что для любых двух систем комплексных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n$ справедливо неравенство
$$\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^2\right) \geqslant \left|\sum_{k=1}^{n} a_k\bar{b}_k\right|^2,$$
причем знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда числа одной из данных систем отличаются от чисел другой лишь числовым множителем.

506.* *Взаимным* (или *присоединенным*) *определителем* к определителю D порядка $n > 1$ называется определитель D', полученный из D заменой всех его элементов на их алгебраические дополнения (с сохранением прежнего расположения).

Доказать, что
$$D' = D^{n-1}. \tag{1}$$

507.* Пусть M — минор порядка m определителя D, A — алгебраическое дополнение M, M' — минор взаимного определителя D', соответствующий минору M (т. е. составленный из алгебраических дополнений элементов определителя D, входящих в M). Доказать равенство $M' = D^{m-1}A$.

Если условиться дополнительный минор ко всему определителю D считать равным 1, то это равенство будет обобщением равенства предыдущей задачи (при $m = n$).

508.* Пусть C — минор $(n-2)$-го порядка, полученный из определителя D вычеркиванием i-й и j-й строк и k-го и l-го столбцов, причем $i < j$ и $k < l$; A_{pq}, как обычно, — алгебраическое дополнение элемента a_{pq}. Доказать, что $\begin{vmatrix} A_{ik} & A_{il} \\ A_{jk} & A_{jl} \end{vmatrix} = (-1)^{i+j+k+l}DC.$

509.* Показать, что если определитель D равен нулю, то все строки (а также столбцы) взаимного определителя пропорциональны.

510.* Пусть a_{ij} — элемент определителя D порядка n и A'_{ij} — алгебраическое дополнение соответствующего элемента A_{ij} определителя D', взаимного с D. Показать, что $A'_{ij} = D^{n-2}a_{ij}$.

511.* Пусть M — минор порядка m определителя D порядка n, M' — соответствующий M минор взаимного определителя D' и A' — алгебраическое дополнение минора M'. Доказать, что $A' = D^{n-m-1}M$. Это — обобщение равенства предыдущей задачи.

512.* Зная миноры всех элементов определителя D, отличного от нуля, найти его элементы.

513.* Пусть
$$s_k = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k \quad (k = 1, 2, 3, \ldots),$$
$$p = x_1 x_2 \ldots x_n.$$

Показать, что

$$\begin{vmatrix} n+1 & s_1 & s_2 & \dots & s_n \\ s_1 & s_2 & s_3 & \dots & s_{n+1} \\ s_2 & s_3 & s_4 & \dots & s_{n+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_n & s_{n+1} & s_{n+2} & \dots & s_{2n} \end{vmatrix} = p^2 \begin{vmatrix} n & s_1 & s_2 & \dots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \dots & s_n \\ s_2 & s_3 & s_4 & \dots & s_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \dots & s_{2n-2} \end{vmatrix}.$$

514. Показать, что если

$$D(x) = \begin{vmatrix} a_{11}-x & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-x & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn}-x \end{vmatrix},$$

то произведение $D(x) \cdot D(-x)$ можно представить в виде

$$\begin{vmatrix} A_{11}-x^2 & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22}-x^2 & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn}-x^2 \end{vmatrix},$$

где все A_{ij} не зависят от x. Найти выражение A_{ij} через a_{kl}.

515*. С помощью умножения определителей доказать, что при перестановке двух строк (или столбцов) определитель меняет знак.

516*. С помощью умножения определителей доказать, что определитель не изменяется, если к одной его строке (столбцу) прибавить другую строку (столбец), умноженную на число c.

517*. Показать, что определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\varphi_3 & \cos\varphi_2 \\ \cos\varphi_3 & 1 & \cos\varphi_1 \\ \cos\varphi_2 & \cos\varphi_1 & 1 \end{vmatrix}$$

равен нулю, если $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 0$.

518*. Пусть l_1, l_2, l_3 и m_1, m_2, m_3 — косинусы углов двух лучей с ортогональными осями координат и φ — угол между этими лучами. Доказать, что $\sin^2\varphi = (l_1m_2 - l_2m_1)^2 + (l_2m_3 - l_3m_2)^2 + (l_3m_1 - l_1m_3)^2$.

519. Пусть $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$; $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ — углы трех лучей L_1, L_2, L_3 с ортогональными осями координат, и пусть углы этих лучей между собой будут $\varphi_1 = \angle(L_2, L_3)$, $\varphi_2 = \angle(L_3, L_1)$, $\varphi_3 = \angle(L_1, L_2)$. Доказать, что

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\beta_1 & \cos\gamma_1 \\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 & \cos\gamma_2 \\ \cos\alpha_3 & \cos\beta_3 & \cos\gamma_3 \end{vmatrix}^2 =$$

$$= 1 - \cos^2\varphi_1 - \cos^2\varphi_2 - \cos^2\varphi_3 + 2\cos\varphi_1\cos\varphi_2\cos\varphi_3.$$

520.* Пусть (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) будут прямоугольные координаты точек M_1, M_2, M_3 на плоскости. Показать, что определитель

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

не изменится при повороте осей координат и переносе начала. Пользуясь этим, выяснить его геометрический смысл.

521.* Пусть (x_1, y_1) и (x_2, y_2) — прямоугольные координаты двух точек M_1 и M_2 на плоскости. Выяснив геометрический смысл определителя $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$, узнать, меняется ли он при повороте осей и при переносе начала координат?

522.* Вычислив произведение определителей

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & R \\ x_2 & y_2 & R \\ x_3 & y_3 & R \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -x_1 & -y_1 & R \\ -x_2 & -y_2 & R \\ -x_3 & -y_3 & R \end{vmatrix},$$

получить выражение радиуса описанного круга через стороны a, b, c и площадь S треугольника.

523.* Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$; $\beta_1, \beta_2, \beta_3$; $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ — соответственно косинусы углов трех попарно ортогональных лучей OA, OB, OC с осями прямоугольной системы координат Ox, Oy, Oz. Доказать, что определитель $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \pm 1$, причем знак плюс будет в случае одинаковой ориентации триэдров $OABC$ и $Oxyz$ (это означает возможность при вращении фигуры $OABC$ совместить OA с Ox, OB с Oy, OC с Oz) и минус — в случае противоположной ориентации (это означает, что при совмещении OA с Ox и OB с Oy лучи OC и Oz окажутся противоположно направленными).

524.* Пусть (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) — координаты трех точек M_1, M_2, M_3 пространства. Показать, что определитель

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

не меняется при повороте системы координат (которая предполагается прямоугольной) и выяснить его геометрический смысл.

525.* Найти выражение объема V параллелепипеда через длины a, b, c его ребер, проходящих через одну вершину и углы α, β, γ, образуемые этими ребрами. (Угол α образован ребрами длины b и c; β образован c и a; γ образован a и b.)

526*. Пусть l_1, l_2, l_3; m_1, m_2, m_3; n_1, n_2, n_3 — соответственно косинусы углов лучей OA, OB, OC с положительными полуосями прямоугольной системы координат Ox, Oy, Oz.

Доказать, что для компланарности (т. е. для расположения в одной плоскости) лучей OA, OB и OC необходимо и достаточно выполнение условия $\begin{vmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{vmatrix} = 0.$

527*. Пусть (x_i, y_i, z_i) — прямоугольные координаты точки M_i пространства ($i = 1, 2, 3, 4$). Показав, что определитель

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}$$

не меняется при переносе начала координат, выяснить его геометрический смысл.

528*. Перемножить определители

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & R \\ x_2 & y_2 & z_2 & R \\ x_3 & y_3 & z_3 & R \\ x_4 & y_4 & z_4 & R \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{vmatrix} -x_1 & -y_1 & -z_1 & R \\ -x_2 & -y_2 & -z_2 & R \\ -x_3 & -y_3 & -z_3 & R \\ -x_4 & -y_4 & -z_4 & R \end{vmatrix},$$

получить выражение радиуса шара, описанного около произвольного тетраэдра, через объем и ребра тетраэдра. В частности, найти из полученного выражения радиус шара, описанного около правильного тетраэдра с длиной ребра, равной a.

§ 8. Различные задачи

529*. Показать, что определитель порядка n допускает следующее аксиоматическое определение (эквивалентное обычному).

Любую строку из n чисел[1)] будем называть вектором и обозначать одной буквой жирного шрифта. Сложение двух векторов и умножение вектора на число определяются, как обычно, т. е. если

$$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \quad \text{и} \quad \boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n),$$

то

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n),$$

если c — число, то $c\boldsymbol{a} = (ca_1, ca_2, \ldots, ca_n)$.

Функция $f(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ от n векторов с числовыми значениями называется линейной по каждому аргументу (или, короче, поли-

[1)] Вместо чисел можно рассматривать также элементы любого поля P.

линейной), если

$$f(a_1, \dots, c'a'_i + c''a''_i, \dots, a_n) = \\ = c'f(a_1, \dots, a'_i, \dots, a_n) + c''f(a_1, \dots, a''_i, \dots, a_n) \qquad (\alpha)$$

для любых входящих сюда векторов, любых чисел c', c'' и любого $i = 1, 2, , \dots, n$. Далее назовем функцию обладающей *свойством аннуляции*, если

$$f(a_1, \dots, a_i, \dots, a_j, \dots, a_n) = 0 \text{ при } a_i = a_j; \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \quad i \neq j. \qquad (\beta)$$

Пусть e_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ — вектор, у которого на i-м месте стоит единица, а на всех остальных местах нули. Функция $f(a_1, a_2, \dots, a_n)$ называется нормированной, если

$$f(e_1, e_2, \dots, e_n) = 1. \qquad (\gamma)$$

Пусть дана квадратная матрица порядка n

$$a = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

и $|A|$ — определитель в обычном смысле, т. е.

$$|A| = \sum (-1)^s a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{ni_n},$$

где сумма берется по всем перестановкам $i_1, i_2, \dots, i_n$ чисел $1, 2, \dots, n$ и s — число инверсий в каждой перестановке.

Показать, что:

1) определитель $|A|$ как функция строк матрицы A обладает свойствами (α), (β), (γ);

2) любая функция n векторов, обладающая свойствами (α) и (β), удовлетворяет равенству $f(a_1, a_2, \dots, a_n) = |A| f(e_1, e_2, \dots, e_n)$, где A — матрица со строками $a_1, a_2, \dots, a_n$;

3) любая функция $f(a_1, a_2, \dots, a_n)$, обладающая свойствами (α), (β), (γ), равна определителю $|A|$ матрицы A со строками $a_1, a_2, \dots, a_n$. Иными словами, определитель $|A|$ матрицы A есть единственная полилинейная, со свойством аннуляции, нормированная функция ее строк.

530.* Пользуясь утверждением 2) предыдущей задачи, доказать теорему об умножении определителей.

531. Показать, что для функций n векторов над полем характеристики, отличной от 2, свойство (β) при наличии свойства (α) эквивалентно знакопеременности функции, т. е.

$$f(a_1, \dots, a_i, \dots, a_j, \dots, a_n) = -f(a_1, \dots, a_j, \dots, a_i, \dots, a_n) \qquad (\beta')$$

для любых векторов и любых $i, j = 1, 2, \ldots, n$, $i \neq j$. Построить пример функции n векторов над полем P характеристики 2, обладающей свойствами (α), (β') и (γ), но не обладающей свойством (β).

532*. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \varepsilon^3 & \ldots & \varepsilon^{n-1} \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon^4 & \varepsilon^6 & \ldots & \varepsilon^{2(n-1)} \\ 1 & \varepsilon^3 & \varepsilon^6 & \varepsilon^9 & \ldots & \varepsilon^{3(n-1)} \\ \hdotsfor{6} \\ 1 & \varepsilon^{n-1} & \varepsilon^{2(n-1)} & \varepsilon^{3(n-1)} & \ldots & \varepsilon^{(n-1)^2} \end{vmatrix},$$

где $\varepsilon = \cos\dfrac{2\pi}{n} + i\sin\dfrac{2\pi}{n}$.

533*. Как изменится определитель, если в нем выделить k строк (или столбцов) и из каждой из них вычесть все остальные выделенные строки?

534. Определитель

$$D = \begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12}+x & \ldots & a_{1n}+x \\ a_{21}+x & a_{22}+x & \ldots & a_{2n}+x \\ \hdotsfor{4} \\ a_{n1}+x & a_{n2}+x & \ldots & a_{nn}+x \end{vmatrix}$$

представить в виде многочлена, расположенного по степеням x.

535*. Доказать, что сумма алгебраических дополнений всех элементов определителя

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \hdotsfor{4} \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

равна определителю

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ a_{21}-a_{11} & a_{22}-a_{12} & \ldots & a_{2n}-a_{1n} \\ a_{31}-a_{11} & a_{32}-a_{12} & \ldots & a_{3n}-a_{1n} \\ \hdotsfor{4} \\ a_{n1}-a_{11} & a_{n2}-a_{12} & \ldots & a_{nn}-a_{1n} \end{vmatrix}.$$

536*. Доказать, что сумма алгебраических дополнений всех элементов определителя не изменится, если ко всем элементам прибавить одно и то же число.

537*. Доказать, что если все элементы какой-нибудь строки (столбца) определителя равны единице, то сумма алгебраических дополнений всех элементов определителя равна самому определителю.

538. Доказать, что кососимметрический определитель четного порядка не изменится, если ко всем его элементам прибавить одно и то же число.

539*. Установить следующую связь континуант (развернутое выражение континуанты дано в задаче 420):

$$(a_1a_2\dots a_n) = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & a_2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a_3 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & a_n \end{vmatrix}$$

с непрерывными дробями

$$a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \dots + \cfrac{1}{a_n}}} = \frac{(a_1a_2\dots a_n)}{a_2a_3\dots a_n}.$$

540*. Пусть даны два определителя:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{порядка } n$$

и

$$B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{p1} & b_{p2} & \dots & b_{pp} \end{vmatrix} \quad \text{порядка } p.$$

Составим определитель порядка np:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & \dots & a_{1n}b_{11} & a_{11}b_{12} & \dots & a_{1n}b_{12} & \dots & a_{11}b_{1p} & \dots & a_{1n}b_{1p} \\ a_{21}b_{11} & \dots & a_{2n}b_{11} & a_{21}b_{12} & \dots & a_{2n}b_{12} & \dots & a_{21}b_{1p} & \dots & a_{2n}b_{1p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}b_{11} & \dots & a_{nn}b_{11} & a_{n1}b_{12} & \dots & a_{nn}b_{12} & \dots & a_{n1}b_{1p} & \dots & a_{nn}b_{1p} \\ a_{11}b_{21} & \dots & a_{1n}b_{21} & a_{11}b_{22} & \dots & a_{1n}b_{22} & \dots & a_{11}b_{2p} & \dots & a_{1n}b_{2p} \\ a_{21}b_{21} & \dots & a_{2n}b_{21} & a_{21}b_{22} & \dots & a_{2n}b_{22} & \dots & a_{21}b_{2p} & \dots & a_{2n}b_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}b_{21} & \dots & a_{nn}b_{21} & a_{n1}b_{22} & \dots & a_{nn}b_{22} & \dots & a_{n1}b_{2p} & \dots & a_{nn}b_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}b_{p1} & \dots & a_{nn}b_{p1} & a_{n1}b_{p2} & \dots & a_{nn}b_{p2} & \dots & a_{n1}b_{pp} & \dots & a_{nn}b_{pp} \end{vmatrix}.$$

Таким образом, матрица определителя D состоит из p^2 клеток по n строк и n столбцов в каждой. При этом клетка, стоящая в i-й клеточной строке и j-м клеточном столбце $(i, j = 1, 2, \dots, p)$, получается из матрицы определителя A умножением всех ее элементов на b_{ij}. Доказать, что $D = A^pB^n$. Определитель D называется кронекеровским произведением определителей A и B (см. задачи 963, 965).

541. Доказать следующее правило разложения окаймленного определителя: если

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

и A_{ij} — алгебраическое дополнение элемента a_{ij}, то

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & x_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & x_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & x_n \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n & z \end{vmatrix} = Dz - \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}x_iy_j.$$

542*. Пусть элементы определителя D являются многочленами от неизвестных $x_1, x_2, \dots, x_3$ с числовыми (или из произвольного поля P) коэффициентами, причем $D = 0$. Доказать, что алгебраические дополнения элементов определителя D можно представить в виде $A_{ij} = A_iB_j$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, где все A_i и B_j — многочлены от $x_1, x_2, \dots, x_s$. Найти эти многочлены для определителя

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix},$$

где за неизвестные приняты a, b, c.

543*. Пользуясь двумя предыдущими задачами, доказать, что кососимметрический определитель четного порядка является квадратом некоторого многочлена от его элементов, стоящих выше главной диагонали.

544*. Показать, что если в общем выражении кососимметрического определителя каждый элемент a_{ji} при $j > i$ заменить через $-a_{ij}$, то сократятся все члены, подстановки из индексов которых при разложении на циклы дают хотя бы один цикл нечетной длины.

545*. Пусть D — кососимметрический определитель четного порядка n с элементами $a_{ij} = -a_{ji}$ $(i, j = 1, 2, \dots, n)$. *Пфаффовым произведением определителя* D называется произведение

$$\varepsilon a_{i_1,i_2}a_{i_3,i_4}\dots a_{i_{n-1},i_n},$$

в котором индексы $n/2$ элементов, в него входящих, образуют перестановку $i_1, i_2, \dots, i_n$ чисел $1, 2, \dots n$; $\varepsilon = +1$, если эта перестановка четная, и $\varepsilon = -1$, если нечетная. Пфаффово произведение называется *приведенным*, если оно состоит только из элементов, лежащих в D

выше главной диагонали (т. е. если у каждого элемента первый индекс меньше второго). Член определителя D назовем *существенным*, если подстановка из его индексов имеет только циклы четной длины. Пара приведенных пфаффовых произведений N_1, N_2 (в данном порядке) называется *соответствующей* данному существенному члену определителя D, если она построена по этому члену следующим образом. Пусть подстановка из индексов данного члена записана в циклах так:

$$(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{h-1}\alpha_h)(\beta_1\beta_2\ldots\beta_{g-1}\beta_g)\ldots(\mu_1\mu_2\ldots\mu_{k-1}\mu_k), \tag{1}$$

причем $\alpha_1 = 1$ и каждый цикл, начиная со второго, начинается с наименьшего числа из чисел, не вошедших в предыдущие циклы. Строим пфаффовы произведения

$$N_1' = \varepsilon_1 a_{\alpha_1,\alpha_2}a_{\alpha_3,\alpha_4}\ldots a_{\alpha_{h-1},\alpha_h}a_{\beta_1,\beta_2}a_{\beta_3,\beta_4}\ldots a_{\beta_{g-1},\beta_g}\ldots$$
$$\ldots a_{\mu_1,\mu_2}a_{\mu_3,\mu_4}\ldots a_{\mu_{k-1},\mu_k}$$

и

$$N_2' = \varepsilon_2 a_{\alpha_2,\alpha_3}a_{\alpha_4,\alpha_5}\ldots a_{\alpha_h,\alpha}a_{\beta_2,\beta_3}a_{\beta_4,\beta_5}\ldots a_{\beta_g,\beta_1}\ldots$$
$$\ldots a_{\mu_2,\mu_3}a_{\mu_4,\mu_5}\ldots a_{\mu_k,\mu_1},$$

затем каждый элемент a_{ij}, где $i > j$, заменяем через $-a_{ji}$.

Соответственно меняется знак ε_1 или ε_2, но меняется и класс перестановки, так что при каждой замене мы снова получаем пфаффово произведение. Выполнив в N_1', N_2' все указанные замены, мы и получим пару N_1, N_2 приведенных пфаффовых произведений, соответствующую данному существенному члену D.

Доказать, что:

1) Любая пара приведенных пфаффовых произведений (различных или одинаковых) соответствует одному и только одному существенному члену общего разложения определителя D. (В общем разложении D члены, получающиеся один из другого заменами типа $a_{ij} = -a_{ji}$, считаются различными.) Иными словами, установлено взаимно однозначное соответствие между всеми существенными членами и всеми парами приведенных пфаффовых произведений определителя D.

2) Каждый существенный член равен произведению приведенных пфаффовых произведений соответствующей ему пары.

3) $D = p^2$, где p — сумма всех приведенных пфаффовых произведений, называемая пфаффовым агрегатом или пфаффианом определителя D.

546*. Доказать следующую рекуррентную формулу, удобную для вычисления пфаффова агрегата, определенного в предыдущей задаче. Если p_n — пфаффов агрегат кососимметрического определителя $D_n = |a_{ij}|$

четного порядка $n > 2$, p_{in} — пфаффов агрегат определителя D_{in}, полученного из D_n вычеркиванием n-й и i-й строк, а также соответствующих столбцов, где $i = 1, 2, \ldots, n-1$, то

$$p_n = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i-1} p_{in} a_{in}; \quad p_2 = a_{12}.$$

Показать, что p_{in} получается из p_{n-2} увеличением на 1 всех индексов элементов, больших или равных i.

547. Пользуясь формулой предыдущей задачи, вычислить пфаффианы p_2, p_4, p_6.

548. Пользуясь формулой задачи 546, найти число слагаемых пфаффова агрегата p_n кососимметрического определителя D_n четного порядка n, т. е. число различных приведенных пфаффовых произведений определителя D_n (произведения, различающиеся лишь порядком сомножителей, различными не считаются).

549*. Пусть D — кососимметрический определитель нечетного порядка n с элементами a_{ij} $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$, M_{ij} — минор элемента a_{ij}, $p_{i,n+1}$ — пфаффов агрегат минора M_{ii}. Показать, что $M_{ij} = p_{i,n+1} p_{j,n+1}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$. Далее, показать, что за многочлены A_i, B_j задачи 542 (при условии, что неизвестными $x_1, \ldots, x_s$ считаются элементы D, стоящие выше главной диагонали) можно принять $A_i = (-1)^{i-1} p_{i,n+1}$, $B_j = (-1)^{j-1} p_{j,n+1}$.

Проверить, что для определителя $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix}$ этим путем получается тот же результат, что и в задаче 542 (если учесть, что в задаче 542 A_i и B_j определены с точностью до изменения знака у всех этих многочленов).

550*. Доказать, что определитель общего вида, рассматриваемый как многочлен от своих элементов, принятых за неизвестные, не разлагается на два множителя, каждый из которых есть многочлен от тех же неизвестных степени, отличной от нуля. Иными словами, определитель является неприводимым многочленом от своих элементов и притом над любым полем.

551*. Пусть $D = |a_{ij}|$ — определитель порядка $n > 1$, k — любое из чисел $1, 2, \ldots, n$, $\binom{n}{k} = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$; обозначим через $s_1, s_2, \ldots, s_{\binom{n}{k}}$ всевозможные сочетания из n чисел $1, 2, \ldots, n$ по k, занумерованные в произвольном, но в дальнейшем неизменном порядке (для определенности числа в каждом сочетании можно считать расположенными в порядке возрастания, хотя для дальнейшего это не существенно); μ_{ij} — минор k-го порядка определителя D, стоящий на пересечении строк с номерами из сочетания s_i и столбцов с номерами из сочетания s_j, $i,j=1,2,,\ldots,\binom{n}{k}$; α_{ij} — алгебраическое дополнение минора μ_{ij} в D. Определителем миноров k-го порядка определителя D назовем определитель порядка $\binom{n}{k}$, имеющий вид

$$\Delta_k=\begin{vmatrix}\mu_{11} & \mu_{12} & \cdots & \mu_{1\binom{n}{k}}\\ \mu_{21} & \mu_{22} & \cdots & \mu_{2\binom{n}{k}}\\ \hdotsfor{4}\\ \mu_{\binom{n}{k}1} & \mu_{\binom{n}{k}2} & \cdots & \mu_{\binom{n}{k}\binom{n}{k}}\end{vmatrix}.$$

Введем еще определитель $\overline{\Delta}_k$ порядка $\binom{n}{k}$, получающийся из Δ_k заменой каждого минора μ_{ij} его алгебраическим дополнением α_{ij} в D.

Доказать, что:

1) значения определителей Δ_k и $\overline{\Delta}_k$ не меняются при изменении нумерации сочетаний, т. е. при перестановке сочетаний в последовательности $s_1,s_2,\ldots,s_{\binom{n}{k}}$;

2) $\Delta_k=\overline{\Delta}_{n-k}$. Это — обобщение утверждения задачи 242;

3) $\Delta_k\overline{\Delta}_k=D^{\binom{n}{k}}$; 4) $\Delta_k=D^{\binom{n-1}{k-1}}$; 5) $\overline{\Delta}_k=D^{\binom{n-1}{k}}$.

552.* Вычислить определитель $P_n=|p_{ij}|$, в котором $p_{ij}=1$, если i делит j, и $p_{ij}=0$, если i не делит j. Найти значение определителя $Q_n=|q_{ij}|$, в котором q_{ij} равно числу общих делителей чисел i и j.

553.* *Функцией Эйлера* называется функция $\varphi(n)$, равная числу чисел ряда $1,2,\ldots,n$, взаимно простых с n. Пользуясь предыдущей задачей и теоремой Гаусса о том, что $n=\sum\varphi(d)$, где сумма берется по всем делителям d числа n (включая 1 и само n), показать, что определитель порядка n $D=|d_{ij}|$, где d_{ij} — наибольший общий делитель чисел i и j, равен $\varphi(1)\varphi(2)\ldots\varphi(n)$.

Отдел 2

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 9. Системы уравнений, решаемые по правилу Крамера

Следующие системы уравнений решить по правилу Крамера:

554. $$\begin{aligned} 2x_1+2x_2-x_3+x_4&=4,\\ 4x_1+3x_2-x_3+2x_4&=6,\\ 8x_1+5x_2-3x_3+4x_4&=12,\\ 3x_1+3x_2-2x_3+2x_4&=6. \end{aligned}$$

555. $$\begin{aligned} 2x_1+3x_2+11x_3+5x_4&=2,\\ x_1+x_2+5x_3+2x_4&=1,\\ 2x_1+x_2+3x_3+2x_4&=-3,\\ x_1+x_2+3x_3+4x_4&=-3. \end{aligned}$$

556. $$\begin{aligned} 2x_1+5x_2+4x_3+x_4&=20,\\ x_1+3x_2+2x_3+x_4&=11,\\ 2x_1+10x_2+9x_3+7x_4&=40,\\ 3x_1+8x_2+9x_3+2x_4&=37. \end{aligned}$$

557. $$\begin{aligned} 3x_1+4x_2+x_3+2x_4+3&=0,\\ 3x_1+5x_2+3x_3+5x_4+6&=0,\\ 6x_1+8x_2+x_3+5x_4+8&=0,\\ 3x_1+5x_2+3x_3+7x_4+8&=0. \end{aligned}$$

558. $$\begin{aligned} 7x_1+9x_2+4x_3+2x_4-2&=0,\\ 2x_1-2x_2+x_3+x_4-6&=0,\\ 5x_1+6x_2+3x_3+2x_4-3&=0,\\ 2x_1+3x_2+x_3+x_4&=0. \end{aligned}$$

559. $$\begin{aligned} 6x+5y-2z+4t+4&=0,\\ 9x-y+4z-t-13&=0,\\ 3x+4y+2z-2t-1&=0,\\ 3x-9y+2t-11&=0. \end{aligned}$$

560. $$\begin{aligned} 2x-y-6z+3t+1&=0,\\ 7x-4y+2z-15t+32&=0,\\ x-2y-4z+9t-5&=0,\\ x-y+2z-6t+8&=0. \end{aligned}$$

561. $$\begin{aligned} 2x+y+4z+8t&=-1,\\ x+3y-6z+2t&=3,\\ 3x-2y+2z-2t&=8,\\ 2x-y+2z&=4. \end{aligned}$$

562. $$\begin{aligned} 2x-y+3z&=9,\\ 3x-5y+z&=-4,\\ 4x-7y+z&=5, \end{aligned}$$

563. $$\begin{aligned} 2x-5y+3z+t&=5,\\ 3x-7y+3z-t&=-1,\\ 5x-9y+6z+4t&=7,\\ 4x-6y+3z+t&=8. \end{aligned}$$

564*. Две системы линейных уравнений с одними и теми же неизвестными (не обязательно с одним и тем же числом уравнений) называются эквивалентными, если любое решение первой системы удовлетворяет второй и обратно. (Любые две системы с одними и теми же неизвестными, каждая из которых не имеет решений, также считаются эквивалентными.)

Показать, что любое из следующих преобразований системы линейных уравнений:

а) перестановка двух уравнений;

б) умножение обеих частей одного из уравнений на любое число, отличное от нуля;

в) почленное вычитание из одного уравнения другого, умноженного на любое число,

переводит данную систему уравнений в эквивалентную.

Переводит ли изменение нумерации неизвестных данную систему в эквивалентную? Допустимо ли изменение нумерации неизвестных при решении системы уравнений?

565. Доказать, что любая система линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, s, \tag{1}$$

посредством преобразований типа а), б), в) предыдущей задачи и изменения нумерации неизвестных может быть приведена к виду

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij}y_j = d_i, \quad i = 1, 2, \ldots, s, \tag{2}$$

удовлетворяющему одной и только одной из следующих трех групп условий:

а) $c_{ii} \neq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$; $c_{ij} = 0$ для $i > j$ (в частности, коэффициенты при неизвестных во всех уравнениях, следующих за n-м (при $s > n$), равны нулю), $d_i = 0$ для $i = n + 1, \ldots, s$ (в этом случае говорят, что система приведена к треугольному виду);

б) существует целое число r, $0 \leqslant r \leqslant n - 1$, такое, что $c_{ii} \neq 0$, $i = 1, 2, \ldots, r$; $c_{ij} = 0$ при $i > j$; $c_{ij} = 0$ при $i > r$ и любом j, равном $1, 2, \ldots, n$; $d_i = 0$ при $i = r + 1, r + 2, \ldots, s$;

в) существует целое число r, $0 \leqslant r \leqslant n$, такое, что $c_{ii} \neq 0$ при $i = 1, 2, \ldots, r$; $c_{ij} = 0$ при $i > j$; $c_{ij} = 0$ при $i > r$ и любом $j = 1, 2, \ldots, n$. Существует целое число k, $r + 1 \leqslant k \leqslant s$, такое, что $d_k \neq 0$.

Показать, что если в системе (2) восстановить прежнюю нумерацию неизвестных, то получится система, эквивалентная исходной системе (1). Затем показать, что в случае а) система (2) (а значит, и (1)) имеет единственное решение; в случае б) система (2) имеет бесконечно много решений, причем для любых значений неизвестных $y_{r+1}, \ldots, y_n$ существует единственная система значений остальных неизвестных $y_1, \ldots, y_r$; в случае в) система (2) решений не имеет. Эта теорема дает обоснование метода исключения неизвестных при решении системы линейных уравнений.

566. Показать, что если система линейных уравнений (1) предыдущей задачи имеет целые коэффициенты, то при всех преобразованиях в процессе ее приведения к виду (2) можно избежать дробных чисел, так что и система (2) будет с целыми коэффициентами.

Следующие системы уравнений решить методом исключения неизвестных:

567. $$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 &= 3,\\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 &= -3,\\ x_1 + 2x_2 \qquad - 4x_4 &= -3,\\ x_1 - x_2 - 4x_3 + 9x_4 &= 22. \end{aligned}$$

568. $$\begin{aligned} 4x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 - 7 &= 0,\\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 - 3 &= 0,\\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 \qquad + 1 &= 0,\\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 8x_4 + 7 &= 0. \end{aligned}$$

569. $$\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 \qquad + x_4 + 3 &= 0,\\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 3x_4 + 6 &= 0,\\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 \qquad &= 0,\\ x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 - 2 &= 0. \end{aligned}$$

570. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 6x_3 - 4x_4 &= 6,\\ 3x_1 - x_2 - 6x_3 - 4x_4 &= 2,\\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 2x_4 &= 6,\\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 8x_4 &= -7. \end{aligned}$$

571. $$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 - 3 &= 0,\\ 6x_1 + 9x_2 - 2x_3 - x_4 + 4 &= 0,\\ 10x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 2x_4 - 3 &= 0,\\ 8x_1 + 6x_2 + x_3 + 3x_4 + 7 &= 0. \end{aligned}$$

572. $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 9x_4 &= 79,\\ 3x_1 + 13x_2 + 18x_3 + 30x_4 &= 263,\\ 2x_1 + 4x_2 + 11x_3 + 16x_4 &= 146,\\ x_1 + 9x_2 + 9x_3 + 9x_4 &= 92. \end{aligned}$$

573. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 15,\\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 &= 35,\\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 10x_4 + 15x_5 &= 70,\\ x_1 + 4x_2 + 10x_3 + 20x_4 + 35x_5 &= 126,\\ x_1 + 5x_2 + 15x_3 + 35x_4 + 70x_5 &= 210. \end{aligned}$$

574. $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 &= 2,\\ 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 10x_4 + 13x_5 &= 12,\\ 3x_1 + 5x_2 + 11x_3 + 16x_4 + 21x_5 &= 17,\\ 2x_1 - 7x_2 + 7x_3 + 7x_4 + 2x_5 &= 57,\\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 + 10x_5 &= 7. \end{aligned}$$

575*. $$\begin{aligned} 6x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 18x_4 + 20x_5 &= 14,\\ 10x_1 + 9x_2 + 7x_3 + 24x_4 + 30x_5 &= 18,\\ 12x_1 + 12x_2 + 13x_3 + 27x_4 + 35x_5 &= 32,\\ 8x_1 + 6x_2 + 6x_3 + 15x_4 + 20x_5 &= 16,\\ 4x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 15x_4 + 15x_5 &= 11. \end{aligned}$$

576. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 9x_5 + 9 &= 0,\\ 2x_1 + 2x_2 + 17x_3 + 17x_4 + 82x_5 + 146 &= 0,\\ 2x_1 \qquad + 3x_3 - x_4 + 4x_5 + 10 &= 0,\\ x_2 + 4x_3 + 12x_4 + 27x_5 + 26 &= 0,\\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 10x_4 \qquad - 37 &= 0. \end{aligned}$$

577. $$\begin{aligned} 5x_1 + 2x_2 - 7x_3 + 14x_4 \phantom{{}+3x_5} &= 21,\\ 5x_1 - x_2 + 8x_3 - 13x_4 + 3x_5 &= 12,\\ 10x_1 + x_2 - 2x_3 + 7x_4 - x_5 &= 29,\\ 15x_1 + 3x_2 + 15x_3 + 9x_4 + 7x_5 &= 130,\\ 2x_1 - x_2 - 4x_3 + 5x_4 - 7x_5 &= -13. \end{aligned}$$

578. $$\begin{aligned} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 &= 5,\\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 &= 3,\\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 + 8x_4 &= 1,\\ 5x_1 + 18x_2 + 4x_3 + 5x_4 &= 12. \end{aligned}$$

579. $$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 &= 1,\\ 8x_1 + 12x_2 - 9x_3 + 8x_4 &= 3,\\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= 3,\\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 - 7x_4 &= 3. \end{aligned}$$

580. $$\begin{aligned} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 &= 8,\\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 &= 7,\\ 2x_1 - x_2 \phantom{{}+x_3} - 5x_4 &= 6,\\ 5x_1 - 3x_2 + x_3 - 8x_4 &= 1. \end{aligned}$$

581. $$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 3,\\ 4x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 2,\\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 - 6x_4 &= 1,\\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= 5. \end{aligned}$$

582. Показать, что многочлен степени n вполне определяется его значениями при $n+1$ значениях неизвестного. Точнее, показать, что для любых различных между собой чисел $x_0, x_1, x_2 \ldots, x_n$ и любых чисел $y_0, y_1, \ldots, y_n$ существует и притом только один многочлен $f(x)$ степени $\leqslant n$, для которого

$$f(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

583. Пользуясь предыдущей задачей, доказать эквивалентность двух определений равенства многочленов от одного неизвестного[1] с числовыми коэффициентами (или коэффициентами из любого бесконечного поля):

1) два многочлена называются равными, если равны их коэффициенты при каждой паре членов одинаковой степени (определение, принятое в алгебре);

2) два многочлена называются равными, если они равны как функции, т. е. если равны их значения при каждом значении неизвестного (определение, принятое в анализе).

584. Показать, что для конечного поля коэффициентов определения предыдущей задачи не эквивалентны (построить пример).

585. Найти квадратный многочлен $f(x)$, зная, что

$$f(1) = -1;\ f(-1) = 9;\ f(2) = -3.$$

586. Найти многочлен 3-й степени $f(x)$, для которого

$$f(-1) = 0,\ f(1) = 4,\ f(2) = 3,\ f(3) = 16.$$

587. Какой геометрический смысл имеет утверждение задачи 582?

---

[1] Индукцией легко доказать аналогичное утверждение для многочленов от любого числа неизвестных.

588. Найти параболу 3-й степени, проходящую через точки $(0,1)$, $(1,-1)$, $(2,5)$, $(3,37)$, причем асимптотическое направление параллельно оси ординат.

589. Найти параболу 4-й степени, проходящую через точки $(5,0)$, $(-13,2)$, $(-10,3)$, $(-2,1)$, $(14,-1)$, причем асимптотическое направление параллельно оси абсцисс.

Решить следующие системы линейных уравнений, применив в каждом случае наиболее подходящий прием:

590.
$$\begin{aligned} -x+y+z+t&=a,\\ x-y+z+t&=b,\\ x+y-z+t&=c,\\ x+y+z-t&=d, \end{aligned}$$

591*.
$$\begin{aligned} a\,(x+t)+\ b\,(y+z)&=c,\\ a'\,(y+t)+b'\,(z+x)&=c',\\ a''\,(z+t)+b''\,(x+y)&=c'',\\ x+y+z+t&=d, \end{aligned}$$

причем $a\neq b, a'\neq b', a''\neq b''$.

592*.
$$\begin{aligned} ax+by+cz+dt&=p,\\ -bx+ay+dz-ct&=q,\\ -cx-dy+az+bt&=r,\\ -dx+cy-bz+at&=s. \end{aligned}$$

593*.
$$\begin{gathered} x_n+a_1x_{n-1}+a_1^2x_{n-2}+\cdots+a_1^{n-1}x_1+a_1^n=0,\\ x_n+a_2x_{n-1}+a_2^2x_{n-2}+\cdots+a_2^{n-1}x_1+a_2^n=0,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ x_n+a_nx_{n-1}+a_n^2x_{n-2}+\cdots+a_n^{n-1}x_1+a_n^n=0, \end{gathered}$$

где $a_1,a_2,\dots,a_n$ — различные числа.

594.
$$\begin{gathered} x_1+x_2+\cdots+x_n=1,\\ a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b,\\ a_1^2x_1+a_2^2x_2+\cdots+a_n^2x_n=b^2,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ a_1^{n-1}x_1+a_2^{n-1}x_2+\cdots+a_n^{n-1}x_n=b^{n-1}, \end{gathered}$$

где $a_1,a_2,\dots,a_n$ — различные числа.

595.
$$\begin{gathered} x_1+a_1x_2+\cdots+a_1^{n-1}x_n=b_1,\\ x_1+a_2x_2+\cdots+a_2^{n-1}x_n=b_2,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ x_1+a_nx_2+\cdots+a_n^{n-1}x_n=b_n, \end{gathered}$$

где $a_1,a_2,\cdots,a_n$ — различные числа.

596.
$$\begin{aligned}
&x_1 + x_2 + \dots + x_n = b_1,\\
&a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b_2,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&a_1^{n-1}x_1 + a_2^{n-1}x_2 + \dots + a_n^{n-1}x_n = b_n,
\end{aligned}$$
где $a_1, a_2, \dots, a_n$ — различные числа.

597.
$$\begin{aligned}
&x_1 + x_2 + \dots + x_n + 1 = 0,\\
&2x_1 + 2^2x_2 + \dots + 2^nx_n + 1 = 0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&nx_1 + n^2x_2 + \dots + n^nx_n + 1 = 0,
\end{aligned}$$

598.
$$\begin{aligned}
&ax_1 + bx_2 + \dots + bx_n = c_1,\\
&bx_1 + ax_2 + \dots + bx_n = c_2,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&bx_1 + bx_2 + \dots + ax_n = c_n,
\end{aligned}$$
где $(a-b)[a+(n-1)b] \neq 0$.

599*.
$$\begin{aligned}
&(3+2a_1)x_1 + (3+2a_2)x_2 + \dots + (3+2a_n)x_n = 3+2b,\\
&(1+3a_1+2a_1^2)x_1 + (1+3a_2+2a_2^2)x_2 + \dots\\
&\qquad \dots + (1+3a_n+2a_n^2)x_n = 1+3b+2b^2,\\
&a_1(1+3a_1+2a_1^2)x_1 + a_2(1+3a_2+2a_2^2)x_2 + \dots\\
&\qquad \dots + a_n(1+3a_n+2a_n^2)x_n = b(1+3b+2b^2),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&a_1^{n-3}(1+3a_1+2a_1^2)x_1 + a_2^{n-3}(1+3a_2+2a_2^2)x_2 + \dots\\
&\qquad \dots + a_n^{n-3}(1+3a_n+2a_n^2)x_n = b^{n-3}(1+3b+2b^2),\\
&a_1^{n-2}(1+3a_1)x_1 + a_2^{n-2}(1+3a_2)x_2 + \dots\\
&\qquad \dots + a_n^{n-2}(1+3a_n)x_n = b^{n-2}(1+3b).
\end{aligned}$$

600*. Разлагая функцию $\dfrac{x}{\ln(1+x)}$ в степенной ряд, получим $\dfrac{x}{\ln(1+x)} = 1 + h_1x + h_2x^2 + h_3x^3 + \dots$.

Показать, что
$$h_n = \begin{vmatrix}
\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & \dots & 0\\
\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 & 0 & \dots & 0\\
\frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 & \dots & 0\\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\
\frac{1}{n+1} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-2} & \dots & \frac{1}{2}
\end{vmatrix}.$$

601. Известно, что $\dfrac{1}{\cos x} = 1 + \dfrac{e_1}{2!}x^2 + \dfrac{e_2}{4!}x^4 + \dfrac{e_3}{6!}x^6 + \cdots$, где $e_1, e_2, e_3, \ldots$ — так называемые числа Эйлера. Показать, что

$$e_n = (2n)! \begin{vmatrix} \frac{1}{2!} & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \frac{1}{4!} & \frac{1}{2!} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \frac{1}{6!} & \frac{1}{4!} & \frac{1}{2!} & 1 & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{(2n)!} & \frac{1}{(2n-2)!} & \frac{1}{(2n-4)!} & \frac{1}{(2n-6)!} & \ldots & \frac{1}{2!} \end{vmatrix}.$$

602*. В разложении $\dfrac{x}{e^x - 1} = 1 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \cdots$ коэффициент $b_{2n} = \dfrac{(-1)^{n-1}B_n}{(2n)!}$, где B_n — так называемые числа Бернулли.

Показать, что

$$B_n = (-1)^{n+1}(2n)! \begin{vmatrix} \frac{1}{2!} & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \frac{1}{4!} & \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & 1 & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{(2n+1)!} & \frac{1}{(2n)!} & \frac{1}{(2n-1)!} & \frac{1}{(2n-2)!} & \ldots & \frac{1}{2!} \end{vmatrix}.$$

Далее показать, что

$$b_{2n-1} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2!} & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \frac{1}{4!} & \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & 1 & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{(2n)!} & \frac{1}{(2n-1)!} & \frac{1}{(2n-2)!} & \frac{1}{(2n-3)!} & \ldots & \frac{1}{2!} \end{vmatrix} = 0$$

при $n > 1$.

603*. Показать, что число Бернулли B_n, введенное в предыдущей задаче, может быть выражено следующими определителями n-го порядка:

$$B_n = \frac{1}{2}(2n)! \begin{vmatrix} \frac{1}{3!} & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{3}{5!} & \frac{1}{3!} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{5}{7!} & \frac{1}{5!} & \frac{1}{3!} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{2n-1}{(2n+1)!} & \frac{1}{(2n-1)!} & \frac{1}{(2n-3)!} & \frac{1}{(2n-5)!} & \dots & \frac{1}{3!} \end{vmatrix}$$

или

$$B_n = 2^n(2n)! \begin{vmatrix} \frac{1}{4!} & \frac{1}{2!} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{2}{6!} & \frac{1}{4!} & \frac{1}{2!} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{3}{8!} & \frac{1}{6!} & \frac{1}{4!} & \frac{1}{2!} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{n}{(2n+2)!} & \frac{1}{(2n)!} & \frac{1}{(2n-2)!} & \frac{1}{(2n-4)!} & \dots & \frac{1}{4!} \end{vmatrix}.$$

604*. Обозначим через $s_n(k)$ сумму n-х степеней чисел натурального ряда от 1 до $k-1$, т. е. $s_n(k) = 1^n + 2^n + \dots + (k-1)^n$. Установив равенство

$$k^n = 1 + C_n^{n-1}s_{n-1}(k) + C_n^{n-2}s_{n-2}(k) + \dots + C_n^1 s_1(k) + s_0(k),$$

показать, что

$$s_{n-1}(k) = \frac{1}{n!}\begin{vmatrix} k^n & C_n^{n-2} & C_n^{n-3} & \dots & C_n^1 & 1 \\ k^{n-1} & C_{n-1}^{n-2} & C_{n-1}^{n-3} & \dots & C_{n-1}^1 & 1 \\ k^{n-2} & 0 & C_{n-2}^{n-3} & \dots & C_{n-2}^1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k^2 & 0 & 0 & \dots & C_2^1 & 1 \\ k & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

605*. Представить в виде определителя n-й коэффициент l_n разложения $\dfrac{\operatorname{tg} x}{x} = 1 + l_1x^2 + l_2x^4 + \dots + l_nx^{2n} + \dots$.

606. Представить в виде определителя n-й коэффициент f_n разложения $x \operatorname{ctg} x = 1 - f_1x^2 - f_2x^4 - \dots - f_nx^{2n} - \dots$.

607*. Выразив n-й коэффициент a_n разложения $e^{-x} = 1 - a_1x + a_2x^2 - a_3x^3 + \dots$ в виде определителя, найти отсюда значение определителя.

§ 10. Ранг матрицы. Линейная зависимость векторов и линейных форм

Найти ранг следующих матриц методом окаймления миноров:

608. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ **609.** $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$

610. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ **611.** $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -8 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & -5 \\ 8 & 6 & -1 & 4 & -6 \end{pmatrix}$

612. Найти значения λ, при которых матрица

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

имеет наименьший ранг.

Чему равен ранг при найденных λ и чему он равен при других значениях λ?

613. Чему равен ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

при различных значениях λ?

614. Пусть A — матрица ранга r и M_k — минор k-го порядка, стоящий в левом верхнем углу матрицы A. Доказать, что путем перестановок строк между собой и столбцов между собой можно добиться выполнения условий: $M_1 \neq 0$, $M_2 \neq 0, \ldots, M_r \neq 0$, тогда как все миноры, порядка больше чем r (если они вообще существуют), равны нулю.

615. *Элементарными преобразованиями матрицы* называются следующие преобразования:

1) умножение строки (столбца) на число, отличное от нуля;

2) прибавление к одной строке (столбцу) другой строки (столбца), умноженной на любое число;

3) перестановка двух строк (столбцов).

Доказать, что элементарные преобразования не изменяют ранга матрицы.

616. Доказать, что перестановку строк (столбцов) матрицы можно получить, выполняя преобразования строк и столбцов только типов 1), 2), указанных в предыдущей задаче.

617. Доказать, что любую матрицу ранга r элементарными преобразованиями, указанными в задаче 615, можно привести к виду, где элементы $a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{rr} = 1$, а остальные элементы равны нулю.

618. Доказать, что элементарными преобразованиями одних строк или одних столбцов квадратную матрицу можно привести к «треугольному» виду, где все элементы по одну сторону от главной диагонали равны нулю, причем нули можно получить по желанию либо сверху, либо снизу от главной диагонали.

Вычислить ранг следующих матриц при помощи элементарных преобразований:

619. $\begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix}$.   **620.** $\begin{pmatrix} 47 & -67 & 35 & 201 & 155 \\ 26 & 98 & 23 & -294 & 86 \\ 16 & -428 & 1 & 1284 & 52 \end{pmatrix}$.

621. $\begin{pmatrix} 24 & 19 & 36 & 72 & -38 \\ 49 & 40 & 73 & 147 & -80 \\ 73 & 59 & 98 & 219 & -118 \\ 47 & 36 & 71 & 141 & -72 \end{pmatrix}$.   **622.** $\begin{pmatrix} 17 & -28 & 45 & 11 & 39 \\ 24 & -37 & 61 & 13 & 50 \\ 25 & -7 & 32 & -18 & -11 \\ 31 & 12 & 19 & -43 & -55 \\ 42 & 13 & 29 & -55 & -68 \end{pmatrix}$.

623. Доказать, что если матрица содержит m строк и имеет ранг r, то любые s ее строк образуют матрицу, ранг которой не меньше $r+s-m$.

624. Доказать, что приписывание к матрице одной строки (или одного столбца) либо не изменяет ее ранга, либо увеличивает его на единицу.

625. Доказать, что вычеркивание одной строки (столбца) матрицы тогда и только тогда не изменяет ранга, когда вычеркнутая строка (столбец) линейно выражается через остальные строки (столбцы).

626. *Суммой двух матриц*, имеющих одинаковое число строк и одинаковое число столбцов, называется матрица, каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов данных матриц, т. е. $(a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$. Доказать, что ранг суммы двух матриц не больше суммы их рангов.

627. Доказать, что любую матрицу ранга r можно представить в виде суммы r матриц ранга единица, но нельзя представить в виде суммы менее чем r таких матриц.

628. Доказать, что если ранг матрицы A не изменяется от приписки к ней каждого столбца матрицы B с тем же числом строк, то он не меняется от приписки к матрице A всех столбцов матрицы B.

629.* Доказать, что если ранг матрицы A равен r, то минор d, стоящий на пересечении любых r линейно независимых строк и r линейно независимых столбцов этой матрицы, отличен от нуля.

630.* Пусть A — квадратная матрица порядка $n > 1$ и $\widehat{A}$ — матрица, взаимная (присоединенная) с матрицей A. Выяснить, как изменяется ранг $\hat{r}$ матрицы $\widehat{A}$ с изменением ранга r матрицы A.

631.* Доказать, что вычисление ранга симметрической матрицы сводится к вычислению одних только главных миноров, т. е. миноров, стоящих в строках и столбцах с соответственно равными номерами. Именно, доказать, что:

1) если в симметрической матрице A порядка n имеется главный минор M_r порядка r, отличный от нуля, для которого все окаймляющие его главные миноры $(r+1)$-го и $(r+2)$-го порядков равны нулю, то ранг матрицы A равен r (если все главные миноры равны нулю, то можно считать главный минор нулевого порядка M_0 равным единице, и теорема останется верной; при $r = n-1$ миноров порядка $r+2$ не существует, но утверждение теоремы верно, ибо ранг A равен $n-1$);

2) ранг симметрической матрицы равен наивысшему порядку отличных от нуля главных миноров этой матрицы.

632.* Пусть A — симметрическая матрица ранга r и M_k — минор k-го порядка, стоящий в левом верхнем углу матрицы A. (При $k = 0$ считаем $M_0 = 1$.) Доказать, что путем некоторой перестановки строк и соответствующей перестановки столбцов матрицы A можно добиться того, что в ряду миноров $M_0 = 1$, M_1, M_2, $\ldots$, M_r никакие два соседних не равны нулю и $M_r \neq 0$, все же миноры порядка выше r (если они существуют) равны нулю.

633.* Доказать, что ранг кососимметрической матрицы определяется ее главными минорами. Именно:

1) если существует главный минор порядка r, отличный от нуля, для которого все окаймляющие его главные миноры порядка $r+2$ равны 0, то ранг матрицы равен r;

2) ранг кососимметрической матрицы равен наивысшему порядку отличных от нуля главных миноров этой матрицы.

634.* Пусть A — кососимметрическая матрица ранга r и M_k — минор k-го порядка, стоящий в левом верхнем углу матрицы A $(M_0 = 1)$. Доказать, что путем некоторой перестановки строк и соответствующей перестановки столбцов матрицы A можно добиться того, что миноры M_0, M_2, $M_4, \ldots$, M_r отличны от нуля, а миноры M_1, $M_3, \ldots$, M_{r-1} и все миноры порядка выше r (если они существуют) равны нулю.

635. Доказать, что ранг кососимметрической матрицы — число четное.

636. Найти линейную комбинацию $3\boldsymbol{a}_1 + 5\boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}_3$ векторов

$$\boldsymbol{a}_1 = (4, 1, 3, -2), \boldsymbol{a}_2 = (1, 2, -3, 2), \boldsymbol{a}_3 = (16, 9, 1, -3).$$

637. Найти вектор $\boldsymbol{x}$ из уравнения

$$\boldsymbol{a}_1 + 2\boldsymbol{a}_2 + 3\boldsymbol{a}_3 + 4\boldsymbol{x} = 0,$$

где

$$\boldsymbol{a}_1 = (5, -8, -1, 2), \boldsymbol{a}_2 = (2, -1, 4, -3),$$
$$\boldsymbol{a}_3 = (-3, 2, -5, 4).$$

638. Найти вектор $\boldsymbol{x}$ из уравнения

$$3(\boldsymbol{a}_1 - x) + 2(\boldsymbol{a}_2 + x) = 5(\boldsymbol{a}_3 + x),$$

где

$$\boldsymbol{a}_1 = (2, 5, 1, 3), \boldsymbol{a}_2 = (10, 1, 5, 10), \boldsymbol{a}_3 = (4, 1, -1, 1).$$

Выяснить, являются ли следующие системы векторов линейно зависимыми или линейно независимыми:

639. $\boldsymbol{a}_1 = (1,\ 2,\ 3)$,
$\boldsymbol{a}_2 = (3,\ 6,\ 7)$.

640. $\boldsymbol{a}_1 = (4,\ -2,\ 6)$,
$\boldsymbol{a}_2 = (6,\ -3,\ 9)$.

641. $\boldsymbol{a}_1 = (2,\ -3,\ 1)$,
$\boldsymbol{a}_2 = (3,\ -1,\ 5)$,
$\boldsymbol{a}_3 = (1,\ -4,\ 3)$.

642. $\boldsymbol{a}_1 = (5,\ 4,\ 3)$,
$\boldsymbol{a}_2 = (3,\ 3,\ 2)$,
$\boldsymbol{a}_3 = (8,\ 1,\ 3)$.

643. $\boldsymbol{a}_1 = (4,\ -5,\ 2,\ 6)$,
$\boldsymbol{a}_2 = (2,\ -2,\ 1,\ 3)$,
$\boldsymbol{a}_3 = (6,\ -3,\ 3,\ 9)$,
$\boldsymbol{a}_4 = (4,\ -1,\ 5,\ 6)$.

644. $\boldsymbol{a}_1 = (1,\ 0,\ 0,\ 2,\ 5)$,
$\boldsymbol{a}_2 = (0,\ 1,\ 0,\ 3,\ 4)$,
$\boldsymbol{a}_3 = (0,\ 0,\ 1,\ 4,\ 7)$,
$\boldsymbol{a}_4 = (2,\ -3,\ 4,\ 11,\ 12)$.

645. Если из координат каждого вектора данной системы векторов одного и того же числа измерений выберем координаты, стоящие на определенных (одних и тех же для всех векторов) местах, сохраняя их порядок, то получим вторую систему векторов, которую будем называть *укороченной* для первой системы. Первую же систему будем называть *удлиненной* для второй. Доказать, что любая укороченная система для линейно зависимой системы векторов сама линейно зависима, а любая удлиненная система для линейно независимой системы векторов сама линейно независима.

646. Доказать, что система векторов, содержащая два равных вектора, линейно зависима.

647. Доказать, что система векторов, два вектора которой различаются скалярным множителем, линейно зависима.

648. Доказать, что система векторов, содержащая нулевой вектор, линейно зависима.

649. Доказать, что если часть системы векторов линейно зависима, то и вся система линейно зависима.

650. Доказать, что любая часть линейно независимой системы векторов сама линейно независима.

651*. Пусть дана система векторов

$$\boldsymbol{a}_i = (\alpha_{i,1}, \alpha_{i,2}, \ldots, \alpha_{i,n})(i = 1, 2, \ldots, s; s \leqslant n).$$

Доказать, что если $|\alpha_{jj}| > \sum\limits_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{s} |\alpha_{ij}|$, то данная система векторов линейно независима.

652. Доказать, что если три вектора $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ линейно зависимы и вектор $\boldsymbol{a}_3$ не выражается линейно через векторы $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$, то векторы $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$ различаются между собой лишь числовым множителем.

653. Доказать, что если векторы $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ линейно независимы, а векторы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, ..., $\boldsymbol{a}_k$, $\boldsymbol{b}$ линейно зависимы, то вектор $\boldsymbol{b}$ линейно выражается через векторы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, ..., $\boldsymbol{a}_k$.

654. Пользуясь предыдущей задачей, доказать, что каждый вектор данной системы векторов линейно выражается через любую линейно независимую подсистему этой системы, содержащую максимальное число векторов.

655. Доказать, что упорядоченная система векторов $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, ..., $\boldsymbol{a}_k$, отличных от нуля, тогда и только тогда линейно независима, когда ни один из этих векторов не выражается линейно через предыдущие.

656*. Доказать, что если к упорядоченной линейно независимой системе векторов $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, ..., $\boldsymbol{a}_k$ приписать впереди еще один вектор $\boldsymbol{b}$, то не более чем один вектор полученной системы будет линейно выражаться через предыдущие.

657*. Доказать, что если векторы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, ..., $\boldsymbol{a}_r$ линейно независимы и линейно выражаются через векторы $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, ..., $\boldsymbol{b}_s$, то $r \leqslant s$.

658*. *Базой данной системы векторов* называется такая ее подсистема, которая обладает следующими свойствами:

1) эта подсистема линейно независима;

2) любой вектор всей системы линейно выражается через векторы этой подсистемы.

Доказать, что:

а) все базы данной системы содержат одинаковое число векторов;

б) число векторов любой базы является максимальным числом линейно независимых векторов данной системы; это число называется рангом данной системы;

в) если данная система векторов имеет ранг r, то любые r линейно независимых векторов образуют базу этой системы.

659*. Доказать, что любую линейно независимую подсистему данной системы векторов можно дополнить до базы этой системы.

660. Две системы векторов называются *эквивалентными*, если каждый вектор одной системы линейно выражается через векторы другой системы и обратно. Доказать, что две эквивалентные линейно независимые системы содержат одинаковое число векторов.

661. Доказать, что если векторы $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ линейно выражаются через векторы $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_l$, то ранг первой системы не более ранга второй.

662. Даны векторы:

$$\begin{gathered}\boldsymbol{a}_1 = (0,1,0,2,0), \quad \boldsymbol{a}_2 = (7,4,1,8,3), \\ \boldsymbol{a}_3 = (0,3,0,4,0), \quad \boldsymbol{a}_4 = (1,9,5,7,1), \\ \boldsymbol{a}_5 = (0,1,0,5,0).\end{gathered}$$

Можно ли подобрать числа c_{ij} $(i, j = 1, 2, \ldots, 5)$ так, чтобы векторы

$$\begin{aligned}\boldsymbol{b}_1 &= c_{11}\boldsymbol{a}_1 + c_{12}\boldsymbol{a}_2 + c_{13}\boldsymbol{a}_3 + c_{14}\boldsymbol{a}_4 + c_{15}\boldsymbol{a}_5, \\ \boldsymbol{b}_2 &= c_{21}\boldsymbol{a}_1 + c_{22}\boldsymbol{a}_2 + c_{23}\boldsymbol{a}_3 + c_{24}\boldsymbol{a}_4 + c_{25}\boldsymbol{a}_5, \\ \boldsymbol{b}_3 &= c_{31}\boldsymbol{a}_1 + c_{32}\boldsymbol{a}_2 + c_{33}\boldsymbol{a}_3 + c_{34}\boldsymbol{a}_4 + c_{35}\boldsymbol{a}_5, \\ \boldsymbol{b}_4 &= c_{41}\boldsymbol{a}_1 + c_{42}\boldsymbol{a}_2 + c_{43}\boldsymbol{a}_3 + c_{44}\boldsymbol{a}_4 + c_{45}\boldsymbol{a}_5, \\ \boldsymbol{b}_5 &= c_{51}\boldsymbol{a}_1 + c_{52}\boldsymbol{a}_2 + c_{53}\boldsymbol{a}_3 + c_{54}\boldsymbol{a}_4 + c_{55}\boldsymbol{a}_5,\end{aligned}$$

были линейно независимы?

663. Доказать, что вектор $\boldsymbol{b}$ тогда и только тогда линейно выражается через векторы $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$, когда ранг последней системы векторов не изменяется от присоединения к ней вектора $\boldsymbol{b}$.

664*. Доказать, что:

1) две эквивалентные системы векторов имеют один и тот же ранг;

2) теорема, обратная утверждению 1), неверна.

Однако справедливо утверждение

3) если две системы векторов имеют одинаковый ранг и одна из этих систем линейно выражается через другую, то эти системы эквивалентны.

Найти все значения λ, при которых вектор $\boldsymbol{b}$ линейно выражается через векторы $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_s$:

665. $\boldsymbol{a}_1 = (2, 3, 5)$, $\boldsymbol{a}_2 = (3, 7, 8)$, $\boldsymbol{a}_3 = (1, -6, 1)$, $\boldsymbol{b} = (7, -2, \lambda)$.

666. $\boldsymbol{a}_1 = (4, 4, 3)$, $\boldsymbol{a}_2 = (7, 2, 1)$, $\boldsymbol{a}_3 = (4, 1, 6)$, $\boldsymbol{b} = (5, 9, \lambda)$.

667. $\boldsymbol{a}_1 = (3, 4, 2)$, $\boldsymbol{a}_2 = (6, 8, 7)$, $\boldsymbol{b} = (9, 12, \lambda)$.

668. $a_1 = (3,\ 2,\ 5),$
$a_2 = (2,\ 4,\ 7),$
$a_3 = (5,\ 6,\ \lambda),$
$b = (1,\ 3,\ 5).$

669. $a_1 = (3,\ 2,\ 6),$
$a_2 = (7,\ 3,\ 9),$
$a_3 = (5,\ 1,\ 3),$
$b = (\lambda,\ 2,\ 5).$

670. Пояснить ответы в задачах 665–669 с точки зрения расположения данных векторов в пространстве.

671. Пользуясь задачей 657, доказать, что более чем n n-мерных векторов всегда линейно зависимы.

672. Найти все максимальные линейно независимые подсистемы системы векторов:

$$a_1 = (4,\ -1,\ 3,\ -2),\quad a_2 = (8,\ -2,\ 6,\ -4),$$
$$a_3 = (3,\ -1,\ 4,\ -2),\quad a_4 = (6,\ -2,\ 8,\ -4).$$

Найти все базы системы векторов:

673. $a_1 = (1,\ 2,\ 0,\ 0),$
$a_2 = (1,\ 2,\ 3,\ 4),$
$a_3 = (3,\ 6,\ 0,\ 0).$

674. $a_1 = (1,\ 2,\ 3,\ 4),$
$a_2 = (2,\ 3,\ 4,\ 5),$
$a_3 = (3,\ 4,\ 5,\ 6),$
$a_4 = (4,\ 5,\ 6,\ 7).$

675. $a_1 = (2,\ 1,\ -3,\ 1),$
$a_2 = (4,\ 2,\ -6,\ 2),$
$a_3 = (6,\ 3,\ -9,\ 3),$
$a_4 = (1,\ 1,\ 1,\ 1).$

676. $a_1 = (1,\ 2,\ 3),$
$a_2 = (2,\ 3,\ 4),$
$a_3 = (3,\ 2,\ 3),$
$a_4 = (4,\ 3,\ 4),$
$a_5 = (1,\ 1,\ 1).$

677. В каком случае система векторов обладает единственной базой?

678. Сколько баз имеет система $k+1$ векторов ранга k, содержащая пропорциональные векторы, отличные от нуля?

Найти какую-нибудь базу системы векторов и все векторы системы, не входящие в данную базу, выразить через векторы базы:

679. $a_1 = (5,\ 2,\ -3,\ 1),$
$a_2 = (4,\ 1,\ -2,\ 3),$
$a_3 = (1,\ 1,\ -1,\ -2),$
$a_4 = (3,\ 4,\ -1,\ 2).$

680. $a_1 = (2,\ -1,\ 3,\ 5),$
$a_2 = (4,\ -3,\ 1,\ 3),$
$a_3 = (3,\ -2,\ 3,\ 4),$
$a_4 = (4,\ -1,\ 15,\ 17),$
$a_5 = (7,\ -6,\ -7,\ 0).$

681. $a_1 = (1,\ 2,\ 3,\ -4),$
$a_2 = (2,\ 3,\ -4,\ 1),$
$a_3 = (2,\ -5,\ 8,\ -3),$
$a_4 = (5,\ 26,\ -9,\ -12),$
$a_5 = (3,\ -4,\ 1,\ 2).$

682* Пусть дана система векторов $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, ..., $\boldsymbol{x}_n$ одного и того же числа измерений. *Основной системой* линейных соотношений этой системы векторов называется система соотношений вида

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j}\boldsymbol{x}_j = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, s),$$

обладающая такими двумя свойствами:

а) эта система соотношений линейно независима, что означает линейную независимость системы векторов

$$\boldsymbol{a}_i = (\alpha_{i,1}, \alpha_{i,2}, \ldots, \alpha_{i,n}) \quad (i = 1, 2, \ldots, s);$$

б) любая линейная зависимость векторов $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, ..., $\boldsymbol{x}_n$ является следствием соотношений данной системы, т. е. если $\sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j\boldsymbol{x}_j = 0$, то вектор $\boldsymbol{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n,)$ является линейной комбинацией векторов $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, ..., $\boldsymbol{a}_s$.

Доказать, что:

1) если $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, ..., $\boldsymbol{x}_r$ — база данной системы векторов и $\boldsymbol{x}_i = \sum\limits_{j=1}^{r} \lambda_{i,j}\boldsymbol{x}_j$, $i = r+1, r+2, \ldots, n$, то одной из основных систем линейных соотношений данной системы векторов будет система соотношений $\boldsymbol{x}_i - \sum\limits_{j=1}^{r} \lambda_{i,j}\boldsymbol{x}_j = 0$ $(i = r+1, r+2, \ldots, n)$;

2) все основные системы линейных соотношений содержат одинаковое число соотношений;

3) если какая-нибудь основная система линейных соотношений содержит s соотношений, то любая система s линейно независимых линейных соотношений той же системы векторов также является основной системой линейных соотношений;

4) если система соотношений $\sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{i,j}\boldsymbol{x}_j = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$ является основной системой линейных соотношений, то система соотношений $\sum\limits_{j=1}^{n} \beta_{i,j}\boldsymbol{x}_j = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$ будет основной системой линейных соотношений тогда и только тогда, когда, полагая $\boldsymbol{a}_i = (\alpha_{i,1}, \alpha_{i,2}, \ldots, \alpha_{i,n})$, $i = 1, 2, \ldots, s$, $\boldsymbol{b}_i = (\beta_{i,1}, \beta_{i,2}, \ldots, \beta_{i,n})$, $i = 1, 2, \ldots, s$, будем иметь

$$\boldsymbol{b}_i = \sum_{j=1}^{n} \gamma_{i,j}\boldsymbol{a}_j \quad (i = 1, 2, \ldots, s),$$

где коэффициенты $\gamma_{i,j}$ образуют определитель порядка s, отличный от нуля.

Пользуясь умножением матриц, последние s векторных равенств можно записать в виде одного матричного равенства

$$B = CA, \quad \text{где } A = (\alpha_{i,j})_{s,n},\ B = (\beta i, j)_{s,n} \text{ и } C = (\gamma_{i,j})_s,$$

C — невырожденная матрица порядка s.

Определив основную систему линейных соотношений для системы линейных форм аналогично тому, как это было сделано в задаче 682 для системы векторов, найти основную систему линейных соотношений для системы линейных форм:

683. $f_1 = 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4,$
$f_2 = 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 5x_4,$
$f_3 = 4x_1 - 3x_2 - 5x_3 - 7x_4,$
$f_4 = x_1 + 7x_3 + 11x_4.$

684. $f_1 = 8x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 5x_4,$
$f_2 = 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4,$
$f_3 = 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 3x_4,$
$f_4 = x_1 - x_2 - x_3 + 7x_4,$
$f_5 = 5x_2 + 4x_3 - 17x_4.$

685. $f_1 = 5x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + 4x_5,$
$f_2 = 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 + 5x_5,$
$f_3 = 6x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 + 7x_5,$
$f_4 = 7x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 + 4x_5.$

686. $f_1 = 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 5x_4,$
$f_2 = x_1 - 2x_2 + 7x_3 - 8x_4,$
$f_3 = 3x_1 - 4x_2 + x_3 - 2x_4,$
$f_4 = 4x_1 - 5x_2 + 6x_3 - 7x_4,$
$f_5 = 6x_1 - 7x_2 - x_4.$

687. $f_1 = 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 + 4x_5,$
$f_2 = 6x_1 + 4x_2 - 4x_3 - 2x_4 + 8x_5,$
$f_3 = 7x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 2x_4 + x_5,$
$f_4 = 4x_1 + 4x_2 - 4x_3 - 3x_4 + 5x_5,$
$f_5 = 8x_1 + 7x_2 - 5x_3 - 4x_4 + 2x_5.$

688*. Пусть дана система линейных форм

$$f_j = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} x_k \quad (j = 1, 2, \ldots, s) \tag{1}$$

и вторая система линейных форм, линейно зависящих от форм первой системы,

$$\varphi_i = \sum_{j=1}^{s} c_{ij} f_j \quad (i = 1, 2, \ldots, t). \tag{2}$$

Доказать, что ранг системы форм (2) не более ранга системы форм (1). Если $s = t$ и определитель $|c_{ij}|_s$ отличен от нуля, то ранги обеих систем линейных форм совпадают.

§ 11. Системы линейных уравнений

Исследовать совместность и найти общее решение и одно частное решение системы уравнений:

689. $$\begin{aligned} 2x_1+7x_2+3x_3+x_4&=6,\\ 3x_1+5x_2+2x_3+2x_4&=4,\\ 9x_1+4x_2+x_3+7x_4&=2. \end{aligned}$$

690. $$\begin{aligned} 2x_1-3x_2+5x_3+7x_4&=1,\\ 4x_1-6x_2+2x_3+3x_4&=2,\\ 2x_1-3x_2-11x_3-15x_4&=1. \end{aligned}$$

691. $$\begin{aligned} 3x_1+4x_2+x_3+2x_4&=3,\\ 6x_1+8x_2+2x_3+5x_4&=7,\\ 9x_1+12x_2+3x_3+10x_4&=13. \end{aligned}$$

692. $$\begin{aligned} 3x_1-5x_2+2x_3+4x_4&=2,\\ 7x_1-4x_2+x_3+3x_4&=5,\\ 5x_1+7x_2-4x_3-6x_4&=3. \end{aligned}$$

693. $$\begin{aligned} 2x_1+5x_2-8x_3&=8,\\ 4x_1+3x_2-9x_3&=9,\\ 2x_1+3x_2-5x_3&=7,\\ x_1+8x_2-7x_3&=12. \end{aligned}$$

694. $$\begin{aligned} 3x_1-2x_2+5x_3+4x_4&=2,\\ 6x_1-4x_2+4x_3+3x_4&=3,\\ 9x_1-6x_2+3x_3+2x_4&=4. \end{aligned}$$

695. $$\begin{aligned} 2x_1-x_2+3x_3-7x_4&=5,\\ 6x_1-3x_2+x_3-4x_4&=7,\\ 4x_1-2x_2+14x_3-31x_4&=18. \end{aligned}$$

696. $$\begin{aligned} 9x_1-3x_2+5x_3+6x_4&=4,\\ 6x_1-2x_2+3x_3+x_4&=5,\\ 3x_1-x_2+3x_3+14x_4&=-8. \end{aligned}$$

697. $$\begin{aligned} 3x_1+2x_2+2x_3+2x_4&=2,\\ 2x_1+3x_2+2x_3+5x_4&=3,\\ 9x_1+x_2+4x_3-5x_4&=1,\\ 2x_1+2x_2+3x_3+4x_4&=5,\\ 7x_1+x_2+6x_3-x_4&=7. \end{aligned}$$

698. $$\begin{aligned} x_1+x_2+3x_3-2x_4+3x_5&=1,\\ 2x_1+2x_2+4x_3-x_4+3x_5&=2,\\ 3x_1+3x_2+5x_3-2x_4+3x_5&=1,\\ 2x_1+2x_2+8x_3-3x_4+9x_5&=2. \end{aligned}$$

699. $$\begin{aligned} 2x_1-x_2+x_3+2x_4+3x_5&=2,\\ 6x_1-3x_2+2x_3+4x_4+5x_5&=3,\\ 6x_1-3x_2+4x_3+8x_4+13x_5&=9,\\ 4x_1-2x_2+x_3+x_4+2x_5&=1. \end{aligned}$$

700. $$\begin{aligned} 6x_1+4x_2+5x_3+2x_4+3x_5&=1,\\ 3x_1+2x_2+4x_3+x_4+2x_5&=3,\\ 3x_1+2x_2-2x_3+x_4&=-7,\\ 9x_1=6x_2+x_3+3x_4+2x_5&=2. \end{aligned}$$

701. $$\begin{aligned} x_1+2x_2+3x_3-2x_4+x_5&=4,\\ 3x_1+6x_2+5x_3-4x_4+3x_5&=5,\\ x_1+2x_2+7x_3-4x_4+x_5&=11,\\ 2x_1+4x_2+2x_3-3x_4+3x_5&=6. \end{aligned}$$

702. $$\begin{aligned} 6x_1+3x_2+2x_3+3x_4+4x_5&=5,\\ 4x_1+2x_2+x_3+2x_4+3x_5&=4,\\ 4x_1+2x_2+3x_3+2x_4+x_5&=0,\\ 2x_1+x_2+7x_3+3x_4+2x_5&=1. \end{aligned}$$

703. $$\begin{aligned} 8x_1+6x_2+5x_3+2x_4&=21,\\ 3x_1+3x_2+2x_3+x_4&=10,\\ 4x_1+2x_2+3x_3+x_4&=8,\\ 3x_1+5x_2+x_3+x_4&=15,\\ 7x_1+4x_2+5x_3+2x_4&=18. \end{aligned}$$

704. $$\begin{aligned} 2x_1+3x_2+x_3+2x_4&=4,\\ 4x_1+3x_2+x_3+x_4&=5,\\ 5x_1+11x_2+3x_3+2x_4&=2,\\ 2x_1+5x_2+x_3+x_4&=1,\\ x_1-7x_2-x_3+2x_4&=7. \end{aligned}$$

705*. Доказать, что

а) любую систему s линейных уравнений с n неизвестными, у которой матрица из коэффициентов при неизвестных имеет ранг r, путем изменения нумерации уравнений и неизвестных можно привести к виду

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad (i=1,2,\ldots,s), \tag{1}$$

обладающему свойствами

$$m_0=1,\ m_1\neq 0,\ m_2\neq 0,\ldots,m_r\neq 0, \tag{2}$$

где m_k — минор k-го порядка, стоящий в левом верхнем углу матрицы из коэффициентов при неизвестных системы (1);

б) систему уравнений (1), обладающую свойствами (2), путем ряда вычитаний ее уравнений, умноженных на подходящие числа, из последующих уравнений можно привести к эквивалентной системе

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_j = d_i \quad (i=1,2,\ldots,s), \tag{3}$$

обладающей свойствами

$$\left.\begin{array}{ll} c_{ii}\neq 0 & \text{при}\ \ i=1,2,\ldots,r,\\ c_{ij}=0 & \text{при}\ \ j<i\leqslant r,\ \text{а также}\\ & \text{при}\ \ i>r\ \text{и}\ j=1,2,\ldots,n. \end{array}\right\} \tag{4}$$

Если $d_i=0$ при $i=r+1,r+2,\ldots,s$, то системы (3) и (1) совместны, причем при $r=n$ имеется единственное решение, а при $r<n$ бесконечно много решений.

В последнем случае свободными неизвестными являются x_{r+1}, $\ldots$, x_n. Из r-го уравнения можно выразить x_r через свободные неизвестные. Вставляя это выражение в $(r-1)$-е уравнение, найдем выражение x_{r-1} через свободные неизвестные и т. д.

Наконец, из первого уравнения найдем выражение x_1 через свободные неизвестные.

Полученные выражения $x_1,x_2,\ldots,x_r$ через свободные неизвестные x_{r+1}, $\ldots$, x_n составляют общее решение систем (3) и (1). Это означает, что при любых значениях свободных неизвестных из найденных выражений получим решения систем (3) и (1) и любое решение этих систем может быть получено таким путем при подходящих значениях свободных неизвестных.

Если $d_i \neq 0$ хотя бы при одном значении $i > r$, то системы (3) и (1) несовместны.

Изложенный метод исследования и решения системы линейных уравнений называется методом исключения неизвестных (ср. с задачей 565).

Пользуясь методом исключения неизвестных, указанным в задаче 705, исследовать совместность и найти общее решение систем уравнений (если исходная система имеет целые коэффициенты, то в процессе исключения неизвестных можно избежать дробей):

706.
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 &= 3,\\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 &= 2,\\ 2x_1 + 9x_2 + 8x_3 + 3x_4 &= 7,\\ 3x_1 + 7x_2 + 7x_3 + 2x_4 &= 12,\\ 5x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 2x_4 &= 20. \end{aligned}$$

707.
$$\begin{aligned} 12x_1 + 14x_2 - 15x_3 + 23x_4 + 27x_5 &= 5,\\ 16x_1 + 18x_2 - 22x_3 + 29x_4 + 37x_5 &= 8,\\ 18x_1 + 20x_2 - 21x_3 + 32x_4 + 41x_5 &= 9,\\ 10x_1 + 12x_2 - 16x_3 + 20x_4 + 23x_5 &= 4. \end{aligned}$$

708.
$$\begin{aligned} 10x_1 + 23x_2 + 17x_3 + 44x_4 &= 25,\\ 15x_1 + 35x_2 + 26x_3 + 69x_4 &= 40,\\ 25x_1 + 57x_2 + 42x_3 + 108x_4 &= 65,\\ 30x_1 + 69x_2 + 51x_3 + 133x_4 &= 95. \end{aligned}$$

709.
$$\begin{aligned} 45x_1 - 28x_2 + 34x_3 - 52x_4 &= 9,\\ 36x_1 - 23x_2 + 29x_3 - 43x_4 &= 3,\\ 35x_1 - 21x_2 + 28x_3 - 45x_4 &= 16,\\ 47x_1 - 32x_2 + 36x_3 - 48x_4 &= -17,\\ 27x_1 - 19x_2 + 22x_3 - 35x_4 &= 6. \end{aligned}$$

710.
$$\begin{aligned} 12x_2 - 16x_3 + 25x_4 &= 29,\\ 27x_1 + 24x_2 - 32x_3 + 47x_4 &= 55,\\ 50x_1 + 51x_2 - 68x_3 + 95x_4 &= 115,\\ 31x_1 + 21x_2 - 28x_3 + 46x_4 &= 50. \end{aligned}$$

711.
$$\begin{aligned} 24x_1 + 14x_2 + 30x_3 + 40x_4 + 41x_5 &= 28,\\ 36x_1 + 21x_2 + 45x_3 + 61x_4 + 62x_5 &= 43,\\ 48x_1 + 28x_2 + 60x_3 + 82x_4 + 83x_5 &= 58,\\ 60x_1 + 35x_2 + 75x_3 + 99x_4 + 102x_5 &= 69. \end{aligned}$$

Исследовать систему и найти общее решение в зависимости от значения параметра λ:

712. $$\begin{aligned} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= 3,\\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 &= 1,\\ 8x_1 - 6x_2 - x_3 - 5x_4 &= 9,\\ 7x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 17x_4 &= \lambda. \end{aligned}$$

713. $$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 &= 3,\\ 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 8x_4 &= 5,\\ x_1 - 6x_2 - 9x_3 - 20x_4 &= -11,\\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 + \lambda x_4 &= 2. \end{aligned}$$

714. $$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 &= 2,\\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 5x_4 &= 4,\\ 4x_1 + 14x_2 + x_3 + 7x_4 &= 4,\\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + \lambda x_4 &= 7. \end{aligned}$$

715. $$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 5,\\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 &= 7,\\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 8x_4 &= 9,\\ \lambda x_1 - 4x_2 + 9x_3 + 10x_4 &= 11. \end{aligned}$$

716. $$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 &= 3,\\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 5,\\ 6x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 6x_4 &= 7,\\ 8x_1 + 12x_2 + 7x_3 + \lambda x_4 &= 9. \end{aligned}$$

717. $$\begin{aligned} \lambda x_1 + x_2 + x_3 &= 1,\\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 &= 1,\\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 &= 1. \end{aligned}$$

718. $$\begin{aligned} \lambda x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1,\\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 + x_4 &= 1,\\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 + x_4 &= 1,\\ x_1 + x_2 + x_3 + \lambda x_4 &= 1. \end{aligned}$$

719. $$\begin{aligned} (1+\lambda)x_1 + x_2 + x_3 &= 1,\\ x_1 + (1+\lambda)x_2 + x_3 &= \lambda,\\ x_1 + x_2 + (1+\lambda)x_3 &= \lambda^2. \end{aligned}$$

720. $$\begin{aligned} (\lambda+1)x_1 + x_2 + x_3 &= \lambda^2 + 3\lambda,\\ x_1 + (\lambda+1)x_2 + x_3 &= \lambda^3 + 3\lambda^2,\\ x_1 + x_2 + (\lambda+1)x_3 &= \lambda^4 + 3\lambda^3. \end{aligned}$$

Исследовать системы уравнений и найти общее решение в зависимости от значений входящих в коэффициенты параметров:

721. $$\begin{aligned} x + y + z &= 1,\\ ax + by + cz &= d,\\ a^2x + b^2y + c^2z &= d^2. \end{aligned}$$

722. $$\begin{aligned} ax + y + z &= 1,\\ x + by + z &= 1,\\ x + y + cz &= 1. \end{aligned}$$

В каком случае здесь возможны нулевые значения некоторых из неизвестных?

723*. $$\begin{aligned} ax + y + z &= a,\\ x + by + z &= b,\\ x + y + cz &= c. \end{aligned}$$

Найти общее решение и фундаментальную (или основную) систему решений для системы уравнений:

724. $$\begin{aligned} x_1+2x_2+4x_3-3x_4&=0,\\ 3x_1+5x_2+6x_3-4x_4&=0,\\ 4x_1+5x_2-2x_3+3x_4&=0,\\ 3x_1+8x_2+24x_3-19x_4&=0.\end{aligned}$$

725. $$\begin{aligned} 2x_1-4x_2+5x_3+3x_4&=0,\\ 3x_1-6x_2+4x_3+2x_4&=0,\\ 4x_1-8x_2+17x_3+11x_4&=0.\end{aligned}$$

726. $$\begin{aligned} 3x_1+2x_2+x_3+3x_4+5x_5&=0,\\ 6x_1+4x_2+3x_3+5x_4+7x_5&=0,\\ 9x_1+6x_2+5x_3+7x_4+9x_5&=0,\\ 3x_1+2x_2+4x_4+8x_5&=0.\end{aligned}$$

727. $$\begin{aligned} 3x_1+5x_2+2x_3&=0,\\ 4x_1+7x_2+5x_3&=0,\\ x_1+x_2-4x_3&=0,\\ 2x_1+9x_2+6x_3&=0.\end{aligned}$$

728. $$\begin{aligned} 6x_1-2x_2+2x_3+5x_4+7x_5&=0,\\ 9x_1-3x_2+4x_3+8x_4+9x_5&=0,\\ 6x_1-2x_2+6x_3+7x_4+x_5&=0,\\ 3x_1-x_2+4x_3+4x_4-x_5&=0.\end{aligned}$$

729. $$\begin{aligned} x_1-x_3&=0,\\ x_2-x_4&=0,\\ -x_1+x_3-x_5&=0,\\ -x_2+x_4-x_6&=0,\\ -x_3+x_5&=0,\\ -x_4+x_6&=0.\end{aligned}$$

730. $$\begin{aligned} x_1-x_3+x_5&=0,\\ x_2-x_4+x_6&=0,\\ x_1-x_2+x_5-x_6&=0,\\ x_2-x_3+x_6&=0,\\ x_1-x_4+x_5&=0.\end{aligned}$$

731. $$\begin{aligned} 5x_1+6x_2-2x_3+7x_4+4x_5&=0,\\ 2x_1+3x_2-x_3+4x_4+2x_5&=0,\\ 7x_1+9x_2-3x_3+5x_4+6x_5&=0,\\ 5x_1+9x_2-3x_3+x_4+6x_5&=0.\end{aligned}$$

732. $$\begin{aligned} 3x_1+4x_2+x_3+2x_4+3x_5&=0,\\ 5x_1+7x_2+x_3+3x_4+4x_5&=0,\\ 4x_1+5x_2+2x_3+x_4+5x_5&=0,\\ 7x_1+10x_2+x_3+6x_4+5x_5&=0.\end{aligned}$$

733. Доказать, что для любой однородной системы линейных уравнений с рациональными (в частности, с целыми) коэффициентами можно построить целочисленную фундаментальную систему решений (при условии, что ранг матрицы коэффициентов меньше числа неизвестных).

4—3773

734. Доказать, что для системы уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, s) \tag{1}$$

ранга $r < n$ любые $n - r$ линейно независимых решений

$$\begin{gathered} \alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{1n}, \\ \alpha_{21}, \alpha_{22}, \ldots, \alpha_{2n}, \\ \alpha_{n-r,1}, \alpha_{n-r,2}, \ldots, \alpha_{n-r,n} \end{gathered}$$

образуют фундаментальную систему решений, а общее решение можно представить в виде

$$x_j = \sum_{k=1}^{n-r} c_k \alpha_{kj} \quad (j = 1, 2, \ldots, n), \tag{2}$$

где c_1, c_2, $\ldots$, c_{n-r} — произвольные параметры. Иными словами, доказать, что при любых значениях параметров c_1, c_2, $\ldots$, c_{n-r} формулы (2) дают решение системы (1), и любое решение системы (1) можно получить из формул (2) при подходящих значениях параметров c_1, c_2, $\ldots$, c_{n-r}.

Для следующих систем уравнений найти общее решение вида (2) из предыдущей задачи, где каждое неизвестное представлено однородным линейным выражением от параметров с целыми коэффициентами:

735. $\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 4x_3 &= 0, \\ 3x_1 + 5x_2 - 7x_3 &= 0, \\ 4x_1 - 5x_2 - 6x_3 &= 0. \end{aligned}$

736. $\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 5x_3 + 7x_4 &= 0, \\ 4x_1 - 2x_2 + 7x_3 + 5x_4 &= 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 5x_4 &= 0. \end{aligned}$

737. $\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 7x_5 &= 0, \\ 6x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 4x_4 + 5x_5 &= 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 - 11x_5 &= 0, \\ 6x_1 + 4x_2 + x_3 + 4x_4 - 13x_5 &= 0. \end{aligned}$

738. $\begin{aligned} 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 9x_5 &= 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 6x_4 + 3x_5 &= 0, \\ 6x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 20x_4 + 3x_5 &= 0, \\ 9x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 15x_5 &= 0. \end{aligned}$

739. $\begin{aligned} 2x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 8x_5 &= 0, \\ 4x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 5x_4 + 4x_5 &= 0, \\ x_1 - 9x_2 - 3x_3 - 5x_4 - 14x_5 &= 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 5x_4 + 6x_5 &= 0. \end{aligned}$

740. $$\begin{aligned} 3x_1+4x_2+3x_3+\ \ 9x_4+\ \ 6x_5&=0,\\ 9x_1+8x_2+5x_3+\ \ 6x_4+\ \ 9x_5&=0,\\ 3x_1+8x_2+7x_3+30x_4+15x_5&=0,\\ 6x_1+6x_2+4x_3+\ \ 7x_4+\ \ 5x_5&=0. \end{aligned}$$

741. Выяснить, образуют ли строки каждой из матриц

$$A=\begin{pmatrix} 30 & -24 & 43 & -50 & -5\\ 9 & -15 & 8 & 5 & 2\\ 4 & 2 & 9 & -20 & -3 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 9 & -20 & -3\\ 1 & -11 & 2 & 13 & 4\\ 9 & -15 & 8 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

фундаментальную систему решений для системы уравнений

$$\begin{aligned} 3x_1+4x_2+2x_3+\ x_4+\ \ 6x_5&=0,\\ 5x_1+9x_2+7x_3+4x_4+\ \ 7x_5&=0,\\ 4x_1+3x_2-\ x_3-\ x_4+11x_5&=0,\\ x_1+6x_2+8x_3+5x_4-\ \ 4x_5&=0. \end{aligned}$$

742. Определить, какие из строк матрицы

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 & -2 & -7\\ 5 & 3 & 7 & -6 & -4\\ 8 & 0 & -5 & 6 & 13\\ 4 & -2 & -7 & -5 & -7 \end{pmatrix}$$

образуют фундаментальную систему решений для системы уравнений

$$\begin{aligned} 2x_1-5x_2+3x_3+2x_4+\ x_5&=0,\\ 5x_1-8x_2+5x_3+4x_4+3x_5&=0,\\ x_1-7x_2+4x_3+2x_4\qquad\ &=0,\\ 4x_1-\ x_2+\ x_3+2x_4+3x_5&=0. \end{aligned}$$

743*. Доказать, что если в общее решение однородной системы линейных уравнений ранга r с n неизвестными, где $r<n$, вместо свободных неизвестных подставить числа поочередно из каждой строки определителя порядка $n-r$, отличного от нуля, и найти соответствующие значения остальных неизвестных, то получится фундаментальная система решений, и, обратно, любую фундаментальную систему решений данной системы уравнений можно получить таким путем при подходящем выборе определителя порядка $n-r$, отличного от нуля.

744. Пусть строки матрицы

$$A=\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \alpha_{p1} & \alpha_{p2} & \dots & \alpha_{pn} \end{pmatrix}$$

образуют фундаментальную систему решений однородной системы линейных уравнений ранга r с n неизвестными $(n = r + p)$. Доказать, что строки матрицы

$$B = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{p1} & \beta_{p2} & \dots & \beta_{pn} \end{pmatrix}$$

тогда и только тогда также образуют фундаментальную систему решений той же системы уравнений, когда существует невырожденная матрица p-го порядка

$$C = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \dots & \gamma_{1p} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \dots & \gamma_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{p1} & \gamma_{p2} & \dots & \gamma_{pp} \end{pmatrix}$$

такая, что

$$\beta_{ik} = \sum_{j=1}^{p} \gamma_{ij} \alpha_{jk} \quad (i = 1, 2, \dots, p, \ k = 1, 2, \dots, n).$$

Пользуясь матричным умножением, эти равенства можно записать одним равенством $B = CA$.

745. Показать, что задача 743 является частным случаем задачи 744.

746. Доказать, что если ранг однородной системы линейных уравнений на единицу меньше числа неизвестных, то любые два решения этой системы пропорциональны, т. е. отличаются лишь числовым множителем (быть может, равным нулю).

747. Пользуясь теорией однородных систем линейных уравнений, решить задачу 509, т. е. доказать, что если определитель D порядка $n > 1$ равен нулю, то алгебраические дополнения соответствующих элементов двух любых строк (столбцов) пропорциональны.

748*. Доказать, что если в однородной системе линейных уравнений число уравнений на единицу меньше числа неизвестных, то в качестве решения можно принять систему миноров, полученных из матрицы коэффициентов поочередным вычеркиванием 1-го, 2-го и т. д. столбцов, причем эти миноры берутся с чередующимися знаками.

Далее, показать, что если это решение не нулевое, то любое решение получается из него умножением на некоторое число.

Пользуясь результатом предыдущей задачи, найти частное и общее решения систем уравнений:

749. $5x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0,$
$6x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 0.$

750. $4x_1 - 6x_2 + 5x_3 = 0,$
$6x_1 - 9x_2 + 10x_3 = 0.$

751. $2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 0,$
$3x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 7x_4 = 0,$
$3x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 = 0.$

752. $8x_1 - 5x_2 - 6x_3 + 3x_4 = 0,$
$4x_1 - x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0,$
$12x_1 - 7x_2 - 9x_3 + 5x_4 = 0.$

753. Доказать, что для того, чтобы система линейных уравнений с числом уравнений, на единицу бо́льшим числа неизвестных, была совместна, необходимо (но не достаточно), чтобы определитель, составленный из всех коэффициентов при неизвестных и свободных членов, был равен нулю. Показать, что это условие будет также и достаточным, если ранг матрицы из коэффициентов равен числу неизвестных.

754. Пусть даны: система линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, s),$$

два решения этой системы $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, и $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ и число λ. Найти систему линейных уравнений с теми же коэффициентами при неизвестных, как в данной системе, имеющую решением

а) сумму данных решений:

$$\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \ldots, \alpha_n + \beta_n,$$

или

б) произведение первого из данных решений на число λ:

$$\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \ldots, \lambda\alpha_n.$$

755. Найти условия, необходимые и достаточные для того, чтобы либо сумма двух решений, либо произведение одного решения на число $\lambda \neq 1$ было снова решением той же системы линейных уравнений.

756. При каких условиях данная линейная комбинация любых решений данной неоднородной системы линейных уравнений снова будет решением этой системы?

757. Какие значения могут принимать неизвестные в любых решениях совместной системы линейных уравнений, если столбцы коэффициентов при всех неизвестных, кроме первого, а также столбец свободных членов попарно различаются лишь числовыми множителями?

758. При каких условиях в любом решении совместной системы линейных уравнений неизвестное x_k имеет одно и то же значение?

759. Найти условия, необходимые и достаточные для того, чтобы в любом решении совместной системы линейных уравнений k-е неизвестное было равно нулю.

760. При каких условиях в общем решении системы уравнений

$$\begin{aligned} y + az + bt &= 0, \\ -x \qquad + cz + dt &= 0, \\ ax + cy \qquad - et &= 0, \\ bx + dy + ez \qquad &= 0 \end{aligned}$$

за свободные неизвестные можно принять z и t?

761. Сколько независимых между собой условий должно быть выполнено для того, чтобы система s линейных уравнений с n неизвестными была совместна и содержала r независимых уравнений, для которых остальные уравнения являлись бы их следствиями?

762. При каких условиях система уравнений

$$\begin{aligned} x &= by + cz + du + ev, \\ y &= cz + du + ev + ax, \\ z &= du + ev + ax + by, \\ u &= ev + ax + by + cz, \\ v &= ax + by + cz + du \end{aligned}$$

имеет ненулевое решение?

763*. При каких условиях система линейных уравнений с вещественными коэффициентами

$$\begin{aligned} \lambda x + ay + bz + ct &= 0, \\ -ax + \lambda y + hz - gt &= 0, \\ -bx - hy + \lambda z + ft &= 0, \\ -cx + gy - fz + \lambda t &= 0 \end{aligned}$$

имеет ненулевое решение?

Пользуясь теорией линейных уравнений, решить следующие задачи (рассматриваются только прямоугольные декартовы системы координат):

764. Найти условия, необходимые и достаточные для того, чтобы три точки (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) лежали на одной прямой.

765. Написать уравнение прямой, проходящей через две точки (x_1, y_1), (x_2, y_2).

766. Найти условия, необходимые и достаточные для того, чтобы три прямые

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1 &= 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 &= 0, \\ a_3x + b_3y + c_3 &= 0 \end{aligned}$$

проходили через одну точку.

767. Найти необходимые и достаточные условия для того, чтобы n точек плоскости (x_1, y_1), (x_2, y_2), $\ldots$, (x_n, y_n) лежали на одной прямой.

768. Найти необходимые и достаточные условия для того, чтобы n прямых на плоскости

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1 &= 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 &= 0, \\ \dots\dots&\dots\dots \\ a_nx + b_ny + c_n &= 0 \end{aligned}$$

проходили через одну точку.

769. Найти условия, необходимые и достаточные для того, чтобы четыре точки плоскости (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4), не лежащие на одной прямой, лежали на одной окружности.

770. Написать уравнение окружности, проходящей через три точки (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), не лежащие на одной прямой.

771. Написать уравнение окружности, проходящей через три точки $(1, 2)$, $(1, -2)$, $(0, -1)$, и найти ее центр и радиус.

772*. Доказать, что окружность, проходящая через три точки с рациональными координатами, имеет центр в точке также с рациональными координатами.

773. Написать уравнение кривой второго порядка, проходящей через пять точек:

$$(x_1, y_1),\ (x_2, y_2),\ (x_3, y_3),\ (x_4, y_4),\ (x_5, y_5).$$

774. Найти уравнение и определить вид кривой второго порядка, проходящей через пять точек:

$$(3, 0),\ (-3, 0),\ (5, 6\tfrac{2}{3}),\ (5, -6\tfrac{2}{3}), (-5, -6\tfrac{2}{3}).$$

775. Написать уравнение и определить положение и размеры кривой второго порядка, проходящей через пять точек:

$$(0, 1),\ (\pm 2, 0),\ (\pm 1, -1).$$

776. Найти условие, необходимое и достаточное для того, чтобы четыре точки (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), (x_4, y_4, z_4) лежали в одной плоскости.

777. Написать уравнение плоскости, проходящей через три точки

$$(1, 1, 1),\ (2, 3, -1),\ (3, -1, -1).$$

778. Найти условия, необходимые и достаточные для того, чтобы четыре плоскости

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 &= 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 &= 0, \\ a_3x + b_3y + c_3z + d_3 &= 0, \\ a_4x + b_4y + c_4z + d_4 &= 0 \end{aligned}$$

проходили через одну точку.

779. Найти условия, необходимые и достаточные для того, чтобы n плоскостей $a_i x + b_i y + c_i z + d_i = 0$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ проходили через одну прямую, но не сливались в одну плоскость.

780. Написать уравнение сферы, проходящей через четыре точки (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), (x_4, y_4, z_4), не лежащие в одной плоскости.

781. Написать уравнение и найти центр и радиус сферы, проходящей через точки: $(1, 1, 1)$, $(1, 1, -1)$, $(1, -1, 1)$, $(-1, 0, 0)$.

782. Какая система линейных уравнений задает три различные прямые на плоскости, проходящие через одну точку?

783. Какая система линейных уравнений задает три прямые на плоскости, образующие треугольник?

784. Какая система линейных уравнений задает три плоскости пространства, не имеющие общих точек, но пересекающиеся попарно?

785. Какая система линейных уравнений задает четыре плоскости пространства, образующие тетраэдр?

786. Указать геометрическую интерпретацию системы четырех линейных уравнений с тремя неизвестными, в которой ранги всех матриц из коэффициентов при неизвестных трех уравнений и ранг расширенной матрицы равны трем?

787. Рассмотреть все возможные случаи, встречающиеся при решении систем линейных уравнений с двумя и тремя неизвестными, и в каждом случае дать геометрическую интерпретацию данной системы уравнений.

Отдел 3

МАТРИЦЫ И КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

§ 12. Действия с матрицами

Вычислить произведения матриц:

788. $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$. **789.** $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$.

790. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. **791.** $\begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix}$.

792. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & 4 & -3 \\ 5 & -3 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 8 & 6 & 9 \\ 5 & 7 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

793. $\begin{pmatrix} 5 & 7 & -3 & -4 \\ 7 & 6 & -4 & -5 \\ 6 & 4 & -3 & -2 \\ 8 & 5 & -6 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$.

794. $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$.

795. $\begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 & -3 \\ 6 & 4 & -3 & 5 \\ 9 & 2 & -3 & 4 \\ 7 & 6 & -4 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & -5 & 3 & 11 \\ 16 & 24 & 8 & -8 \\ 8 & 16 & 0 & -16 \end{pmatrix}$.

796. $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -28 & 93 \\ 38 & -126 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

797. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 70 & 34 & -107 \\ 52 & 26 & -68 \\ 101 & 50 & -140 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 27 & -18 & 10 \\ -46 & 31 & -17 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

798. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -5 & -3 & -4 & 4 \\ 5 & 1 & 4 & -3 \\ -16 & -11 & -15 & 14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -2 & 3 & 4 \\ 11 & 0 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 3 & 0 \\ 22 & 2 & 9 & 8 \end{pmatrix}$.

Вычислить выражения:

799. $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}^3$. **800.** $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}^5$.

801. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^n$. **802.** $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^n$.

803. $$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & 0 \\ & \lambda_2 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ 0 & & & & \lambda_n \end{pmatrix}^n,$$

где нули обозначают, что все элементы матрицы, стоящие вне главной диагонали, равны нулю.

804. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$. **805.** $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^n$.

806. $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}^3.$$ **807.** $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}^{n-1}$$

(порядок данной матрицы равен n).

808. Вычислить $\begin{pmatrix} 17 & -6 \\ 35 & -12 \end{pmatrix}^5$, используя равенство

$$\begin{pmatrix} 17 & -6 \\ 35 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

809. Вычислить $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 4 & -3 \end{pmatrix}^6$, используя равенство

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -5 & 4 \end{pmatrix}.$$

810. Доказать, что если для матриц A и B оба произведения AB и BA существуют, причем $AB = BA$, то матрицы A и B квадратные и имеют одинаковый порядок.

811. Как изменится произведение AB матриц A и B, если:

а) переставить i-ю и j-ю строки матрицы A?

б) к i-й строке матрицы A прибавить j-ю строку, умноженную на число c?

в) переставить i-й и j-й столбцы матрицы B?

г) к i-му столбцу матрицы B прибавить j-й столбец, умноженный на число c?

812. Пользуясь предыдущей задачей и неизменностью ранга при элементарных преобразованиях (см. задачу 615), доказать, что ранг произведения двух матриц не более ранга каждого сомножителя.

813. Доказать, что ранг произведения нескольких матриц не более ранга каждой из перемножаемых матриц.

814. *Следом* квадратной матрицы называется сумма элементов, стоящих на главной диагонали. Доказать, что след AB равен следу BA.

815. Доказать, что если A и B — квадратные матрицы одного и того же порядка, причем $AB \neq BA$, то:

а) $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$;

б) $(A+B)(A-B) \neq A^2 - B^2$.

816. Доказать, что если $AB = BA$, то

$$(A+B)^n = A^n + nA^{n-1}B + \frac{n(n-1)}{2}A^{n-2}B^2 + \dots + B^n.$$

Здесь A и B — квадратные матрицы одинакового порядка.

817. Доказать, что любую квадратную матрицу A можно представить, и притом единственным образом, в виде $A = B + C$, где B — симметрическая, а C — кососимметрическая матрицы.

818. Матрицы A и B называются *перестановочными*, если $AB = BA$. Квадратная матрица A называется *скалярной*, если все ее элементы главной диагонали равны между собой, т. е. если $A = cE$, где c — число, а E — единичная матрица. Доказать утверждение: для того чтобы квадратная матрица A была перестановочна со всеми квадратными матрицами того же порядка, необходимо и достаточно, чтобы матрица A была скалярной.

819. Квадратная матрица называется *диагональной*, если все ее элементы, стоящие вне главной диагонали, равны нулю. Доказать утверждение: для того чтобы квадратная матрица A была перестановочна со всеми диагональными матрицами, необходимо и достаточно, чтобы матрица A сама была диагональной.

820. Доказать, что если A — диагональная матрица и все элементы ее главной диагонали различны между собой, то любая матрица, перестановочная с A, также диагональна.

821. Доказать, что умножение матрицы A слева на диагональную матрицу $B = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ вызывает умножение строк A соответственно на $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, умножение же A на B справа вызывает аналогичное изменение столбцов.

Найти все матрицы, перестановочные с матрицей:

822. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. **823.** $\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$. **824.** $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. **825.** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

826. Найти все числа c, умножение на которые невырожденной матрицы A не изменяет ее определителя.

827. Найти значение многочлена $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$ от матрицы
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

828. Найти значение многочлена $f(x) = x^3 - 7x^2 + 13x - 5$ от матрицы
$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

829. Доказать, что матрица $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ удовлетворяет уравнению
$$x^2 - (a+d)x + ad - bc = 0.$$

830*. Доказать, что для любой квадратной матрицы A существует многочлен $f(x)$, отличный от нулевого и такой, что $f(A) = 0$, причем все такие многочлены делятся на один из них, определенный однозначно условием, что его старший коэффициент равен единице (он называется минимальным многочленом матрицы A).

831*. Доказать, что равенство $AB - BA = E$ не выполняется ни для каких матриц A и B.

832. Найти все матрицы второго порядка, квадрат которых равен нулевой матрице.

833*. Пусть A — матрица второго порядка и k — целое число, большее двух. Доказать, что $A^k = 0$ тогда и только тогда, когда $A^2 = 0$.

834. Найти все матрицы второго порядка, квадраты которых равны единичной матрице.

835. Исследовать уравнение $AX = 0$, где A — данная и X — искомая матрицы второго порядка.

Найти обратные матрицы для следующих матриц:

836. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. **837.** $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$. **838.** $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

839. $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$. **840.** $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

841. $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$. **842.** $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$. **843.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

844. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. **845.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}$.

846. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$. **847.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

848. $\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 & \dots & a^n \\ 0 & 1 & a & a^2 & \dots & a^{n-1} \\ 0 & 0 & 1 & a & \dots & a^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

849. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a & 1 \end{pmatrix}$ (порядок матрицы равен $n+1$).

850. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \dots & n-3 & n-2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

851. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{pmatrix}$. **852.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

853. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

854. $\begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+a \end{pmatrix}$ (порядок матрицы равен n).

855. $\begin{pmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+a_n \end{pmatrix}$.

856. Показать, что вычисление матрицы, обратной к данной матрице порядка n, можно свести к решению n систем линейных уравнений, каждая из которых содержит n уравнений с n неизвестными и имеет матрицей коэффициентов при неизвестных матрицу A.

Пользуясь методом задачи 856, найти обратные матрицы для следующих матриц:

857. $\begin{pmatrix} 3 & 3 & -4 & -3 \\ 0 & 6 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

858*. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ n & 1 & 2 & \dots & n-2 & n-1 \\ n-1 & n & 1 & \dots & n-3 & n-2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n & 1 \end{pmatrix}$.

859. $\begin{pmatrix} a & a+h & a+2h & \dots & a+(n-2)h & a+(n-1)h \\ a+(n-1)h & a & a+h & \dots & a+(n-3)h & a+(n-2)h \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a+h & a+2h & a+3h & \dots & a+(n-1)h & a \end{pmatrix}$.

860*. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \varepsilon^3 & \dots & \varepsilon^{n-1} \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon^4 & \varepsilon^6 & \dots & \varepsilon^{2(n-1)} \\ 1 & \varepsilon^3 & \varepsilon^6 & \varepsilon^9 & \dots & \varepsilon^{3(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \varepsilon^{n-1} & \varepsilon^{2(n-1)} & \varepsilon^{3(n-1)} & \dots & \varepsilon^{(n-1)^2} \end{pmatrix}$, где $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$.

Решить матричные уравнения:

861. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$.

862. $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$.

863. $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$.

864. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}$.

865. $X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix}$.

866. $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 18 & 12 & 9 \\ 23 & 15 & 11 \end{pmatrix}$.

867. $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$.

868. $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 9 & 18 \end{pmatrix}$.

869. $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

870. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 7 \\ 1 & 11 & 7 \\ 7 & 5 & 7 \end{pmatrix}$.

871. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 1 \\ \multicolumn{5}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ 0 & 1 & 2 & \ldots & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & n-2 \\ \multicolumn{5}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$.

872. Как изменится обратная матрица A^{-1}, если в данной матрице A:

а) переставить i-ю и j-ю строки?

б) i-ю строку умножить на число c, не равное нулю?

в) к i-й строке прибавить j-ю, умноженную на число c, или совершить аналогичное преобразование столбцов?

873. Целочисленная квадратная матрица называется *унимодулярной*, если ее определитель равен ± 1. Доказать, что целочисленная матрица тогда и только тогда имеет целочисленную обратную матрицу, когда данная матрица унимодулярна.

874. Доказать, что матричное уравнение $AX = B$ разрешимо тогда и только тогда, когда ранг матрицы A равен рангу матрицы (A, B), получаемой из A приписыванием к ней справа матрицы B.

875. Показать, что матричное уравнение $AX = 0$, где A — квадратная матрица, имеет нулевое решение тогда и только тогда, когда $|A| = 0$.

876. Пусть A и B — неособенные матрицы одного и того же порядка. Показать, что четыре равенства:

$$AB = BA, \quad AB^{-1} = B^{-1}A, \quad A^{-1}B = BA^{-1}, \quad A^{-1}B^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

равносильны между собой.

877. Пусть A — квадратная матрица и $f(x)$ и $g(x)$ — любые многочлены. Показать, что матрицы $f(A)$ и $g(A)$ перестановочны, т. е. $f(A)g(A) = g(A)f(A)$.

878. Пусть A — квадратная матрица и $r(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ — рациональная функция от x. Показать, что значение $r(A)$ функции $r(x)$ при $x = A$ определено однозначно тогда и только тогда, когда $|g(A)| \neq 0$.

879. Найти матрицу A^{-1}, обратную для матрицы $A = \begin{pmatrix} E_k & U \\ 0 & E_l \end{pmatrix}$, где E_k и E_l — единичные матрицы соответственно порядков k и l, U — произвольная (k, l)-матрица (т. е. матрица из k строк и l столбцов), а все остальные элементы равны нулю.

880. Квадратная матрица $H_k = (h_{ij})$ порядка n называется k-м *косым рядом порядка* n, элементы которой определяются равенствами

$$h_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } j - i = k, \\ 0 & \text{при } j - i \neq k \end{cases} \qquad (k = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm(n-1)).$$

Показать, что $H_1^k = H_k$, $H_{-1}^k = H_{-k}$, если $k = 1, 2, \ldots, n-1$; $H_1^k = H_{-1}^k = 0$, если $k \geqslant n$.

881. Как изменится матрица A при умножении ее слева или справа на матрицу H_1 или на H_{-1} предыдущей задачи?

882. Показать, что операция транспонирования матрицы обладает свойствами:

а) $(A + B)' = A' + B'$; б) $(AB)' = B'A'$;

в) $(cA)' = cA'$; г) $(A^{-1})' = (A')^{-1}$,

где c — число, а A и B — матрицы.

883. Доказать, что если A и B — симметрические квадратные матрицы одинакового порядка, то матрица $C = ABAB \ldots ABA$ является симметрической.

884. Показать, что:

а) матрица, обратная к неособенной симметрической, будет симметрической;

б) матрица, обратная к неособенной кососимметрической, будет кососимметрической.

885. Показать, что для любой матрицы B матрица $A = BB'$ является симметрической.

886. Пусть $A^* = \overline{A}'$ — матрица, полученная из A путем транспонирования и заменой всех элементов на числа комплексно сопряженные. Показать, что:

а) $(A + B)^* = A^* + B^*$; б) $(AB)^* = B^*A^*$;

в) $(cA)^* = \bar{c}A^*$; г) $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$,

где c — число, а A и B — матрицы, над которыми выполнима соответствующая операция.

887. Матрица A называется *эрмитовой*, если $A^* = A$. Показать, что для любой матрицы B с комплексными или вещественными элементами матрица $A = B \cdot B^*$ является эрмитовой.

888. Показать, что произведение двух симметрических матриц тогда и только тогда будет матрицей симметрической, когда данные матрицы перестановочны.

889. Показать, что произведение двух кососимметрических матриц тогда и только тогда будет матрицей симметрической, когда данные матрицы перестановочны.

890*. Доказать, что произведение двух кососимметрических матриц A и B тогда и только тогда будет кососимметрической матрицей, когда $AB = -BA$.

Привести примеры кососимметрических матриц, удовлетворяющих условию $AB = -BA$.

891. Квадратная матрица $A = (a_{ij})$ порядка n называется *ортогональной*, если $AA' = E$, где E — единичная матрица. Показать, что для ортогональности квадратной матрицы A необходимо и достаточно любое из следующих условий:

а) столбцы A образуют ортонормированную систему, т. е.

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}a_{kj} = \delta_i^j,$$

где δ_i^j — символ Кронекера, обозначающий 1 при $i = j$ и 0 при $i \neq j$;

б) строки A образуют ортонормированную систему, т. е.

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{jk} = \delta_i^j.$$

892. Квадратная матрица $A = (a_{ij})$ порядка n с вещественными или комплексными элементами называется *унитарной*, если $AA^* = E$ (смысл обозначения A^* тот же, что и в задаче 886). Показать, что для унитарности квадратной матрицы A необходимо и достаточно любое из следующих условий:

а) $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ki}\overline{a}_{kj} = \delta_i^j$,

б) $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}\overline{a}_{jk} = \delta_i^j$

(δ_i^j — символ Кронекера).

893. Доказать, что определитель ортогональной матрицы равен ± 1.

894. Доказать, что определитель унитарной матрицы по модулю равен единице.

895. Доказать, что если ортогональная матрица A имеет на главной диагонали квадратные клетки $A_1, A_2, \ldots, A_s$ и нули по одну сторону от этих клеток, то все элементы по другую сторону от них также равны нулю и все матрицы $A_1, A_2, \ldots, A_s$ ортогональны.

896. Доказать, что для ортогональности квадратной матрицы A необходимо и достаточно, чтобы ее определитель был равен ± 1 и каждый ее элемент был равен своему алгебраическому дополнению, взятому со своим знаком, если $|A| = 1$, и с противоположным, если $|A| = -1$.

897.* Доказать, что вещественная квадратная матрица A порядка $n \geqslant 3$ будет ортогональна, если каждый ее элемент равен своему алгебраическому дополнению и хотя бы один из элементов отличен от нуля.

898.* Доказать, что вещественная квадратная матрица A порядка $n \geqslant 3$ будет ортогональна, если каждый ее элемент равен своему алгебраическому дополнению, взятому с противоположным знаком, и хотя бы один из элементов отличен от нуля.

899.* Доказать, что сумма квадратов всех миноров второго порядка, лежащих в двух строках (или столбцах) ортогональной матрицы, равна единице.

900.* Доказать, что сумма квадратов модулей всех миноров второго порядка, лежащих в двух строках (или столбцах) унитарной матрицы, равна единице.

901.* Доказать, что сумма квадратов всех миноров k-го порядка, лежащих в любых k строках (столбцах) ортогональной матрицы, равна единице.

902.* Доказать, что сумма квадратов модулей всех миноров k-го порядка, лежащих в любых k строках (столбцах) унитарной матрицы, равна единице.

903.* Доказать, что минор любого порядка ортогональной матрицы A равен своему алгебраическому дополнению, взятому с его знаком, если $|A| = 1$, и с противоположным знаком, если $|A| = -1$.

904.* Пусть A — унитарная матрица, M — ее минор любого порядка, M_A — алгебраическое дополнение минора M в матрице A. Доказать, что $M_A = |A| \cdot \overline{M}$, где $\overline{M}$ — число, сопряженное с M.

905. При каких условиях диагональная матрица является ортогональной?

906. При каких условиях диагональная матрица является унитарной?

907. Проверить, что любое из трех свойств квадратной матрицы: вещественность, ортогональность, унитарность — вытекает из двух остальных.

908. Квадратная матрица I называется *инволютивной*, если $I^2 = E$. Показать, что каждое из трех свойств квадратной матрицы: симметрия, ортогональность, инволютивность — вытекает из двух остальных.

909. Проверить, что матрицы

$$\text{а)} \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 1/3 & -2/3 \\ -2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}; \quad \text{б)} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

обладают всеми тремя свойствами предыдущей задачи.

910. Квадратная матрица P называется *идемпотентной*, если $P^2 = P$. Показать, что если P идемпотентна, то $I = 2P - E$ инволютивна, и наоборот, если I инволютивна, то $P = \frac{1}{2}(I + E)$ идемпотентна.

911. Доказать, что:

а) произведение двух ортогональных матриц будет ортогональной матрицей;

б) матрица, обратная к ортогональной матрице, ортогональна.

912. Доказать, что:

а) произведение двух унитарных матриц будет унитарной матрицей;

б) матрица, обратная к унитарной матрице, унитарна.

913*. Минор матрицы A, стоящий на пересечении строк с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_p$ и столбцов с номерами $j_1, j_2, \ldots, j_p$ будем обозначать через $A\begin{pmatrix} i_1, & i_2, & \ldots, & i_p \\ j_1, & j_2, & \ldots, & j_p \end{pmatrix}$.

Доказать справедливость следующего выражения миноров произведения $C = AB$ двух матриц через миноры перемножаемых матриц:

$$C\begin{pmatrix} i_1, & i_2, & \ldots, & i_p \\ j_1, & j_2, & \ldots, & j_p \end{pmatrix} =$$
$$= \sum_{1 \leqslant k_1 < k_2 < \ldots < k_p \leqslant n} A\begin{pmatrix} i_1, & i_2, & \ldots, & i_p \\ k_1, & k_2, & \ldots, & k_p \end{pmatrix} B\begin{pmatrix} k_1, & k_2, & \ldots, & k_p \\ j_1, & j_2, & \ldots, & j_p \end{pmatrix}$$

$$(i_1 < i_2 < \ldots < i_p; \quad j_1 < j_2 < \ldots < j_p),$$

если p не превосходит ни числа столбцов матрицы A, ни числа строк матрицы B. В противном случае все миноры порядка p матрицы C равны нулю.

914. Пользуясь предыдущей задачей, доказать, что ранг произведения двух матриц не более ранга каждого сомножителя.

915*. Доказать, что умножение матрицы A слева или справа на невырожденную матрицу не изменяет ее ранга.

916. Главным минором матрицы A называется минор, стоящий в пересечении строк и столбцов с одинаковыми номерами. Показать, что если элементы матрицы B вещественны, то все главные миноры $A = BB'$ неотрицательны.

917. Показать, что для любой матрицы B с комплексными или вещественными элементами все главные миноры матрицы $A = BB^*$ неотрицательны. Здесь $B^* = \overline{B}'$.

918. Показать, что если в обозначениях предыдущей задачи $A = BB^*$, то ранг A равен рангу B.

919. Доказать, что сумма главных миноров k-го порядка матрицы AA' равна сумме квадратов всех миноров k-го порядка матрицы A.

920*. Доказать, что для любых квадратных матриц A и B порядка n сумма всех главных миноров данного порядка $k(1 \leqslant k \leqslant n)$ для матриц AB и BA одинакова.

921*. Пусть A — вещественная матрица порядка n, B и C — матрицы из первых k и последних $n-k$ столбцов A. Доказать, что $|A^2| \leqslant |B'B| \cdot |C'C|$.

922*. Пусть $A = (B, C)$ — вещественная матрица (смысл символа (B, C) указан в задаче 874). Доказать, что $|A'A| \leqslant |B'B| \cdot |C'C|$.

923*. Пусть $A = (a_{ij})$ — квадратная вещественная матрица порядка n. Доказать неравенство Адамара:

$$|A^2| \leqslant \prod_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ik}^2.$$

924*. Доказать, что для любой вещественной прямоугольной матрицы $A = (a_{ij})$ с n строками и m столбцами выполняется неравенство

$$|A'A| \leqslant \prod_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} a_{ik}^2.$$

925*. Пусть $A = (B, C)$ — матрица с комплексными элементами. Доказать, что $|A^* \cdot A| \leqslant |B^* \cdot B| \cdot |C^* \cdot C|$.

926*. Пусть $A = (a_{ij})$ — квадратная матрица порядка n с комплексными элементами, не превосходящими по модулю числа M. Доказать, что модуль определителя $|A|$ не превосходит $M^n \cdot n^{n/2}$, причем эта оценка является точной.

927*. Показать, что каждое элементарное преобразование матрицы A, т. е. преобразование одного из следующих типов:

а) перестановка двух строк (столбцов);

б) умножение строки (столбца) на число c, отличное от нуля;

в) прибавление к одной строке (столбцу) другой строки (столбца), умноженной на любое число c,

может быть получено умножением матрицы A на некоторую особенную матрицу P слева для преобразования строк и справа для преобразования столбцов. Найти вид этих матриц.

928.* Квадратная матрица называется *треугольной*, если все ее элементы, стоящие по одну сторону от главной диагонали, равны нулю. Показать, что любую квадратную матрицу можно представить в виде произведения нескольких треугольных матриц.

929.* Показать, что любую матрицу A ранга r можно представить в виде произведения $A = PRQ$, где P и Q — неособенные матрицы, а R — прямоугольная матрица тех же размеров, что и A, на главной диагонали которой первые r элементов равны единице, все же остальные элементы равны нулю.

930.* Пусть A — матрица размеров $m \times n$ и ранга r, $P = (p_{ij})$ — матрица размеров $s \times m$, у которой $p_{11} = p_{22} = \ldots = p_{kk} = 1$, а все остальные элементы — нули, $Q = (q_{ij})$ — матрица размеров $n \times t$, у которой $q_{11} = q_{22} = \ldots = q_{ll} = 1$, а все остальные элементы — нули. Доказать неравенства:

а) ранг $PA \geqslant k + r - m$;

б) ранг $AQ \geqslant l + r - n$;

в) ранг $PAQ \geqslant k + l + r - m - n$.

931.* Обозначим ранг матрицы A через r_A. Доказать, что для ранга произведения AB двух квадратных матриц A и B порядка n имеет место следующее неравенство:

$$r_A + r_B - n \leqslant r_{AB} \leqslant r_A, r_B \quad \text{(неравенство Сильвестера).}$$

932. Показать, что для ранга произведения AB прямоугольных матриц A и B имеет место неравенство Сильвестера предыдущей задачи при условии, что n обозначает число столбцов матрицы A и число строк матрицы B.

933.* Показать, что любую невырожденную матрицу A элементарными преобразованиями только строк (или только столбцов) можно привести к единичной матрице E. Если совершенные над A элементарные преобразования в том же порядке применить к единичной матрице E, то в результате получится матрица A^{-1}, обратная для A.

Пользуясь приемом предыдущей задачи, найти обратные матрицы для следующих матриц (для удобства вычислений приписать к данной матрице A справа единичную матрицу и выполнять элементарные преобразования строк, приводящие A к E, над строками всей написанной матрицы):

934. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 3 & 8 & 0 & -4 \\ 2 & 2 & -4 & -3 \\ 3 & 8 & -1 & -6 \end{pmatrix}$. **935.** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$. **936.** $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 7 & 6 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

937. Пользуясь методом задачи 933, найти обратные матрицы для матриц задач 844, 846, 847, 848, 849, 850.

938*. Доказать утверждение:

Для того чтобы матрица A из m строк и n столбцов имела ранг единицу, необходимо и достаточно, чтобы A представлялась в виде $A = BC$, где B — ненулевой столбец длины m, C — ненулевая строка длины n.

939*. Доказать утверждение:

Для того чтобы матрица A из m строк и n столбцов имела ранг r, необходимо и достаточно, чтобы A представлялась в виде $A = BC$, где B — матрица из m строк и r линейно независимых столбцов, а C — матрица из r линейно независимых строк и n столбцов.

940. Показать, что если A и B — квадратные матрицы порядка n и $AB = 0$, то $r_A + r_B \leqslant n$, причем для любой данной матрицы A матрицу B можно выбрать так, чтобы было $r_A + r_B = k$, где k — любое целое число, удовлетворяющее условию $r_A \leqslant k \leqslant n$.

941*. Показать, что если A — квадратная матрица порядка n, для которой $A^2 = E$, то $r_{E+A} + r_{E-A} = n$.

942. Две целочисленные матрицы называются эквивалентными, если от одной из них к другой можно перейти путем целочисленных элементарных преобразований, т. е. преобразований следующих типов:

а) перестановка двух строк;

б) умножение строки на -1;

в) прибавление к одной строке другой, умноженной на целое число c, и аналогичных преобразований для столбцов. Доказать, что матрицы A и B тогда и только тогда эквивалентны, когда $B = PAQ$, где P и Q — квадратные целочисленные, унимодулярные матрицы.

943*. Прямоугольная целочисленная матрица A называется *нормальной*, если ее элементы $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{rr}$ положительны, a_{ii} делится на $a_{i-1,i-1}$ $(i = 2, 3, \ldots, r)$, а все остальные элементы равны нулю. Показать, что каждая целочисленная матрица эквивалентна одной и только одной нормальной матрице; иными словами, каждый класс эквивалентных между собой целочисленных матриц содержит нормальную матрицу и притом только одну.

944*. Доказать, что каждую неособенную целочисленную матрицу A можно представить в виде $A = PR$, где P — унимодулярная, целочисленная матрица, а R — треугольная целочисленная матрица, элементы которой на главной диагонали положительны, ниже главной диагонали равны нулю, а выше главной диагонали — неотрицательны и меньше элементов главной диагонали того же столбца, причем такое представление единственно.

945* Доказать, что квадратную матрицу A порядка n и ранга r можно представить в виде $A = PR$, где P — неособенная матрица и R — треугольная матрица, в которой первые r элементов главной диагонали равны единице, а все элементы ниже главной диагонали и все элементы последних $n - r$ строк равны нулю.

946* Квадратная матрица называется *верхней (нижней)* треугольной, если все элементы, стоящие ниже (соответственно выше) главной диагонали, равны нулю. Показать, что следующие операции: сложение двух матриц, умножение матрицы на число, умножение двух матриц и переход к обратной матрице для неособенной матрицы, примененные к верхним (нижним) треугольным матрицам, приводят снова к верхней (нижней) треугольной матрице.

947. Квадратная матрица называется *нильпотентной*, если некоторая ее степень равна нулю. Наименьшее целое положительное число k, для которого $A^k = 0$, называется *показателем нильпотентности* матрицы A. Показать, что треугольная матрица тогда и только тогда нильпотентна, когда все элементы главной диагонали равны нулю, а показатель нильпотентности треугольной матрицы не превосходит ее порядка.

948. Показать, что обратная матрица $B = (b_{ik})$ для верхней (нижней) треугольной неособенной матрицы $A = (a_{ik})$ порядка n будет снова верхней (нижней) треугольной матрицей, причем элементы главной диагонали матрицы B определяются равенствами $b_{ii} = \dfrac{1}{a_{ii}}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, а остальные элементы находятся из рекуррентных соотношений:

а) для элементов i-й строки верхней треугольной матрицы

$$b_{ik} = \frac{-\sum\limits_{j=i}^{k-1} b_{ij}a_{jk}}{a_{kk}} \quad (k = i + 1, i + 2, \ldots, n);$$

б) для элементов k-го столбца нижней треугольной матрицы

$$b_{ik} = \frac{-\sum\limits_{j=k}^{i-1} a_{ij}b_{jk}}{a_{ii}} \quad (i = k + 1, k + 2, \ldots, n).$$

Этими формулами удобно пользоваться для вычисления матриц, обратных к треугольным матрицам.

949*. Пусть A — квадратная матрица порядка n и ранга r, причем

$$d_k = A\begin{pmatrix} 1, & 2, & \dots, & k \\ 1, & 2, & \dots, & k \end{pmatrix} \neq 0 \quad (k = 1, 2, \dots, r). \tag{1}$$

Доказать, что при этих условиях матрицу A можно представить в виде произведения

$$A = BC, \tag{2}$$

где $B = (b_{ij})$ — нижняя и $C = (c_{ij})$ — верхняя треугольные матрицы (определение верхней и нижней треугольных матриц дано в задаче 946).

Первым r диагональным элементам матриц B и C можно дать любые значения, удовлетворяющие условиям

$$b_{kk}c_{kk} = \frac{d_k}{d_{k-1}} \quad (k = 1, 2, \dots, r;\ d_0 = 1). \tag{3}$$

Задание первых r диагональных элементов матриц B и C однозначно определяет остальные элементы первых r столбцов матрицы B и первых r строк матрицы C, причем эти элементы задаются формулами

$$\begin{gathered} b_{ik} = b_{kk}\frac{A\begin{pmatrix} 1, 2, \dots, k-1, i \\ 1, 2, \dots, k-1, k \end{pmatrix}}{d_k}, \\ c_{ki} = c_{kk}\frac{A\begin{pmatrix} 1, 2, \dots, k-1, k \\ 1, 2, \dots, k-1, i \end{pmatrix}}{d_k}, \\ (i = k+1, k+2, \dots, n; \quad k = 1, 2, \dots, r). \end{gathered} \tag{4}$$

В случае $r < n$ в последних $n - r$ столбцах матрицы B все элементы можно положить равными нулю, а в последних $n - r$ строках матрицы C элементы считать произвольными или, наоборот, в последних $n - r$ столбцах матрицы B элементы считать произвольными, а в последних $n - r$ строках матрицы C все элементы положить равными нулю.

Произвольные элементы не нарушат равенства (2). Их можно выбрать так, чтобы сохранить треугольный вид матриц B и C.

950. Показать, что представление (2) предыдущей задачи можно найти так: первые r элементов на главной диагонали матриц B и C выбрать любыми, удовлетворяющими условиям (3), а остальные элементы первых r столбцов B и первых r строк C вычислить с помощью рекуррентных соотношений

$$b_{ik} = \frac{a_{ik} - \sum\limits_{j=1}^{k-1} b_{ij}c_{jk}}{c_{kk}} \quad (i = k+1, k+2, \dots, n; \quad k = 1, 2, \dots, r);$$

$$c_{ik} = \frac{a_{ik} - \sum\limits_{j=1}^{i-1} b_{ij}c_{jk}}{b_{ii}} \quad (k = i+1, i+2, \ldots, n; \quad i = 1, 2, \ldots, r).$$

Эти формулы позволяют найти сначала первый столбец B и первую строку C, затем, зная $k-1$ столбцов B и $k-1$ строк C, найти k-й столбец B и k-ю строку C.

951*. Доказать, что любую симметрическую матрицу $A = (a_{ij})$ порядка n и ранга r, удовлетворяющую условиям (1) задачи 949, можно представить в виде $A = BB'$, где B — нижняя треугольная матрица, элементы последних $n-r$ столбцов которой равны нулю, а элементы первых r столбцов определяются формулами

$$b_{ik} = \frac{A\begin{pmatrix} 1, & 2, & \ldots, & k-1, & i \\ 1, & 2, & \ldots, & k-1, & k \end{pmatrix}}{\sqrt{d_k \cdot d_{k-1}}}$$
$$(i = k, k+1, \ldots, n; \quad k = 1, 2, \ldots, r).$$

952. Матрица A называется *клеточной* (или *блочной*), если ее элементы одной или несколькими горизонтальными и вертикальными линиями распределены по прямоугольным клеткам (блокам). Эти клетки будем обозначать через A_{ij}, где i — номер клеточной строки и j — номер клеточного столбца. Показать, что умножение двух клеточных матриц тогда и только тогда сводится к умножению клеток, рассматриваемых как отдельные элементы, когда вертикальное деление первой матрицы соответствует горизонтальному делению второй. Именно, если $A = (A_{ij})$ – (m, n)-матрица с делением строк на группы по $m_1, m_2, \ldots, m_s$ и столбцов по $n_1, n_2, \ldots, n_t$ и $B = (B_{ij})$ – (n, p)-матрица с делением строк на группы по $n_1, n_2, \ldots, n_t$ и столбцов по $p_1, p_2, \ldots, p_u$, то $AB = C = (C_{ij})$ будет также клеточной матрицей, причем

$$C_{ik} = \sum_{j=1}^{t} A_{ij}B_{jk} \quad (i = 1, 2, \ldots, s; \quad k = 1, 2, \ldots, u).$$

Применяя указанное правило умножения клеточных матриц, найти клетки произведения следующих матриц при указанном подразделении на клетки для сомножителей:

$$A = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ \hline 4 & -2 & 1 \end{array}\right), \quad B = \left(\begin{array}{c|cc} 2 & 3 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

953. Показать, что для выполнимости умножения двух клеточных квадратных матриц достаточно (но, как показывает пример предыдущей задачи, не необходимо), чтобы диагональные клетки были квадратными, причем порядки соответствующих диагональных клеток были равны между собой.

954*. Показать, что для выполнимости клеточного умножения клеточной матрицы на себя необходимо и достаточно, чтобы все ее диагональные клетки были квадратными.

955. Квадратная клеточная матрица $A = (A_{ij})$ называется *клеточно-треугольной*, если все ее клетки на главной диагонали, т. е. $A_{11}, A_{22}, \ldots$ квадратные, а все клетки, стоящие по одну сторону от главной диагонали, равны нулю. Показать, что если A и B — две клеточно-треугольные матрицы с одинаковыми порядками соответствующих диагональных клеток и нулями по одну сторону от диагонали, то их произведение AB также будет клеточно-треугольной матрицей с такими же порядками диагональных клеток и нулями по ту же сторону от диагонали.

956. Показать, что клеточно-треугольная матрица тогда и только тогда нильпотентна, когда нильпотентны все ее клетки на главной диагонали (определение нильпотентности дано в задаче 947).

957. Пусть $A = (A_{ij})$ — клеточная матрица, причем A_{ij} — клетка размеров $m_i \times n_j$ ($i = 1, 2, \ldots, s$, $j = 1, 2, \ldots, t$). Показать, что прибавление к i-й клеточной строке j-й строки, умноженной слева на прямоугольную матрицу X размеров $m_i \times m_j$, может быть получено путем умножения A слева на неособенную квадратную клеточную матрицу P. Точно так же прибавление к i-му клеточному столбцу j-го столбца, умноженного справа на прямоугольную матрицу Y размеров $n_j \times n_i$, может быть получено путем умножения A справа на неособенную квадратную клеточную матрицу Q. Найти вид матриц P и Q.

958*. Пусть $R = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ — клеточная матрица, где A — неособенная квадратная матрица порядка n. Доказать, что ранг R равен n тогда и только тогда, когда $D = CA^{-1}B$.

959*. Пусть A — неособенная матрица порядка n, B — матрица размеров $n \times q$, C — матрица размеров $p \times n$. Доказать, что если клеточную матрицу $R = \begin{pmatrix} A & B \\ -C & 0 \end{pmatrix}$ привести к виду $R_1 = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ 0 & X \end{pmatrix}$ путем ряда элементарных преобразований строк, причем в каждом преобразовании либо участвуют только первые n строк, либо к какой-нибудь строке с номером, большим n, прибавляется одна из первых n строк, умноженная на число, то $X = CA^{-1}B$.

960. Пусть A — неособенная матрица порядка n и E — единичная матрица того же порядка. Доказать, что если клеточную матрицу $\begin{pmatrix} A & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$

элементарными преобразованиями, указанными в предыдущей задаче, привести к виду $\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ 0 & X \end{pmatrix}$, то $X = A^{-1}$. Найти этим методом обратную матрицу для $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 7 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$.

961. Пусть дана система уравнений

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

с неособенной матрицей коэффициентов A, B — столбец свободных членов и E — единичная матрица порядка n.

Показать, что, если клеточную матрицу $\begin{pmatrix} A & B \\ -E & 0 \end{pmatrix}$ преобразованиями, указанными в задаче 959, привести к виду $\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ 0 & X \end{pmatrix}$, столбец X дает решение данной системы уравнений.

Решить этим методом систему

$$\begin{aligned} 3x - y + 2z &= 7, \\ 4x - 3y + 2z &= 4, \\ 2x + y + 3z &= 13. \end{aligned}$$

962. Пусть A — неособенная матрица порядка n, B — матрица размеров $n \times p$, E — единичная матрица порядка n. Показать, что если матрицу $\begin{pmatrix} A & B \\ -E & 0 \end{pmatrix}$ преобразованиями, указанными в задаче 959, привести к виду $\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ 0 & X \end{pmatrix}$, то матрица X дает решение матричного уравнения $AX = B$.

Решить этим методом указанное уравнение, если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

963*. Пусть все пары (i, j) $(i = 1, 2, \dots, m;\ j = 1, 2, \dots, n)$ занумерованы в некотором определенном порядке $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{mn}$. *Кронекеровским* (или *прямым*) произведением двух квадратных матриц A порядка m и B порядка n называется матрица $C = A \times B$ порядка mn, составленная из всевозможных произведений элементов матриц A и B в надлежащем порядке. Именно, элемент матрицы C, стоящий в i-й строке и j-м столбце, определяется так:

$$c_{ij} = a_{i_1 j_1} b_{i_2 j_2}, \quad \text{где} \quad (i_1, i_2) = \alpha_i, \quad (j_1, j_2) = \alpha_j.$$

Доказать, что:

а) $(A + B) \times C = (A \times C) + (B \times C)$;

б) $A \times (B + C) = (A \times B) + (A \times C)$;

в) $(AB) \times (CD) = (A \times C)(B \times D)$.

964.* *Правым прямым произведением* квадратных матриц A порядка m и B порядка n называется клеточная матрица $A \times^{\cdot} B = C = (C_{ij})$, где $C_{ij} = a_{ij}B$ $(i, j = 1, 2, \ldots, m)$. Аналогично, *левым прямым произведением* тех же матриц называется клеточная матрица $A \,{}^{\cdot}\!\times B = D = (D_{ij})$, где $D_{ij} = Ab_{ij}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$.

Доказать, что:

а) оба введенных произведения являются частными случаями кронекеровского произведения, определенного в предыдущей задаче. Найти порядок нумерации пар (i, j), дающий правое и левое прямые произведения;

б) $A \times^{\cdot} B = B \,{}^{\cdot}\!\times A$;

в) $A \times^{\cdot} (B \times^{\cdot} C) = (A \times^{\cdot} B) \times^{\cdot} C$;

г) если E_k — единичная матрица порядка k, то $E_m \times^{\cdot} E_n = E_n \times^{\cdot} E_m = E_{mn}$;

д) если A и B — неособенные матрицы, то $(A \times^{\cdot} B)^{-1} = A^{-1} \times^{\cdot} B^{-1}$.

Для левого произведения справедливы свойства, аналогичные свойствам в), г), д).

965.* Пользуясь двумя предыдущими задачами, доказать, что если A — матрица порядка m и B — порядка n, то $|A \times B| = |A|^n \times |B|^m$ (см. задачу 540).

966.* Пусть $A = (a_{ij})$ — квадратная матрица порядка n. Матрицей, *взаимной* с A (*или присоединенной* к A), называется матрица $\widehat{A} = (\hat{a}_{ij})$, где $\hat{a}_{ij} = A_{ji}$ $(i, j = 1, 2, , \ldots, n)$. Иными словами, матрица, взаимная с A, получается транспонированием матрицы, составленной из алгебраических дополнений элементов матрицы A.

Доказать, что:

а) $A\widehat{A} = \widehat{A}A = |A|E$, где E — единичная матрица;

б) $(\widehat{\widehat{A}}) = |A|^{n-2}A$ при $n > 2$, $(\widehat{\widehat{A}}) = A$ при $n = 2$.

967.* Показать, что $\widehat{(AB)} = \widehat{B} \cdot \widehat{A}$, где $\widehat{A}$ — матрица, взаимная с A, определенная в предыдущей задаче.

968.* Матрицей, *ассоциированной* с квадратной матрицей A порядка n, называется матрица $\widetilde{A} = (\tilde{a}_{ij})$, где $\tilde{a}_{ij}$ — минор элемента a_{ij} матрицы A. Доказать, что:

а) $\widetilde{(AB)} = \widetilde{A}\widetilde{B}$;

б) $(\widetilde{\widetilde{A}}) = |A|^{n-2}A$ при $n > 2$, $(\widetilde{\widetilde{A}}) = A$ при $n = 2$.

969.* Пусть $A = (a_{ij})$ — квадратная матрица порядка n, и пусть все сочетания из n чисел $1, 2, \ldots, n$ по p чисел $k_1 < k_2 < \ldots < k_p$ занумерованы в каком-либо порядке $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$, где $N = C_n^p$. Матрица $A_p = (A_{i,j;p})$, составленная из надлежащим образом расположенных миноров p-го порядка матрицы A, называется p-й *ассоциированной* с A матрицей; именно, $a_{i,j;p} = A\begin{pmatrix} i_1, i_2, \ldots, i_p \\ j_1, j_2, \ldots, j_p \end{pmatrix}$, где α_i есть сочетание $i_1 < i_2 < \ldots < i_p$; α_j — сочетание $j_1 < j_2 < \ldots < j_p$.

Доказать, что:

а) $(AB)_p = A_p B_p$;

б) $(E_n)_p = E_N$, где E_n и E_N — единичные матрицы соответственно порядков n и N;

в) если A — неособенная матрица, то $(A^{-1})_p = (A_p)^{-1}$.

970. Найти такую нумерацию сочетаний из n чисел $1, 2, \ldots, n$ по p, чтобы для треугольной матрицы A ассоциированная матрица A_p, определенная в предыдущей задаче, также была треугольной с нулями по ту же сторону от диагонали.

971*. Пользуясь свойствами ассоциированных матриц, доказать, что если A — квадратная матрица порядка n, то $|A_p| = |A|^{C_{n-1}^{p-1}}$ (см. задачу 551).

972*. Пусть A — неособенная матрица порядка n и $B = A^{-1}$ — матрица, обратная для A. Доказать, что миноры любого порядка обратной матрицы выражаются через миноры исходной матрицы следующим образом:

$$B\begin{pmatrix} i_1, i_2, \ldots, i_p \\ k_1, k_2, \ldots, k_p \end{pmatrix} = \frac{(-1)^{\sum\limits_{s=1}^{p}(i_s+k_s)} A\begin{pmatrix} k'_1, k'_2, \ldots, k'_{n-p} \\ i'_1, i'_2, \ldots, i'_{n-p} \end{pmatrix}}{|A|}, \tag{1}$$

где $i_1 < i_2 < \ldots < i_p$ вместе с $i'_1 < i'_2 < \ldots < i'_{n-p}$ и $k_1 < k_2 < \ldots < k_p$ вместе с $k'_1 < k'_2 < \ldots < k'_{n-p}$ составляют полную систему индексов $1, 2, \ldots, n$.

973*. Доказать, что p-я ассоциированная матрица A_p (определение дано в задаче 969) для ортогональной матрицы A сама ортогональна.

974*. Доказать, что p-я ассоциированная матрица A_p для унитарной матрицы A сама унитарна.

§ 13. Полиномиальные матрицы

Следующие λ-матрицы привести к нормальной диагональной форме путем элементарных преобразований:

975. $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$. **976.** $\begin{pmatrix} \lambda^2-1 & \lambda-1 \\ \lambda+1 & \lambda^2+2\lambda+1 \end{pmatrix}$. **977.** $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda+5 \end{pmatrix}$.

978. $\begin{pmatrix} \lambda^2-1 & 0 \\ 0 & (\lambda-1)^3 \end{pmatrix}$. **979.** $\begin{pmatrix} \lambda+1 & \lambda^2+1 & \lambda^2 \\ 3\lambda-1 & 3\lambda^2-1 & \lambda^2+2\lambda \\ \lambda-1 & \lambda^2-1 & \lambda \end{pmatrix}$.

980. $\begin{pmatrix} \lambda^2 & \lambda^2-\lambda & 3\lambda^2 \\ \lambda^2-\lambda & 3\lambda^2-\lambda & \lambda^3+4\lambda^2-3\lambda \\ \lambda^2+\lambda & \lambda^2+\lambda & 3\lambda^2+3\lambda \end{pmatrix}$. **981.** $\begin{pmatrix} \lambda-2 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{pmatrix}$.

982. $\begin{pmatrix} \lambda(\lambda+1) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda+1)^2 \end{pmatrix}$. **983.** $\begin{pmatrix} 1-\lambda & \lambda^2 & \lambda \\ \lambda & \lambda & -\lambda \\ 1+\lambda^2 & \lambda^2 & -\lambda^2 \end{pmatrix}$.

984*. *Инвариантными множителями* λ-матрицы A порядка n называются многочлены $E_1(\lambda), E_2(\lambda), \ldots, E_n(\lambda)$, стоящие на главной диагонали в нормальной диагональной форме матрицы A. Делителями миноров матрицы A называются многочлены $D_1(\lambda), D_2(\lambda), \ldots, D_n(\lambda)$, где $D_k(\lambda)$ — наибольший общий делитель (взятый со старшим коэффициентом, равным единице) миноров k-го порядка матрицы A, если не все эти миноры равны нулю, и $D_k(\lambda) = 0$ в противном случае. Доказать, что $E_k(\lambda) \neq 0$ и $D_k(\lambda) \neq 0$ для $k = 1, 2, \ldots, r$, где r — ранг матрицы A, тогда как $E_k(\lambda) = D_k(\lambda) = 0$ для $k = r+1, \ldots, n$. Далее показать, что $E_k(\lambda) = \dfrac{D_k(\lambda)}{D_{k-1}(\lambda)}$ $(k = 1, 2, \ldots, r;\ D_0 = 1)$.

Следующие λ-матрицы привести к нормальной диагональной форме при помощи делителей миноров, определенных в задаче 984.

985. $\begin{pmatrix} \lambda(\lambda-1) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda(\lambda-2) & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-1)(\lambda-2) \end{pmatrix}$.

986. $\begin{pmatrix} \lambda(\lambda-1) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda(\lambda-2) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda-3) \end{pmatrix}$.

987. $\begin{pmatrix} (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-4) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda-4) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda-4) \end{pmatrix}$.

988. $\begin{pmatrix} a^2cd & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b^2cd & 0 & 0 \\ 0 & 0 & abc^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & abd^2 \end{pmatrix}$,

где a, b, c, d — попарно взаимно простые многочлены от λ.

989. $\begin{pmatrix} f(\lambda) & 0 \\ 0 & g(\lambda) \end{pmatrix}$, где $f(\lambda)$ и $g(\lambda)$ — многочлены от λ.

990. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & fg \\ 0 & fh & 0 \\ gh & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

где f, g, h — многочлены от λ, попарно взаимно простые и имеющие старшие коэффициенты, равные единице.

991. $\begin{pmatrix} fg & 0 & 0 \\ 0 & fh & 0 \\ 0 & 0 & gh \end{pmatrix}$,

где f, g, h — многочлены от λ со старшими коэффициентами, равными единице, взаимно простые в совокупности, но не обязательно попарно взаимно простые.

992. $\begin{pmatrix} fg & 0 & 0 \\ 0 & fh & 0 \\ 0 & 0 & gh \end{pmatrix}$,

где f, g, h — любые многочлены от λ со старшими коэффициентами, равными единице.

993. $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$. **994.** $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

995. $\begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5+\lambda \end{pmatrix}$.

996. $\begin{pmatrix} \lambda+\alpha & \beta & 1 & 0 \\ -\beta & \lambda+\alpha & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda+\alpha & \beta \\ 0 & 0 & -\beta & \lambda+\alpha \end{pmatrix}$.

997. $\begin{pmatrix} 2\lambda^2-12\lambda+16 & 2-\lambda & 2\lambda^2-12\lambda+17 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ \lambda^2-6\lambda+7 & 2-\lambda & \lambda^2-6\lambda+8 \end{pmatrix}$.

998. $\begin{pmatrix} 3\lambda^2-5\lambda+2 & 0 & 3\lambda^2-6\lambda+3 \\ 2\lambda^2-3\lambda+1 & \lambda-1 & 2\lambda^2-4\lambda+2 \\ 2\lambda^2-2\lambda & 0 & 2\lambda^2-4\lambda+2 \end{pmatrix}$.

999. $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}$.

Выяснить, эквивалентны ли между собой матрицы:

1000. $$A=\begin{pmatrix} 3\lambda+1 & \lambda & 4\lambda-1 \\ 1-\lambda^2 & \lambda-1 & \lambda-\lambda^2 \\ \lambda^2+\lambda+2 & \lambda & \lambda^2+2\lambda \end{pmatrix};$$

$$B=\begin{pmatrix} \lambda+1 & \lambda-2 & \lambda^2-2\lambda \\ 2\lambda & 2\lambda-3 & \lambda^2-2\lambda \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1001. $$A=\begin{pmatrix} \lambda^2+\lambda+1 & 3\lambda-\lambda^2 & 2\lambda^2+\lambda & \lambda^2 \\ \lambda^2+\lambda & 3\lambda-\lambda^2 & 2\lambda^2+\lambda & \lambda^2 \\ \lambda^2-\lambda & 2\lambda-\lambda^2 & 2\lambda^2+\lambda & \lambda^2 \\ \lambda^2 & -\lambda^2 & 2\lambda^2 & \lambda^2 \end{pmatrix};$$

$$B=\begin{pmatrix} 3 & \lambda^2+1 & 3\lambda^2 & \lambda^2 \\ 2 & \lambda^2+1 & 3\lambda^2 & \lambda^2 \\ 0 & \lambda^2 & 3\lambda^2 & \lambda^2 \\ \lambda^2 & -\lambda^2 & 2\lambda^2 & \lambda^2 \end{pmatrix}.$$

1002. $$A=\begin{pmatrix} 3\lambda^3-6\lambda^2+\lambda+3 & 2\lambda^3-4\lambda^2+3\lambda-1 & \lambda^3-2\lambda^2+\lambda \\ 3\lambda^2-8\lambda+5 & 2\lambda^2-4\lambda+1 & \lambda^2-2\lambda+1 \\ 3\lambda^3-3\lambda^2-5\lambda+6 & 2\lambda^3-2\lambda^2-\lambda+1 & \lambda^3-\lambda^2-\lambda+1 \end{pmatrix};$$

$$B=\begin{pmatrix} 3\lambda^3-9\lambda^2+7\lambda+1 & 2\lambda^3-6\lambda^2+7\lambda-2 & \lambda^3-3\lambda^2+3\lambda-1 \\ 3\lambda^3-9\lambda^2+9\lambda-5 & 2\lambda^3-6\lambda^2+6\lambda-1 & \lambda^3-3\lambda^2+3\lambda-1 \\ 3\lambda^3-9\lambda^2+5\lambda+5 & 2\lambda^3-6\lambda^2+8\lambda-2 & \lambda^3-3\lambda^2+3\lambda-1 \end{pmatrix};$$

$$C=\begin{pmatrix} 3\lambda^2-3\lambda+1 & \lambda^2-\lambda & 0 \\ 2\lambda^2-\lambda-1 & 7\lambda-3\lambda^2-4 & \lambda^2-2\lambda+1 \\ 5\lambda^2-7\lambda+3 & 5\lambda-2\lambda^2-3 & \lambda^2-2\lambda+1 \end{pmatrix}.$$

1003. Будем называть λ-матрицу *унимодулярной*, если ее определитель является многочленом нулевой степени относительно λ, т. е. константой, отличной от нуля. Найти нормальную диагональную форму унимодулярной λ-матрицы.

1004. Доказать, что матрица, обратная к λ-матрице, тогда и только тогда будет λ-матрицей, когда данная матрица A унимодулярна.

1005*. Доказать утверждение: для того чтобы две прямоугольные λ-матрицы A и B, каждая из m строк и n столбцов, были эквивалентны, необходимо и достаточно выполнение равенства $B = PAQ$, где P и Q — унимодулярные λ-матрицы порядков m и n соответственно. Показать, что требуемые матрицы P и Q можно найти так: найдя ряд элементарных преобразований, переводящий A в B, применить все преобразования строк в том же порядке к единичной матрице E_m порядка m, а все преобразования столбцов в том же порядке к единичной матрице E_n порядка n.

Для данной λ-матрицы A методом, указанным в задаче 1005, найти унимодулярные матрицы P, Q такие, что матрица $B = PAQ$ имеет нормальную диагональную форму (матрицы P и Q определяются не однозначно):

1006. $A = \begin{pmatrix} \lambda^2 - \lambda + 4 & \lambda^2 + 3 \\ \lambda^2 - 2\lambda + 3 & \lambda^2 - \lambda + 2 \end{pmatrix}$.

1007. $A = \begin{pmatrix} \lambda^4 + 4\lambda^3 + 4\lambda^2 + \lambda + 2 & \lambda^3 + 4\lambda^2 + 4\lambda \\ \lambda^4 + 5\lambda^3 + 8\lambda^2 + 5\lambda + 2 & \lambda^3 + 5\lambda^2 + 8\lambda + 4 \end{pmatrix}$.

1008. $A = \begin{pmatrix} \lambda^4 + 3\lambda^3 - 5\lambda^2 + \lambda + 1 & 2\lambda^4 + 3\lambda^3 - 5\lambda^2 + \lambda - 1 & 2\lambda^4 + 2\lambda^3 - 4\lambda^2 \\ \lambda^4 - \lambda^3 + 1 & 2\lambda^4 - \lambda^3 - \lambda^2 & 2\lambda^4 - 2\lambda^3 \\ \lambda^4 + 2\lambda^3 - 4\lambda^2 + \lambda + 1 & 2\lambda^4 - 2\lambda^3 - 4\lambda^2 + \lambda - 1 & 2\lambda^4 + \lambda^3 - 3\lambda^2 \end{pmatrix}$.

Для данных λ-матриц A и B найти унимодулярные λ-матрицы P и Q, удовлетворяющие равенству $B = PAQ$ (матрицы P и Q определяются не однозначно (см. задачу 1005)):

1009. $A = \begin{pmatrix} 2\lambda^2 - \lambda + 1 & 3\lambda^2 - 2\lambda + 1 \\ 2\lambda^2 + \lambda - 1 & 3\lambda^2 + \lambda - 2 \end{pmatrix}$;

$B = \begin{pmatrix} 3\lambda^3 + 7\lambda + 2 & 3\lambda^3 + 4\lambda - 1 \\ 2\lambda^3 + 5\lambda + 1 & 2\lambda^3 + 3\lambda - 1 \end{pmatrix}$.

1010. $A = \begin{pmatrix} 2\lambda^2 - \lambda - 1 & 2\lambda^3 + \lambda^2 - 3\lambda \\ \lambda^2 - \lambda & \lambda^3 - \lambda \end{pmatrix}$;

$B = \begin{pmatrix} \lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 & 2\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 2 \\ \lambda^3 - \lambda^2 & 2\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda \end{pmatrix}$.

1011. $A = \begin{pmatrix} \lambda^2 + \lambda - 1 & \lambda + 1 & \lambda^2 - 2 \\ \lambda^3 + 2\lambda^2 & \lambda^2 + 2\lambda + 1 & \lambda^3 + \lambda^2 - 2\lambda - 1 \\ \lambda^3 + \lambda^2 - \lambda + 1 & \lambda^2 + \lambda & \lambda^3 - 2\lambda + 1 \end{pmatrix}$;

$B = \begin{pmatrix} 4\lambda + 3 & 2\lambda + 2 & 2\lambda^2 - 2\lambda - 3 \\ 10\lambda + 2 & 5\lambda + 5 & 5\lambda^2 - 5\lambda - 2 \\ 4\lambda^2 - 7\lambda - 8 & 2\lambda^2 - 3\lambda - 5 & 2\lambda^3 - 7\lambda^2 + 2\lambda + 8 \end{pmatrix}$.

1012. $A = \begin{pmatrix} \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 & 2\lambda^2 + 2\lambda & \lambda^3 + \lambda^2 \\ 2\lambda^3 - 3\lambda^2 - 3\lambda + 2 & 5\lambda^2 + 5\lambda & 2\lambda^3 + 2\lambda^2 \\ \lambda^3 - \lambda & \lambda^2 + \lambda & \lambda^3 + \lambda^2 \end{pmatrix}$;

$B = \begin{pmatrix} \lambda^2 + 2\lambda + 1 & \lambda^2 + \lambda & 0 \\ 2\lambda^2 + 3\lambda + 1 & \lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda & \lambda^3 + \lambda^2 \\ 3\lambda^2 + 5\lambda + 2 & 2\lambda^3 + 5\lambda^2 + 3\lambda & 2\lambda^3 + 2\lambda^2 \end{pmatrix}$.

1013. $A = \begin{pmatrix} \lambda^2 + 3\lambda - 4 & \lambda^2 + 2\lambda - 3 & \lambda^2 + \lambda - 2 \\ 2\lambda^2 + 3\lambda - 5 & 2\lambda^2 + 2\lambda - 4 & 2\lambda^2 + \lambda - 3 \end{pmatrix}$;

$B = \begin{pmatrix} 2\lambda^2 + 2\lambda - 4 & 3\lambda^2 + 2\lambda - 5 & \lambda^2 + 2\lambda - 3 \\ 2\lambda^2 + \lambda - 3 & 3\lambda^2 + \lambda - 4 & \lambda^2 + \lambda - 2 \end{pmatrix}$.

1014. $A=\begin{pmatrix} \lambda^3+6\lambda^2+6\lambda+5 & \lambda^3+4\lambda^2+4\lambda+3 \\ \lambda^3+3\lambda^2+3\lambda+2 & \lambda^3+2\lambda^2+2\lambda+1 \\ 2\lambda^3+3\lambda^2+3\lambda+1 & 2\lambda^3+2\lambda^2+2\lambda \end{pmatrix}$;

$B=\begin{pmatrix} \lambda^3+\lambda^2+\lambda & 2\lambda^3+\lambda^2+\lambda-1 \\ 3\lambda^3+2\lambda^2+2\lambda-1 & 6\lambda^3+2\lambda^2+2\lambda-4 \\ \lambda^3-\lambda^2-\lambda-2 & 2\lambda^3-\lambda^2-\lambda-3 \end{pmatrix}$.

Найти инвариантные множители следующих λ-матриц:

1015. $\begin{pmatrix} 3\lambda^2+2\lambda-3 & 2\lambda-1 & \lambda^2+2\lambda-3 \\ 4\lambda^2+3\lambda-5 & 3\lambda-2 & \lambda^2+3\lambda-4 \\ \lambda^2+\lambda-4 & \lambda-2 & \lambda-1 \end{pmatrix}$.

1016. $\begin{pmatrix} 3\lambda^3-2\lambda+1 & 2\lambda^2+\lambda-1 & 3\lambda^3+2\lambda^2-2\lambda-1 \\ 2\lambda^3-2\lambda & \lambda^2-1 & 2\lambda^3+\lambda^2-2\lambda-1 \\ 5\lambda^3-4\lambda+1 & 3\lambda^2+\lambda-2 & 5\lambda^3+3\lambda^2-4\lambda-2 \end{pmatrix}$.

1017. $\begin{pmatrix} 2\lambda^3-\lambda^2+2\lambda-1 & 2\lambda^3-3\lambda^2+2\lambda-3 & \lambda^3-2\lambda^2+\lambda-2 & 5\lambda^3-2\lambda^2+5\lambda-2 \\ \lambda^3+\lambda^2+\lambda+1 & \lambda^3-3\lambda^2+\lambda-3 & -\lambda^3-\lambda^2-\lambda-1 & 7\lambda^3-\lambda^2+7\lambda-1 \\ \lambda^3-2\lambda^2+\lambda-2 & \lambda^3+\lambda & 2\lambda^3-\lambda^2+2\lambda-1 & -2\lambda^3-\lambda^2-2\lambda-1 \\ 3\lambda^3-2\lambda^2+3\lambda-2 & 3\lambda^3-4\lambda^2+3\lambda-4 & 2\lambda^3-3\lambda^2-2\lambda-3 & 6\lambda^3-3\lambda^2+6\lambda-3 \end{pmatrix}$.

1018. $\begin{pmatrix} \lambda^3+\lambda^2-\lambda+3 & \lambda^3-\lambda^2+\lambda & 2\lambda^3+\lambda^2-\lambda+4 & \lambda^3+\lambda^2-\lambda+2 \\ \lambda^3+3\lambda^2-3\lambda+6 & \lambda^3-3\lambda^2+3\lambda-2 & 2\lambda^3+3\lambda^2-3\lambda+7 & \lambda^3+3\lambda^2-3\lambda+4 \\ \lambda^3+2\lambda^2-2\lambda+4 & \lambda^3-2\lambda^2+2\lambda-1 & 2\lambda^3+2\lambda^2-2\lambda+5 & \lambda^3+2\lambda^2-2\lambda+3 \\ 2\lambda^3+\lambda^2-\lambda+5 & 2\lambda^3-\lambda^2+\lambda+1 & 4\lambda^3+\lambda^2-\lambda+7 & 2\lambda^3+\lambda^2-\lambda+3 \end{pmatrix}$.

1019. $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ 0 & \lambda & 1 & 2 & \ldots & n-1 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & \ldots & n-2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda \end{pmatrix}$.

1020*. $\begin{pmatrix} \lambda-\alpha & \beta & \beta & \beta & \ldots & \beta \\ 0 & \lambda-\alpha & \beta & \beta & \ldots & \beta \\ 0 & 0 & \lambda-\alpha & \beta & \ldots & \beta \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda-\alpha \end{pmatrix}$

(порядок матрицы равен n).

Элементарными делителями λ-матрицы A называются многочлены $e_1(\lambda), e_2(\lambda), \ldots, e_s(\lambda)$ со старшими коэффициентами, равными единице, совпадающие с наивысшими степенями неприводимых множителей, входящими в разложения инвариантных множителей $E_1(\lambda), E_2(\lambda), \ldots, E_n(\lambda)$ матрицы A на неприводимые множители. При этом совокупность элементарных делителей матрицы A содержит каждый многочлен $E_i(\lambda)$ столько раз, сколько инвариантных множителей $E_k(\lambda)$ содержит его в своем разложении. Разложение на неприводимые множители берется над тем полем, над которым рассматриваются многочлены, являющиеся элементами матрицы A. В дальнейшем, если не оговорено противное, рассматриваются элементарные делители над полем комплексных чисел, т. е. наивысшие степени многочленов вида $\lambda - \alpha$, входящие в разложения инвариантных множителей матрицы A на линейные множители.

Найти элементарные делители следующих λ-матриц:

1021. $\begin{pmatrix} \lambda^3+2 & \lambda^3+1 \\ 2\lambda^3-\lambda^2-\lambda+3 & 2\lambda^3-\lambda^2-\lambda+2 \end{pmatrix}$.

1022. $\begin{pmatrix} \lambda^3-2\lambda^2+2\lambda-1 & \lambda^2-2\lambda+1 \\ 2\lambda^3-2\lambda^2+\lambda-1 & 2\lambda^2-2\lambda \end{pmatrix}$.

1023. $\begin{pmatrix} \lambda^2+2 & 2\lambda+1 & \lambda^2+1 \\ \lambda^2+4\lambda+4 & 2\lambda+3 & \lambda^2+4\lambda+3 \\ \lambda^2-4\lambda+3 & 2\lambda-1 & \lambda^2-4\lambda+2 \end{pmatrix}$.

1024. $\begin{pmatrix} \lambda^2-2\lambda-8 & \lambda^2+4\lambda+4 & \lambda^2-4 & \lambda^2-3\lambda-10 \\ \lambda^4+\lambda^3-\lambda-10 & 2\lambda^2+5\lambda+2 & \lambda^3+3\lambda^2-\lambda-6 & \lambda^4+\lambda^3-2\lambda-12 \\ \lambda^4+\lambda^3-2\lambda^2-3\lambda-6 & \lambda^2+4\lambda+4 & \lambda^4+\lambda^3-2\lambda^2-\lambda-2 & \lambda^4+\lambda^3-2\lambda^2-4\lambda-8 \\ \lambda^4+\lambda^3-\lambda^2+\lambda-2 & \lambda^2+\lambda-2 & \lambda^3+2\lambda^2-\lambda-2 & \lambda^4+\lambda^3-\lambda^2+\lambda-2 \end{pmatrix}$.

1025. $\begin{pmatrix} \lambda^2-2 & \lambda^2+\lambda+3 & \lambda^2+2 & \lambda^2-3 \\ \lambda^2+3\lambda-1 & \lambda^2+3\lambda+3 & \lambda^2+2\lambda+1 & \lambda^2+3\lambda-2 \\ 2\lambda^2-4 & \lambda^2+\lambda+4 & \lambda^2+3 & 2\lambda^2-5 \\ 2\lambda^2+3\lambda-3 & \lambda^2+3\lambda+4 & \lambda^2+2\lambda+2 & 2\lambda^2+3\lambda-4 \end{pmatrix}$.

Найти элементарные делители следующих λ-матриц в поле рациональных, в поле действительных и в поле комплексных чисел:

1026. $\begin{pmatrix} \lambda^2+2 & \lambda^2+1 & 2\lambda^2-2 \\ \lambda^2+1 & \lambda^2+1 & 2\lambda^2-2 \\ \lambda^2+2 & \lambda^2+1 & 3\lambda^2-5 \end{pmatrix}$.

1027. $\begin{pmatrix} 2\lambda^2+3 & \lambda^2+1 & \lambda^6+6\lambda^4+\lambda^2+2 \\ 4\lambda^2+11 & 2\lambda^2+5 & 2\lambda^6+12\lambda^4+2\lambda^2-26 \\ 2\lambda^2+3 & \lambda^2+1 & 2\lambda^6+12\lambda^4+\lambda^2-30 \end{pmatrix}$.

1028. $\begin{pmatrix} \lambda^4+1 & \lambda^7-\lambda^4+\lambda^3-1 & \lambda^4-4\lambda^3+4\lambda-5 \\ 2\lambda^4+3 & 2\lambda^7-2\lambda^4+4\lambda^3-2 & 3\lambda^4-10\lambda^3+\lambda^2+10\lambda-14 \\ \lambda^4+2 & \lambda^7-\lambda^4+2\lambda^3-2 & 2\lambda^4-6\lambda^3+\lambda^2+6\lambda-9 \end{pmatrix}$.

Найти нормальную диагональную форму квадратной λ-матрицы, если известны ее элементарные делители, ранг r и порядок n:

1029. $\lambda+1, \lambda+1, (\lambda+1)^2, \lambda-1, (\lambda-1)^2;\ r=4, n=5$.

1030. $\lambda+2, (\lambda+2)^2, (\lambda+2)^3, \lambda-2, (\lambda-2)^3;\ r=n=4$.

1031. $\lambda-1, \lambda-1, (\lambda-1)^3, \lambda+2, (\lambda+2)^2;\ r=4; n=5$.

1032.* Доказать, что совокупность элементарных делителей диагональной λ-матрицы получается объединением (с надлежащими повторениями) совокупностей элементарных делителей всех диагональных элементов этой матрицы.

1033.* Доказать, что совокупность элементарных делителей клеточно диагональной λ-матрицы равна объединению (с надлежащими повторениями) совокупностей элементарных делителей всех ее диагональных клеток.

Пользуясь задачами 1032 или 1033, найти нормальную диагональную форму следующих λ-матриц:

1034. $$\begin{pmatrix} \lambda(\lambda-1)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2(\lambda+1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda(\lambda+1)^3 \end{pmatrix}.$$

1035. $$\begin{pmatrix} \lambda^2-4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2+2\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^3-2\lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^3-4\lambda \end{pmatrix}.$$

1036. $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \lambda^3+6\lambda^2+9\lambda \\ 0 & 0 & \lambda^3+\lambda^2-6\lambda & 0 \\ 0 & \lambda^2-4\lambda+4 & 0 & 0 \\ \lambda^4+\lambda^3-6\lambda^2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1037. $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \lambda^4+2\lambda^2-2\lambda-1 \\ 0 & 0 & \lambda^4-2\lambda^2+2\lambda-1 & 0 \\ 0 & \lambda^2+2\lambda+1 & 0 & 0 \\ \lambda^2-2\lambda+1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1038. $$\begin{pmatrix} \lambda^2+2\lambda-3 & \lambda^2+\lambda-2 & 0 & 0 \\ 2\lambda^2+2\lambda-4 & 2\lambda^2+\lambda-3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+1 & \lambda+2 \\ 0 & 0 & \lambda^2-1 & \lambda^2+\lambda-2 \end{pmatrix}.$$

1039. $$\begin{pmatrix} \lambda^2-\lambda-2 & \lambda^3+\lambda^2-\lambda-1 & 0 & 0 \\ \lambda^2-4 & \lambda^3+2\lambda^2-\lambda-2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+2\lambda & \lambda^2+6\lambda-2 \\ 0 & 0 & \lambda^2+\lambda-2 & \lambda^2+5\lambda-7 \end{pmatrix}.$$

1040. $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda^3-\lambda^2-\lambda-2 & \lambda^3-2\lambda-4 \\ 0 & 0 & \lambda^3+\lambda^2-6\lambda & \lambda^2+\lambda-6 \\ \lambda^2-2\lambda+1 & \lambda-2 & 0 & 0 \\ \lambda^3-2\lambda^2+6\lambda-1 & \lambda^2-2\lambda+5 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1041.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \lambda^2-2\lambda-3 & \lambda^3+\lambda^2-9\lambda-9 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2-\lambda-2 & \lambda^3+2\lambda^2-5\lambda-6 \\ 0 & 0 & \lambda^2-2\lambda+1 & 0 & 0 \\ \lambda^2+2\lambda-3 & \lambda^2+\lambda-2 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda^3+2\lambda^2+\lambda-4 & \lambda^3+2\lambda^2-3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Определив эквивалентность и нормальную диагональную форму целочисленных матриц так, как это сделано в задачах 942, 943, найти наибольшие общие делители D_k миноров k-го порядка следующих матриц путем приведения их к нормальной диагональной форме с помощью элементарных преобразований:

1042. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & -1 \\ 6 & 12 & 14 & 5 \\ 0 & 4 & 14 & -1 \\ 10 & 6 & -4 & 11 \end{pmatrix}$. **1043.** $\begin{pmatrix} 0 & 6 & -9 & -3 \\ 12 & 24 & 9 & 9 \\ 30 & 42 & 45 & 27 \\ 66 & 78 & 81 & 63 \end{pmatrix}$.

1044. Доказать, что любую λ-матрицу ранга r элементарными преобразованиями одних только строк (а также одних только столбцов) можно привести к треугольному или трапецеидальному виду, причем нули, по желанию, можно получить выше или ниже главной диагонали, и отличные от нуля элементы будут находиться лишь в первых r строках (соответственно в первых r столбцах).

1045*. Доказать, что каждую невырожденную λ-матрицу A можно представить в виде $A = PR$, где P — унимодулярная λ-матрица, а R — треугольная λ-матрица, элементы которой на главной диагонали имеют старший коэффициент, равный единице, ниже главной диагонали равны нулю, а выше главной диагонали имеют степень, меньшую степени элемента главной диагонали того же столбца (или равны нулю), причем такое представление единственно.

§ 14. Подобные матрицы. Характеристический и минимальный многочлены. Жорданова и диагональная формы матрицы. Функции от матриц

Все задачи этого параграфа ставятся в матричной форме. В частности, свойства характеристических чисел матрицы и приведение матрицы к жордановой форме рассматриваются вне связи со свойствами собственных векторов и инвариантных подпространств соответствующего линейного преобразования. Эта связь (в частности, отыскание базиса, в котором матрица данного линейного преобразования имеет жорданову форму) рассматривается в отделе 4. Это не мешает использовать задачи данного параграфа при изучении свойств линейных преобразований в той мере, в какой усвоена связь линейных преобразований с их матрицами в каком-либо базисе.

1046. Матрица A называется *подобной* матрице B (что обозначается так: $A \approx B$), если существует невырожденная матрица T такая, что $B = T^{-1}AT$. Показать, что соотношение подобия обладает следующими свойствами:

а) $A \approx A$; б) если $A \approx B$, то $B \approx A$;

в) если $A \approx B$ и $B \approx C$, то $A \approx C$.

1047. Доказать, что если хотя бы одна из двух матриц A, B невырожденна, то матрицы AB и BA подобны.

Привести пример двух вырожденных матриц A, B, для которых матрицы AB и BA не будут подобны.

1048*. Найти все матрицы, каждая из которых подобна только самой себе.

1049. Пусть матрица B получена из A перестановкой i-й и j-й строк, а также i-го и j-го столбцов. Доказать, что A и B подобны и найти невырожденную матрицу T, для которой $B = T^{-1}AT$.

1050*. Показать, что матрица A подобна матрице B, полученной из A зеркальным отражением в ее центре.

1051. Пусть $i_1, i_2, \ldots, i_n$ — любая перестановка чисел $1, 2, \ldots, n$. Доказать, что матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}\ldots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}a_{n2}\ldots a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} a_{i_1i_1}a_{i_1i_2}\ldots a_{i_1i_n} \\ a_{i_2i_1}a_{i_2i_2}\ldots a_{i_2i_n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i_ni_1}a_{i_ni_2}\ldots a_{i_ni_n} \end{pmatrix}$$

подобны.

1052. Пусть даны матрицы A и B, подобные между собой. Показать, что совокупность всех невырожденных матриц T, для которых $B = T^{-1}AT$, получится из совокупности всех невырожденных матриц, перестановочных с A, путем умножения этих матриц справа на одну любую матрицу T_0 со свойством $B = T_0^{-1}AT_0$.

1053. Доказать, что если матрица A подобна диагональной матрице, то и p-я ассоциированная с ней матрица A_p (задача 969) также подобна диагональной матрице.

1054. Доказать, что если две матрицы A и B подобны диагональным матрицам, то их кронекеровское произведение $A \times B$ (задача 963) также является матрицей, подобной диагональной матрице.

1055. Доказать, что если матрицы A и B подобны, то и p-е ассоциированные с ними матрицы A_p и B_p (взятые при любых двух расположениях сочетаний по p из n номеров строк и столбцов) также подобны.

1056. Доказать, что если матрицы A_1, B_1 подобны соответственно матрицам A_2, B_2, то кронекеровские произведения $A_1 \times B_1$ и $A_2 \times B_2$ (взятые при любых двух расположениях пар индексов) также подобны между собой.

1057. Доказать, что если квадратная λ-матрица B представляется в виде $B = B_0\lambda^s + B_1\lambda^{s-1} + \dots + B_s$, где $B_0, B_1, \dots, B_s$ — матрицы, не зависящие от λ, и матрица B_0 невырожденна, то любую квадратную λ-матрицу A того же порядка, что и B, можно разделить на B слева или справа, т. е. существуют правые частное Q_1 и остаток R_1 такие, что $A = BQ_1 + R_1$, и левые частное Q_2 и остаток R_2 такие, что $A = Q_2B + R_2$, причем степени элементов матриц R_1 и R_2 относительно λ ниже s и обе пары Q_1, R_1 и Q_2, R_2 определены однозначно.

1058. Матрицу

$$A = \begin{pmatrix} -2\lambda^2+5\lambda+3 & -\lambda^2+3\lambda+2 & -\lambda+6 \\ -3\lambda^2+7\lambda+11 & -3\lambda^2+9\lambda+1 & -2\lambda+8 \\ -\lambda^2+2\lambda+8 & -2\lambda^2+5\lambda+3 & -\lambda+4 \end{pmatrix}$$

разделить слева на $B - \lambda E$, где $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

1059. Матрицу

$$A = \begin{pmatrix} -\lambda^3+\lambda^2+3\lambda+6 & \lambda^2+2\lambda & \lambda^2+2\lambda+6 \\ -2\lambda^3+2\lambda^2+9\lambda+8 & \lambda^2+6\lambda+1 & 2\lambda^2+7\lambda+8 \\ -\lambda^3+\lambda^2+3\lambda+5 & \lambda^2+2\lambda-9 & \lambda^2+5\lambda-2 \end{pmatrix}$$

разделить справа на $B - \lambda E$, где $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

1060*. Доказать, что если две матрицы A и B с числовыми элементами (или с элементами из некоторого поля P) подобны, то их характеристические матрицы $A - \lambda E$ и $B - \lambda E$ эквивалентны.

1061*. Доказать, что если характеристические матрицы $A - \lambda E$ и $B - \lambda E$ двух матриц A и B эквивалентны, то сами эти матрицы подобны. При этом показать, что если $B - \lambda E = P(A - \lambda E)Q$, где P и Q — унимодулярные λ-матрицы и P_0, Q_0 — остатки при делении P слева, а Q справа на $B - \lambda E$, то $B = P_0AQ_0$ и $P_0Q_0 = E$, т. е. матрица Q_0 осуществляет подобное преобразование матрицы A в матрицу B.

1062. Доказать, что любая квадратная матрица A подобна своей транспонированной матрице A'.

Выяснить, являются ли подобными между собой следующие матрицы:

1063. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 2 & 6 & -10 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 6 & 20 & -34 \\ 6 & 32 & -51 \\ 4 & 20 & -32 \end{pmatrix}$.

1064. $A = \begin{pmatrix} 6 & 6 & -15 \\ 1 & 5 & -5 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 37 & -20 & -4 \\ 34 & -17 & -4 \\ 119 & -70 & -11 \end{pmatrix}$.

1065. $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & -15 \\ 1 & 3 & -5 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$;

$C = \begin{pmatrix} -13 & -70 & 119 \\ -4 & -19 & 34 \\ -4 & -20 & 35 \end{pmatrix}$.

1066. $A = \begin{pmatrix} 14 & -2 & -7 & -1 \\ 20 & -2 & -11 & -2 \\ 19 & -3 & -9 & -1 \\ -6 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 4 & 10 & -19 & 4 \\ 1 & 6 & -8 & 3 \\ 1 & 4 & -6 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

$C = \begin{pmatrix} 41 & -4 & -26 & -7 \\ 14 & -13 & -91 & -18 \\ 40 & -4 & -25 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Пользуясь методом, указанным в задаче 1061, для данных матриц A и B найти невырожденную матрицу T такую, что $B = T^{-1}AT$ (искомая матрица T определена не однозначно):

1067*. $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 9 & -1 \end{pmatrix}$;. $B = \begin{pmatrix} 38 & -81 \\ 16 & -34 \end{pmatrix}$.

1068*. $A = \begin{pmatrix} 17 & -6 \\ 45 & -16 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 14 & -60 \\ 3 & -13 \end{pmatrix}$.

1069. $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & -6 & 5 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 24 & -11 & -22 \\ 20 & -8 & -20 \\ 12 & -6 & -10 \end{pmatrix}$.

1070*. Доказать, что коэффициенты характеристического многочлена $|A - \lambda E|$ матрицы A следующим образом выражаются через элементы этой матрицы:

$$|A - \lambda E| = (-\lambda)^n + c_1(-\lambda)^{n-1} + c_2(-\lambda)^{n-2} + \cdots + c_n,$$

где c_k есть сумма всех главных миноров порядка k матрицы A (минор называется главным, если номера занимаемых им строк совпадают с номерами столбцов).

1071*. Найти характеристические числа (корни характеристического многочлена) матрицы $A'A$, где $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и A' — матрица, полученная транспонированием A.

1072. Доказать, что сумма характеристических чисел матрицы A равна ее следу (т. е. сумме элементов главной диагонали), а произведение этих чисел равно определителю $|A|$.

1073. Доказать, что все характеристические числа матрицы A отличны от нуля тогда и только тогда, когда матрица A невырожденна.

1074*. Пусть $p > 0$ — кратность корня λ_0 характеристического многочлена $|A - \lambda E|$ матрицы A порядка n, r — ранг и $d = n - r$ — дефект матрицы $A - \lambda_0 E$. Доказать справедливость неравенств

$$1 \leqslant d = n - r \leqslant p.$$

1075. Привести примеры матриц n-го порядка, для которых первое или второе неравенства предыдущей задачи обращаются в равенство, т. е. $d = 1$ или $d = p$.

1076*. Доказать, что характеристические числа обратной матрицы A^{-1} равны (с учетом их кратности) обратным величинам для характеристических чисел матрицы A.

1077*. Доказать, что характеристические числа матрицы A^2 равны (с учетом их кратности) квадратам характеристических чисел матрицы A.

1078*. Доказать, что характеристические числа матрицы A^p равны (с учетом их кратности) p-м степеням характеристических чисел матрицы A.

1079*. Пусть $\varphi(\lambda) = |A - \lambda E|$ — характеристический многочлен, λ_1, λ_2, $\ldots, \lambda_n$ — характеристические числа матрицы A и $f(\lambda)$ — произвольный многочлен. Доказать, что определитель матрицы $f(A)$ удовлетворяет равенству $|f(A)| = f(\lambda_1)f(\lambda_2)\ldots f(\lambda_n) = R(f, \varphi)$, где $R(f, \varphi)$ — результант многочленов f и φ. Если же определять характеристический многочлен как $\varphi(\lambda) = |\lambda E - A|$, то

$$|f(A)| = R(\varphi, f).$$

Напоминаем, что *результантом* двух многочленов

$$f(x) = a_0 \prod_{i=1}^{n}(x - \alpha_i) \text{ и } g(x) = b_0 \prod_{j=1}^{s}(x - \beta_j)$$

называется число

$$R(f, g) = a_0^s b_0^n \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{s}(\alpha_i - \beta_j) = a_0^s \prod_{i=1}^{n} g(\alpha_i) = (-1)^{ns} b_0^n \prod_{j=1}^{s} f(\beta_j).$$

1080*. Доказать, что если $\lambda_1, \lambda_2 \dots, \lambda_n$ — характеристические числа матрицы A и $f(x)$ — многочлен, то $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \dots, f(\lambda_n)$ будут характеристическими числами матрицы $f(A)$.

1081*. Доказать, что если $\lambda_1, \lambda_2 \dots, \lambda_n$ — характеристические числа матрицы A и $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$ — рациональная функция, определенная для значения $x = A$ (т. е. удовлетворяющая условию $|h(A)| \neq 0$), то $|f(A)| = f(\lambda_1)f(\lambda_2)\dots f(\lambda_n)$ и числа $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \dots, f(\lambda_n)$ будут характеристическими числами матрицы $f(A)$.

1082*. Доказать, что если A и B — квадратные матрицы одинакового порядка, то характеристические многочлены матриц AB и BA совпадают.

1083*. Найти характеристические числа циклической матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_1 \end{pmatrix}.$$

1084*. Найти характеристические числа матрицы n-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1085*. *Жордановой матрицей* называется клеточно-диагональная матрица с диагональными клетками вида

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha \end{pmatrix},$$

называемыми клетками Жордана. *Жордановой формой* матрицы A называется жорданова матрица A_j, подобная матрице A.

Пользуясь теоремой о том, что совокупность элементарных делителей клеточно-диагональной матрицы равна объединению совокупностей элементарных делителей ее диагональных клеток (см. задачу 1033), доказать, что над полем комплексных чисел (или над любым полем, содержащим все характеристические матрицы A) любая матрица A имеет жорданову форму, и притом единственную, с точностью до порядка клеток.

Написать жорданову форму A_j матрицы A, если даны инвариантные множители $E_i(\lambda)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ ее характеристической матрицы $A - \lambda E$:

1086. $E_1(\lambda) = E_2(\lambda) = 1$, $E_3(\lambda) = E_4(\lambda) = \lambda - 1$, $E_5(\lambda) = E_6(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 2)$.

1087. $E_1(\lambda) = E_2(\lambda) = E_3(\lambda) = 1$, $E_4(\lambda) = \lambda + 1$, $E_5(\lambda) = (\lambda + 1)^2$, $E_6(\lambda) = (\lambda + 1)^2(\lambda - 5)$.

1088. $E_1(\lambda) = E_2(\lambda) = 1$, $E_3(\lambda) = \lambda - 2$, $E_4(\lambda) = \lambda^2 - 4$.

1089. Доказать, что для любой квадратной λ-матрицы $A(\lambda)$ порядка n, определитель которой есть многочлен от λ степени n, существует числовая матрица B порядка n такая, что матрица $A(\lambda)$ эквивалентна характеристической матрице $B - \lambda E$.

Найти жорданову форму следующих матриц:

1090. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. **1091.** $\begin{pmatrix} 2 & 6 & -15 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix}$. **1092.** $\begin{pmatrix} 9 & -6 & -2 \\ 18 & -12 & -3 \\ 18 & -9 & -6 \end{pmatrix}$.

1093. $\begin{pmatrix} 4 & 6 & -15 \\ 1 & 3 & -5 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$. **1094.** $\begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$. **1095.** $\begin{pmatrix} 12 & -6 & -2 \\ 18 & -9 & -3 \\ 18 & -9 & -3 \end{pmatrix}$.

1096. $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$. **1097.** $\begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$. **1098.** $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$.

1099. $\begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$. **1100.** $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$. **1101.** $\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ \alpha & 0 & \alpha \end{pmatrix}$, где $\alpha \neq 0$.

1102. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 6 & -3 & 2 \\ 8 & -6 & 5 \end{pmatrix}$. **1103.** $\begin{pmatrix} 4 & 6 & -15 \\ 3 & 4 & -12 \\ 2 & 3 & -8 \end{pmatrix}$. **1104.** $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

1105. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$. **1106.** $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

1107. $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. **1108.** $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$.

1109. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$, порядок матрицы равен n.

1110. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$, порядок матрицы равен n.

1111. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \dots & n-2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$. **1112.** $\begin{pmatrix} n & n-1 & n-2 & \dots & 1 \\ 0 & n & n-1 & \dots & 2 \\ 0 & 0 & n & \dots & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{pmatrix}$.

1113. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \end{pmatrix}$. **1114.** $\begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha \\ \alpha & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

1115. Найти жорданову форму матрицы вида

$$\begin{pmatrix} \alpha & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & \alpha & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \alpha & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha \end{pmatrix}$$

при условии, что $a_{12}a_{23}\dots a_{n-1,n} \neq 0$.

1116. Доказать, что если характеристический многочлен $|A-\lambda E|$ матрицы A не имеет кратных корней, то A подобна диагональной матрице (элементы матрицы T, преобразующей A к диагональной форме, принадлежат тому полю, которое содержит все характеристические числа матрицы A).

1117. Доказать, что матрица A над данным полем P тогда и только тогда подобна диагональной матрице, когда последний инвариантный множитель $E_n(\lambda)$ характеристической матрицы $A - \lambda E$ не имеет кратных корней и все его корни принадлежат полю P.

Выяснить, являются ли следующие матрицы подобными диагональным матрицам в полях рациональных, вещественных и комплексных чисел:

1118. $\begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -4 \\ 6 & 4 & -4 \end{pmatrix}$. **1119.** $\begin{pmatrix} 8 & 15 & -36 \\ 8 & 21 & -46 \\ 5 & 12 & -27 \end{pmatrix}$.

1120. $\begin{pmatrix} 4 & 7 & -5 \\ -4 & 5 & 0 \\ 1 & 9 & -4 \end{pmatrix}$. **1121.** $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 6 & 4 & -9 \\ 5 & 3 & -7 \end{pmatrix}$.

1122. Доказать, что если последний инвариантный множитель $E_n(\lambda)$ характеристической матрицы $A-\lambda E$ для матрицы A порядка n имеет степень n, то все диагональные элементы различных клеток жордановой формы матрицы A различны между собой.

1123. Доказать, что матрица A тогда и только тогда *нильпотентна* (т. е. $A^k = 0$ при некотором натуральном k), когда все ее характеристические числа равны нулю.

1124. Доказать, что нильпотентная матрица, отличная от нулевой, не приводится преобразованием подобия к диагональной форме.

1125. Найти жорданову форму *идемпотентной* матрицы A (т. е. матрицы, обладающей свойством $A^2 = A$).

1126. Доказать, что *инволютивная* матрица A (т. е. матрица, обладающая свойством $A^2 = E$) подобна диагональной матрице, и найти вид этой диагональной матрицы.

1127. Доказать, что *периодическая* матрица A (т. е. матрица, обладающая свойством $A^k = E$ при некотором натуральном k) подобна диагональной матрице, и найти вид этой диагональной матрицы.

1128. Найти минимальный многочлен (определение дано в задаче 830): а) единичной матрицы, б) нулевой матрицы.

1129. Для каких матриц минимальный многочлен имеет вид $\lambda - \alpha$, где α — число?

1130. Найти минимальный многочлен клетки Жордана порядка n с числом α на диагонали.

1131. Доказать, что минимальный многочлен клеточно-диагональной матрицы равен наименьшему общему кратному минимальных многочленов ее диагональных клеток.

1132. Доказать, что минимальный многочлен матрицы A равен последнему инвариантному множителю $E_n(\lambda)$ ее характеристической матрицы $A - \lambda E$.

1133. Доказать, что некоторая степень минимального многочлена матрицы A делится на характеристический многочлен той же матрицы.

Найти минимальные многочлены следующих матриц:

1134. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. **1135.** $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -5 & 7 & -5 \\ -6 & 6 & -4 \end{pmatrix}$.

1136. Доказать, что для подобия двух матриц необходимо (но не достаточно), чтобы они имели одинаковые характеристический и минимальный многочлены. Привести пример двух неподобных матриц, у которых характеристический многочлен $\varphi(\lambda)$ и минимальный многочлен $\psi(\lambda)$ одни и те же.

1137. Найти k-ю степень A^k жордановой клетки

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{порядка } n.$$

1138*. Доказать, что значение многочлена $f(x)$ от клетки Жордана A порядка n с числом α на главной диагонали

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha \end{pmatrix}$$

определяется формулой

$$f(A) = \begin{pmatrix} f(\alpha) & \dfrac{f'(\alpha)}{1!} & \dfrac{f''(\alpha)}{2!} & \dfrac{f'''(\alpha)}{3!} & \dots & \dfrac{f^{(n-1)}(\alpha)}{(n-1)!} \\ 0 & f(\alpha) & \dfrac{f'(\alpha)}{1!} & \dfrac{f''(\alpha)}{2!} & \dots & \dfrac{f^{(n-2)}(\alpha)}{(n-2)!} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & f(\alpha) \end{pmatrix}.$$

1139. Решить задачу 1080, пользуясь жордановой формой матрицы A.

1140. Найти жорданову форму квадрата жордановой клетки, на диагонали которой стоит число $\alpha \neq 0$.

1141*. Найти жорданову форму квадрата жордановой клетки с нулем на главной диагонали (нильпотентная клетка Жордана).

1142. Пусть X_j — жорданова форма матрицы X. Доказать равенство $(A+\alpha E)_j = A_j + \alpha E$, где A — любая квадратная матрица и α — число.

1143*. Найти жорданову форму матрицы

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{порядка } n \geqslant 3.$$

1144*. Доказать, что любую квадратную матрицу можно представить в виде произведения двух симметрических матриц, одна из которых невырожденна.

1145*. Зная характеристические числа матрицы A, найти характеристические числа p-й ассоциированной с ней матрицы A_p (определение дано в задаче 969).

1146*. Зная характеристические числа двух квадратных матриц — A порядка p и B порядка q, — найти характеристические числа их кронекеровского произведения $A \times B$ (определение дано в задаче 963).

1147*. Пусть $\psi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{r_1}(\lambda - \lambda_2)^{r_2}\ldots(\lambda - \lambda_s)^{r_s}$ — минимальный многочлен матрицы A степени $r = r_1 + r_2 + \cdots + r_s$. Здесь r_k — кратность λ_k как корня минимального многочлена $\psi(\lambda)$.

Если для функции $f(\lambda)$ существуют числа

$$f(\lambda_k), f'(\lambda_k), f''(\lambda_k), \ldots, f^{(r_k-1)}(\lambda_k) \qquad (1)$$
$$(k = 1, 2, \ldots, s),$$

то говорят, что функция $f(\lambda)$ *определена на спектре матрицы* A, и систему чисел (1) называют *системой значений функций* $f(\lambda)$ *на спектре матрицы* A. Доказать, что значения многочленов $g(\lambda)$ и $h(\lambda)$ от матрицы A совпадают, т. е. $g(A) = h(A)$, тогда и только тогда, когда совпадают значения этих многочленов на спектре матрицы A.

1148. Пусть функция $f\lambda)$ определена на спектре матрицы A (в смысле предыдущей задачи). Доказать, что если существует хотя бы один многочлен, значение которого на спектре матрицы A совпадает со значениями $f(\lambda)$, то таких многочленов будет бесконечно много и среди них существует один и только один, имеющий степень, меньшую степени минимального многочлена матрицы A. Этот многочлен $r(\lambda)$ называется *интерполяционным многочленом Лагранжа — Сильвестера* функции $f(\lambda)$ на спектре матрицы A. Его значение от матрицы A по определению принимается за значение функции $f(\lambda)$ от этой матрицы: $f(A) = r(A)$.

1149. Доказать, что если функция $f(\lambda)$ определена на спектре матрицы A и характеристический многочлен $|A - \lambda E|$ не имеет кратных корней, то интерполяционный многочлен Лагранжа — Сильвестера $r(\lambda)$

существует, и, значит, матрица $f(A)$ имеет смысл. Найти вид $r(\lambda)$ и $f(A)$.

1150. Доказать, что если функция $f(\lambda)$ определена на спектре матрицы A и минимальный многочлен этой матрицы $\psi(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)\ldots(\lambda-\lambda_s)$ не имеет кратных корней, то интерполяционный многочлен Лагранжа — Сильвестера $r(\lambda)$ существует и матрица $f(A)$ имеет смысл. Найти выражение для вычисления $f(A)$.

1151*. Доказать, что если функция $f(\lambda)$ определена на спектре матрицы A, то определение матрицы $f(A)$ (данное в задаче 1148) имеет смысл, т. е. существует интерполяционный многочлен Лагранжа — Сильвестера $r(\lambda)$. Пусть $\psi(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{r_1}\ldots(\lambda-\lambda_s)^{r_s}$ — минимальный многочлен матрицы A, где корни $\lambda_1,\ldots,\lambda_s$ различны между собой, и

$$\psi_k(\lambda) = \frac{\psi(\lambda)}{(\lambda-\lambda_k)^{r_k}} \quad (k = 1, 2, \ldots, s).$$

Показать, что

$$r(\lambda) = \sum_{k=1}^{s} \left[\alpha_{k,1} + \alpha_{k,2}(\lambda-\lambda_k) + \cdots + \alpha_{k,r_k}(\lambda-\lambda_k)^{r_k-1}\right] \cdot \psi_k(\lambda), \qquad (1)$$

где числа $\alpha_{k,j}$ определяются из равенств

$$\alpha_{k,j} = \frac{1}{(j-1)!}\left[\frac{f(\lambda)}{\psi_k(\lambda)}\right]^{(j-1)}_{\lambda=\lambda_k} \quad (j = 1, 2, \ldots, r_k;\ k = 1, 2, \ldots, s), \qquad (2)$$

т. е. выражение в квадратных скобках в равенстве (1) равно сумме первых r_k членов разложения в ряд Тейлора по степеням разности $\lambda - \lambda_k$ для функции $\dfrac{f(\lambda)}{\psi_k(\lambda)}$.

1152. Пусть $\psi(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^2(\lambda-\lambda_2)^3 (\lambda_1 \neq \lambda_2)$ — минимальный многочлен матрицы A и $f(\lambda)$ — функция, определенная на спектре этой матрицы. Написать выражение для матрицы $f(A)$, пользуясь предыдущей задачей.

1153. Доказать, что если матрицы A и B подобны, причем $B = T^{-1}AT$ и для функции $f(\lambda)$ матрица $f(A)$ существует, то и матрица $f(B)$ существует и подобна $f(A)$, причем $f(B) = T^{-1}f(A)T$ с той же матрицей T.

1154*. Доказать, что если матрица A клеточно-диагональная

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & 0 \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_s \end{pmatrix},$$

и функция $f(\lambda)$ определена на спектре матрицы A, то

$$f(A) = \begin{pmatrix} f(A_1) & & & 0 \\ & f(A_2) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & f(A_s) \end{pmatrix}.$$

1155. Найти интерполяционный многочлен Лагранжа — Сильвестера $r(\lambda)$ и значение $f(A)$ функции $f(\lambda)$ для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Для каких функций $f(\lambda)$ значение $f(A)$ имеет смысл?

1156. Решить задачу, аналогичную предыдущей, для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

1157. Показать, что если матрица A подобна диагональной

$$A = T^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} T$$

и для функции $f(\lambda)$ матрица $f(A)$ существует, то и $f(A)$ подобна диагональной матрице, причем

$$f(A) = T^{-1} \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & & & 0 \\ & f(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & f(\lambda_n) \end{pmatrix} T$$

с той же матрицей T.

1158. Доказать, что если $f(\lambda) = g(\lambda) + h(\lambda)$ и матрицы $g(A)$ и $h(A)$ существуют, то и матрица $f(A)$ существует, причем $f(A) = g(A) + h(A)$.

1159. Доказать, что если $f(\lambda) = g(\lambda)h(\lambda)$ и матрицы $g(A)$ и $h(A)$ существуют, то и матрица $f(A)$ существует, причем $f(A) = g(A)h(A)$.

1160*. Показать, что функция $f(\lambda) = \dfrac{1}{\lambda}$ определена для всех невырожденных матриц A и только для них, причем $f(A) = A^{-1}$.

1161. Доказать, что если $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — характеристические числа матрицы A и функция $f(\lambda)$ имеет смысл при $\lambda = A$, то $f(\lambda_1)$, $f(\lambda_2)$, $\ldots$, $f(\lambda_n)$ будут характеристическими числами матрицы $f(A)$.

Вычислить следующие значения функций от матриц, пользуясь интерполяционным многочленом Лагранжа — Сильвестера и задачами 1148–1152 или находя матрицу, дающую преобразование подобия данной матрицы к ее жордановой форме и применяя задачи 1154, 1156, 1153:

1162. A^{100}, где $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$. **1163.** A^{50}, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

1164. $\sqrt{A}$, где $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$. **1165.** $\sqrt{A}$, где $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$.

1166. e^A, где $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$. **1167.** e^A, где $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1168. e^A, где $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 6 & 4 & -9 \\ 5 & 3 & -7 \end{pmatrix}$. **1169.** $\ln A$, где $A = \begin{pmatrix} 4 & -15 & 6 \\ 1 & -4 & 2 \\ 1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$.

1170. $\sin A$, где $A = \begin{pmatrix} \pi - 1 & 1 \\ -1 & \pi + 1 \end{pmatrix}$.

1171*. Доказать, что равенство $\sin 2A = 2 \sin A \cos A$ справедливо для любой квадратной матрицы A.

1172*. Доказать, что матрица e^A существует и невырожденна для любой квадратной матрицы A.

1173. Найти определитель матрицы e^A, где A — квадратная матрица порядка n.

1174*. Пусть функция $f(\lambda)$ имеет смысл при $\lambda = A$. Доказать, что определитель матрицы $f(A)$ удовлетворяет равенству $|f(A)| = f(\lambda_1)\, f(\lambda_2) \ldots f(\lambda_n)$, где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — характеристические числа матрицы A (с учетом их кратности).

§ 15. Квадратичные формы[1)]

В этом параграфе, кроме задач на квадратичные формы, помещены задачи на свойства симметрических и ортогональных матриц, связанные с теорией квадратичных форм. Здесь применяется следующая терминология: под *линейным преобразованием* понимается преобразование *неизвестных* вида

$$x_1 = q_{11}y_1 + q_{12}y_2 + \cdots + q_{1n}y_n,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_n = q_{n1}y_1 + q_{n2}y_2 + \cdots + q_{nn}y_n.$$

---

1) Задачи на билинейные и квадратичные функции даны в § 24.

Матрица

$$Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{nn} \end{pmatrix},$$

составленная из коэффициентов преобразования в соответственном порядке, называется матрицей этого преобразования. Линейное преобразование называется *невырожденным*, если его матрица невырожденна. Две квадратичные формы называются *эквивалентными*, если одна из них переводится в другую посредством невырожденного линейного преобразования. *Каноническим видом* данной квадратичной формы называется эквивалентная с ней форма, не содержащая произведений неизвестных, а *нормальным* видом — такой канонический вид, в котором коэффициенты при квадратах неизвестных (не считая нулевых) равны ± 1 для вещественной и $+1$ для комплексной области.

Найти нормальный вид в области вещественных чисел следующих квадратичных форм:

1175. $x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$.

1176. $x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$.

1177. $x_1^2 - 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$.

1178. $x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4$.

1179. $x_1^2 + 2x_2^2 + x_4^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4$.

Найти нормальный вид и невырожденное линейное преобразование, приводящее к этому виду, для следующих квадратичных форм (ввиду неоднозначности искомого линейного преобразования ответ может получиться отличным от приведенного ниже):

1180. $x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$.

1181. $4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3$.

1182. $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$.

1183. $2x_1^2 + 18x_2^2 + 8x_3^2 - 12x_1x_2 + 8x_1x_3 - 27x_2x_3$.

1184. $-12x_1^2 - 3x_2^2 - 12x_3^2 + 12x_1x_2 - 24x_1x_3 + 8x_2x_3$.

1185. $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1$.

1186. $3x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 - 2x_4^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3 + 2x_2x_4$.

Следующие квадратичные формы привести к каноническому виду с целыми коэффициентами посредством невырожденного линейного преобразования с рациональными коэффициентами и найти выражение новых неизвестных через старые:

1187. $2x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3$.

1188. $3x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 - 3x_1x_3 - x_2x_3$.

1189. $\frac{1}{2}x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_4^2 - x_1x_2 + x_2x_3 - x_3x_4$.

Для следующих квадратичных форм найти невырожденное линейное преобразование, переводящее форму f в форму g (искомое преобразование определено не однозначно):

1190. $f = 2x_1^2 + 9x_2^2 + 3x_3^2 + 8x_1x_2 - 4x_1x_3 - 10x_2x_3$;
$g = 2y_1^2 + 3y_2^2 + 6y_3^2 - 4y_1y_2 - 4y_1y_3 + 8y_2y_3$.

1191. $f = 3x_1^2 + 10x_2^2 + 25x_3^2 - 12x_1x_2 - 18x_1x_3 + 40x_2x_3$;
$g = 5y_1^2 + 6y_2^2 + 12y_1y_2$.

1192. $f = 5x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 + 8x_1x_2 + 6x_1x_3 + 6x_2x_3$;
$g = 4y_1^2 + y_2^2 + 9y_3^2 - 12y_1y_3$.

Следующие квадратичные формы привести к каноническому виду и найти выражение новых неизвестных через старые (ответ не однозначен):

1193. $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_ia_jx_ix_j$, где не все числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ равны нулю.

1194. $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum\limits_{i<j}^{n} x_ix_j$. **1195*.** $\sum\limits_{i<j}^{n} x_ix_j$.

1196. $\sum\limits_{i=1}^{n-1} x_ix_{i+1}$. **1197*.** $\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - s)^2$, где $s = \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$.

1198*. $\sum\limits_{i<j}^{n} |i - j| \cdot x_ix_j$.

1199*. Пусть дана квадратичная форма

$$f = l_1^2 + l_2^2 + \cdots + l_p^2 - l_{p+1}^2 - l_{p+2}^2 - \cdots - l_{p+q}^2,$$

где $l_1, l_2, \ldots, l_p, l_{p+1}, l_{p+2}, \ldots, l_{p+q}$ — вещественные линейные формы от $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Доказать, что положительный индекс инерции (т. е. число положительных коэффициентов в каноническом виде) формы f не превосходит p, а отрицательный индекс инерции не превосходит q.

1200*. Доказать, что если от каждой из двух форм f, g к другой можно перейти каким-нибудь (не обязательно невырожденным) линейным преобразованием, то эти формы эквивалентны.

Выяснить, какие из следующих форм эквивалентны между собой в области вещественных чисел:

1201. $f_1 = x_1^2 - x_2x_3$; $f_2 = y_1y_2 - y_3^2$; $f_3 = z_1z_2 + z_3^2$.

1202. $f_1 = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3$;
$f_2 = y_1^2 + 2y_2^2 - y_3^2 + 4y_1y_2 - 2y_1y_3 - 4y_2y_3$;
$f_3 = -4z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 - 4z_1z_2 + 4z_1z_3 + 18z_2z_3$.

1203. Показать, что все квадратичные формы от n неизвестных можно разбить на классы так, что две формы будут эквивалентны тогда и только тогда, когда они принадлежат к одному и тому же классу. Найти число этих классов в комплексной и вещественной областях.

1204. Какими значениями ранга и сигнатуры характеризуются те классы вещественно эквивалентных квадратичных форм, для которых форма f эквивалентна форме $-f$.

1205. Найти число классов эквивалентности в области вещественных чисел форм от n неизвестных, имеющих заданную сигнатуру s.

1206. Доказать, что для распадения квадратичной формы в произведение двух линейных форм необходимо и достаточно выполнение условий: а) в области вещественных чисел: ранг не превосходит двух, а при ранге два сигнатура равна нулю; б) в области комплексных чисел: ранг не превосходит двух.

1207. Доказать, что квадратичная форма f тогда и только тогда является положительно определенной, когда ее матрица представляется в виде $A = C'C$, где C — невырожденная вещественная матрица и C' — матрица, транспонированная к C.

1208. Пользуясь задачами 913, 951 и 1207, доказать, что квадратичная форма тогда и только тогда является положительно определенной, когда все ее угловые миноры положительны. Под угловым минором квадратичной формы понимается минор k-го порядка, стоящий в первых k строках и первых k столбцах ее матрицы ($k = 1, 2, \ldots, n$; n — порядок матрицы).

1209. Доказать, что в положительно определенной форме все коэффициенты при квадратах неизвестных положительны и что это условие не является достаточным для положительной определенности формы.

1210*. Доказать утверждения:

а) *Для того чтобы квадратичная форма f была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы все главные, а не* только угловые (см. задачу 1208) миноры ее матрицы были положительны.

б) Для того чтобы квадратичная форма f была неотрицательна (т. е. $f \geqslant 0$ при любых вещественных значениях неизвестных), необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры ее матрицы были неотрицательны. Показать на примерах, что (в отличие от положительно определенных форм) для неотрицательности f недостаточно, чтобы все угловые миноры были неотрицательны.

в) Для того чтобы вещественная симметрическая матрица A представлялась в виде $A = C'C$, где C — вещественная невырожденная матрица, необходимо и достаточно, чтобы все угловые миноры матрицы A были положительны.

г) Для того чтобы вещественная симметрическая матрица A представлялась в виде $A = C'C$, где C — вещественная квадратная матрица, необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры матрицы A были неотрицательны. Кроме того, если ранг A равен r, то и ранг C равен r, и можно считать первые r строк C линейно независимыми, а остальные — нулевыми.

1211. Доказать, что квадратичная форма f тогда и только тогда является отрицательно определенной (т. е. $f < 0$ при любых вещественных значениях неизвестных, не все из которых равны нулю), когда знаки угловых миноров $D_1, D_2, \ldots, D_n$ чередуются, причем $D_1 < 0$. Здесь D_k — угловой минор порядка k $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Найти все значения параметра λ, при которых положительно определенны следующие квадратичные формы:

1212. $5x_1^2 + x_2^2 + \lambda x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$.

1213. $2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 2x_1x_3$.

1214. $x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$.

1215. $x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 10x_1x_3 + 6x_2x_3$.

1216. $2x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3$.

1217*. *Дискриминантом D_f квадратичной формы f* называется определитель ее матрицы. Доказать, что если к положительно определенной квадратичной форме $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ прибавить квадрат ненулевой линейной формы от тех же неизвестных, то дискриминант формы увеличится.

1218*. Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$ — положительно определенная квадратичная форма и $\varphi(x_2, x_3, \ldots, x_n) = f(0, x_2, \ldots, x_n)$. Доказать, что для дискриминантов этих форм выполняется неравенство $D_f \leqslant a_{11}D_\varphi$.

1219* Доказать, что если неотрицательная квадратичная форма обращается в нуль хотя бы при одном ненулевом наборе вещественных значений неизвестных, то эта форма вырожденна (т. е. ее дискриминант равен нулю).

1220* Назовем *композицией двух квадратичных форм*

$$f = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j \quad \text{и } g = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}x_ix_j$$

квадратичную форму $(f, g) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}b_{ij}x_ix_j.$

Доказать, что:

а) если формы f и g неотрицательны, то и форма (f, g) неотрицательна;

б) если формы f и g положительно определенные, то и форма (f, g) положительно определенная.

1221* Треугольным преобразованием называется линейное преобразование вида

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n, \\ y_2 &= x_2 + c_{23}x_3 + \cdots + c_{2n}x_n, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n &= x_n. \end{aligned}$$

Доказать, что:

а) треугольное преобразование невырожденно и преобразование, обратное для треугольного, снова треугольное;

б) угловые миноры D_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ (см. задачу 1208) квадратичной формы $f = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$ при треугольном преобразовании не изменяются.

1222* Доказать, что:

а) для того чтобы квадратичную форму $f = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$ ранга r треугольным преобразованием можно было привести к виду

$$f = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_r y_r^2, \tag{1}$$

где $\lambda_k \neq 0$ $(k = 1, 2, \ldots, r)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$D_k \neq 0 \quad (k \leqslant r), \qquad D_k = 0 \ (k > r), \tag{2}$$

где D_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ — угловые миноры формы f (см. задачу 1208);

б) указанный канонический вид (1) определен однозначно, причем его коэффициенты находятся по формулам

$$\lambda_k = \frac{D_k}{D_{k-1}} \quad (k = 1, 2, \ldots, r;\ D_0 = 1) \tag{3}$$

(теорема Сильвестера).

1223. Пусть угловые миноры квадратичной формы f ранга r удовлетворяют условиям (2) предыдущей задачи. Доказать, что положительный индекс инерции этой формы равен числу сохранений знака, а отрицательный индекс — числу перемен знака в ряду чисел

$$1 = D_0, D_1, D_2, \ldots, D_r.$$

Выяснить, что в следующих парах квадратичных форм одна форма является положительно определенной; найти невырожденное линейное преобразование, приводящее эту форму к нормальному, а другую форму той же пары к каноническому виду, и написать этот канонический вид (линейное преобразование определено не однозначно):

1224. $f = -4x_1x_2$,
$g = x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_2^2$.

1225. $f = x_1^2 + 26x_2^2 + 10x_1x_2$,
$g = x_1^2 + 56x_2^2 + 16x_1x_2$.

1226. $f = 8x_1^2 - 28x_2^2 + 14x_3^2 + 16x_1x_2 + 14x_1x_3 + 32x_2x_3$,
$g = x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_3$.

1227. $f = 2x_4^2 + x_1x_2 + x_1x_3 - 2x_2x_3 + 2x_2x_4$,
$g = \frac{1}{4}x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_4^2 + 2x_2x_4$.

1228. $f = x_1^2 + \frac{3}{2}x_2^2 - 2x_3^2 + x_4^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3$,
$g = x_1^2 + \frac{5}{4}x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2x_2x_3$.

1229. $f = x_1^2 - 15x_2^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 6x_2x_3$,
$g = x_1^2 + 17x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 14x_2x_3$.

1230*. Пусть дана пара форм f, g от одних и тех же неизвестных, причем $g > 0$. Доказать, что канонический вид

$$f = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2,$$

получаемый для формы f при любом линейном преобразовании, приводящем форму g к нормальному виду (т. е. к сумме квадратов), определяется однозначно с точностью до порядка слагаемых, причем его коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ являются корнями так называемого λ-уравнения пары форм f, g, а именно уравнения $|A - \lambda B| = 0$, где A и B — соответственно матрицы форм f и g.

Можно ли следующие пары квадратичных форм привести к каноническому виду одним вещественным невырожденным линейным преобразованием:

1231. $f = x_1^2 + 4x_1x_2 - x_2^2$, $g = x_1^2 + 6x_1x_2 + 5x_2^2$.

1232. $f = x_1^2 + x_1x_2 - x_2^2$, $g = x_1^2 - 2x_1x_2$.

1233. Пусть даны две положительно определенные формы f и g, и пусть одно невырожденное линейное преобразование неизвестных приводит форму f к виду $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2$, а форму g к нормальному виду, а второе преобразование, наоборот, форму f к нормальному виду, а форму g к виду $\sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i z_i^2$. Найти связь между коэффициентами $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ и $\mu_1, \ldots, \mu_n$.

Не разыскивая линейного преобразования, найти канонический вид данной формы f, к которому она приведется преобразованием, приводящим другую данную форму $g > 0$ к нормальному виду:

1234. $f = 21x_1^2 - 18x_2^2 + 6x_3^2 + 4x_1x_2 + 28x_1x_3 + 6x_2x_3$,
$g = 11x_1^2 + 6x_2^2 + 6x_3^2 - 12x_1x_2 + 12x_1x_3 - 6x_2x_3$.

1235. $f = 14x_1^2 - 4x_2^2 + 17x_3^2 + 8x_1x_2 - 40x_1x_3 - 26x_2x_3$,
$g = 9x_1^2 + 6x_2^2 + 6x_3^2 + 12x_1x_2 - 10x_1x_3 - 2x_2x_3$.

1236. Доказать, что две пары форм f_1, g_1 и f_2, g_2, где g_1 и g_2 положительно определены, тогда и только тогда эквивалентны (т. е. существует невырожденное линейное преобразование, переводящее f_1 в f_2 и g_1 в g_2), когда корни их λ-уравнений $|A_1 - \lambda B_1| = 0$ и $|A_2 - \lambda B_2| = 0$ совпадают.

Выяснить, эквивалентны ли существующие пары форм, не находя линейного преобразования одной пары в другую:

1237. $f_1 = 2x_1^2 + 3x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3$,
$g_1 = 3x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_3$,
$f_2 = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$,
$g_2 = x_1^2 + 6x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3$.

1238. $f_1 = 4x_1^2 + 6x_2^2 + 21x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 22x_2x_3$,
$g_1 = 4x_1^2 + 3x_2^2 + 6x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 6x_2x_3$,
$f_2 = 9x_1^2 + 6x_2^2 + 6x_3^2 - 6x_1x_2 - 6x_1x_3 + 12x_2x_3$,
$g_2 = 9x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 6x_1x_2 - 6x_1x_3 + 2x_2x_3$.

Найти невырожденное линейное преобразование, переводящее пару квадратичных форм f_1, g_1 в другую пару f_2, g_2 (искомое преобразование определено не однозначно):

1239. $f_1 = 2x_1^2 - 7x_2^2 + 2x_1x_2,$ $\quad f_2 = -7y_1^2 - 3y_2^2 - 12y_1y_2,$
$g_1 = 2x_1^2 + 13x_2^2 + 10x_1x_2,$ $\quad g_2 = 13y_1^2 + 25y_2^2 + 36y_1y_2.$

1240. $f_1 = 3x_1^2 + 2x_2^2 - 10x_1x_2,$ $\quad f_2 = -9y_1^2 - 20y_2^2 - 44y_1y_2,$
$g_1 = 2x_1^2 + 5x_2^2 - 6x_1x_2,$ $\quad g_2 = 29y_1^2 + 4y_2^2 + 20y_1y_2.$

1241. Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $g(x_1, x_2, \ldots .x_n)$ — две квадратичные формы, хотя бы одна из которых положительно определенна. Доказать, что «поверхности» $f = 1$ и $g = 1$ в n-мерном пространстве тогда и только тогда не пересекаются (т. е. не имеют общих точек), когда форма $f - g$ является определенной.

1242*. Доказать, что канонический вид $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2$, к которому квадратичная форма f приводится ортогональным преобразованием, определен однозначно, причем его коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ являются корнями характеристического уравнения $|A - \lambda E| = 0$ матрицы A формы f.

Найти канонический вид, к которому приводятся следующие квадратичные формы посредством ортогонального преобразования, не находя самого этого преобразования:

1243. $3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3.$

1244. $7x_1^2 + 7x_2^2 + 7x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3.$

1245. $x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3.$

1246. $3x_1^2 + 3x_2^2 - x_3^2 - 6x_1x_3 + 4x_2x_3.$ **1247*.** $\sum\limits_{k=1}^{n-1} x_k x_{k+1}.$

Найти ортогональное преобразование, приводящее следующие формы к каноническому виду (приведение к главным осям), и написать этот канонический вид (преобразование определено не однозначно):

1248. $6x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3.$

1249. $11x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 + 16x_1x_2 + 4x_1x_3 - 20x_2x_3.$

1250. $x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 - 6x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3.$

1251. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3.$

1252. $17x_1^2 + 14x_2^2 + 14x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3.$

1253. $x_1^2 - 5x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3.$

1254. $8x_1^2 - 7x_2^2 + 8x_3^2 + 8x_1x_2 - 2x_1x_3 + 8x_2x_3.$

1255. $2x_1x_2 - 6x_1x_3 - 6x_2x_4 + 2x_3x_4$.

1256. $5x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+5x_4^2-10x_1x_2+2x_1x_3+6x_1x_4+6x_2x_3+2x_2x_4-10x_3x_4$.

1257. $3x_1^2 + 8x_1x_2 - 3x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_3x_4 + x_4^2$.

1258. $x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_3^2 - 4x_3x_4 - 2x_4^2$.

1259. $9x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 8x_4^2 + 8x_2x_3 - 4x_2x_4 + 4x_3x_4$.

1260. $4x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_4^2 + 12x_4x_5 + x_5^2$.

1261. $4x_1^2 - 4x_2^2 - 8x_2x_3 + 2x_3^2 - 5x_4^2 + 6x_4x_5 + 3x_5^2$.

1262. $3x_1^2 + 8x_1x_2 - 3x_2^2 + 4x_3^2 - 6x_3x_4 - 4x_4^2 + 4x_5^2 + 4x_5x_6 + x_6^2$.

Найти канонический вид, к которому следующие формы приводятся ортогональным преобразованием, и выразить новые неизвестные через старые (искомое преобразование не однозначно):

1263. $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum\limits_{i<j}^{n} x_ix_j$.

1264. $\sum\limits_{i<j}^{n} x_ix_j$.

1265*. Назовем две квадратичные формы *ортогонально эквивалентными*, если от одной из них можно перейти к другой посредством ортогонального преобразования. Доказать, что для ортогональной эквивалентности двух форм необходимо и достаточно, чтобы характеристические многочлены их матриц совпадали.

Выяснить, какие из следующих квадратичных форм ортогонально эквивалентны:

1266. $f = 9x_2^2 + 9x_3^2 + 12x_1x_2 + 12x_1x_3 - 6x_2x_3$,
$g = -3y_1^2 + 6y_2^2 + 6y_3^2 - 12y_1y_2 + 12y_1y_3 + 6y_2y_3$,
$h = 11z_1^2 - 4z_2^2 + 11z_3^2 + 8z_1z_2 - 2z_1z_3 + 8z_2z_3$.

1267. $f = 7x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 8x_1x_2 - 8x_1x_3 - 16x_2x_3$,
$g = \frac{2}{3}y_1^2 - \frac{1}{3}y_2^2 - \frac{1}{3}y_3^2 - \frac{4}{3}y_1y_2 + \frac{4}{3}y_1y_3 + \frac{8}{3}y_2y_3$,
$h = z_2^2 - z_3^2 + 2\sqrt{2}z_1z_3$.

1268. Доказать, что любую вещественную симметрическую матрицу A можно представить в виде: $A = Q^{-1}BQ$, где Q — ортогональная и B — вещественная диагональная матрицы.

Для следующих матриц найти ортогональную матрицу Q и вещественную диагональную матрицу B такие, что данная матрица представляется в виде $Q^{-1}BQ$:

1269. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. **1270.** $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$.

1271*. Доказать, что все характеристические числа вещественной симметрической матрицы A тогда и только тогда лежат на отрезке $[a, b]$, когда квадратичная форма с матрицей $A - \lambda_0 E$ положительно определенна при любом $\lambda_0 < a$ и отрицательно определенна при любом $\lambda_0 > b$.

1272*. Пусть A и B — вещественные симметрические матрицы. Доказать, что если характеристические числа матрицы A лежат на отрезке $[a, b]$, а характеристические числа матрицы B — на отрезке $[c, d]$, то характеристические числа матрицы $A + B$ лежат на отрезке $[a + c, b + d]$.

1273. Доказать, что невырожденную вещественную квадратичную форму тогда и только тогда можно привести к нормальному виду ортогональным преобразованием, когда ее матрица ортогональна.

1274. Доказать, что матрица положительно определенной квадратичной формы тогда и только тогда ортогональна, когда эта форма есть сумма квадратов. Как это положение формулируется на языке матриц?

1275*. Доказать, что любую вещественную невырожденную матрицу A можно представить в виде $A = QB$, где Q — ортогональная матрица и B — треугольная матрица вида

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ 0 & 0 & b_{33} & \dots & b_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

с положительными элементами на главной диагонали, и такое представление единственно.

1276*. Доказать, что:

а) любую вещественную невырожденную матрицу A можно представить как в виде $A = Q_1 B_1$, так и в виде $A = B_2 Q_2$, где матрицы Q_1 и Q_2 — вещественные и ортогональные, а матрицы B_1 и B_2 — вещественные, симметрические и с положительными угловыми минорами. Каждое из этих представлений единственно;

б) любую комплексную невырожденную матрицу A можно представить как в виде $A = Q_1 B_1$, так и в виде $A = B_2 Q_2$, где матрицы

Q_1 и Q_2 унитарны, а матрицы B_1 и B_2 эрмитовы и с положительными угловыми минорами (матрица B называется эрмитовой, если $\overline{B}' = B$). Каждое из этих представлений единственно;

в) пусть A — симметрическая (или эрмитова) матрица с положительными угловыми минорами и B — ортогональная (соответственно унитарная) матрица. Доказать, что:

1) произведения AB и BA тогда и только тогда будут симметрическими (эрмитовыми) матрицами с положительными угловыми минорами, когда B — единичная матрица;

2) произведения AB и BA тогда и только тогда будут ортогональны (унитарны), когда A — единичная матрица.

Отдел 4

ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА И ИХ ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

§ 16. Аффинные векторные пространства

Ниже применяются следующие обозначения: векторы обозначаются малыми латинскими буквами жирного шрифта, а векторные пространства, их подпространства и линейные многообразия — большими латинскими буквами жирного шрифта. Координаты вектора при обычной записи пишутся в строку, заключенную в круглые скобки, например $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. В матричной записи векторы базиса записываются строкой в круглых скобках, а координаты вектора — столбцом в круглых скобках.

Матрицей перехода от старого базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots \boldsymbol{e}_n$ к новому $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \ldots \boldsymbol{e}'_n$ называется матрица $T = (t_{ij})_1^n$, по столбцам которой стоят координаты новых базисных векторов в старом базисе. Таким образом, старый и новый базисы связаны матричным равенством

$$(\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \ldots \boldsymbol{e}'_n) = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots \boldsymbol{e}_n) \cdot T. \tag{1}$$

При таких обозначениях координаты $x_1, x_2, \ldots, x_n$ вектора $\boldsymbol{x}$ в старом базисе связаны с координатами $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ того же вектора в новом базисе равенствами $x_i = \sum\limits_{j=1}^{n} t_{ij} x'_j$, или в матричной записи

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \cdots \\ x'_n \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Линейным подпространством векторного пространства $\boldsymbol{R}$ называется непустое (т. е. содержащее хотя бы один вектор) множество $\boldsymbol{L}$ векторов из $\boldsymbol{R}$, обладающее следующими свойствами:

1) сумма $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ двух любых векторов из $\boldsymbol{L}$ снова принадлежит $\boldsymbol{L}$;

2) произведение $\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{x}$ любого вектора $\boldsymbol{x}$ из $\boldsymbol{L}$ на любое число $\boldsymbol{\alpha}$ снова принадлежит $\boldsymbol{L}$.

Линейным многообразием векторного пространства $\boldsymbol{R}$ называется совокупность $\boldsymbol{P}$ векторов из $\boldsymbol{R}$, полученная прибавлением ко всем векторам какого-нибудь подпространства $\boldsymbol{L}$ из $\boldsymbol{R}$ одного и того же вектора $\boldsymbol{x}_0$. Эта связь $\boldsymbol{L}$ и $\boldsymbol{P}$ будет обозначаться так: $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{x}_0$ или $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{P} - \boldsymbol{x}_0$. Мы будем говорить, что линейное многообразие $\boldsymbol{P}$ получено из линейного подпространства $\boldsymbol{L}$ параллельным сдвигом на вектор $\boldsymbol{x}_0$.

Размерностью линейного многообразия называется размерность того линейного подпространства, параллельным сдвигом которого данное многообразие получено. Корректность этого определения вытекает из утверждения задачи 1331. Одномерные линейные многообразия будут называться прямыми, а двумерные — плоскостями.

Суммой двух линейных подпространств $\boldsymbol{L}_1$ и $\boldsymbol{L}_2$ векторного пространства $\boldsymbol{R}$ называется совокупность $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{L}_1 + \boldsymbol{L}_2$ всех векторов из $\boldsymbol{R}$, каждый из которых представляется в виде $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2$, где $\boldsymbol{x}_1 \in \boldsymbol{L}_1$ и $\boldsymbol{x}_2 \in \boldsymbol{L}_2$. Здесь запись $a \in A$ обозначает: «элемент a принадлежит множеству A». *Пересечением* двух линейных подпространств $\boldsymbol{L}_1$ и $\boldsymbol{L}_2$ векторного пространства $\boldsymbol{R}$ называется совокупность $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{L}_1 \cap \boldsymbol{L}_2$ всех векторов из $\boldsymbol{R}$, каждый из которых принадлежит как $\boldsymbol{L}_1$, так и $\boldsymbol{L}_2$.

Прямой суммой двух линейных подпространств $\boldsymbol{L}_1$ и $\boldsymbol{L}_2$ векторного пространства $\boldsymbol{R}$ называется сумма этих подпространств при условии, что их пересечение состоит лишь из нулевого вектора, т. е. $\boldsymbol{L}_1 \cap \boldsymbol{L}_2 = 0$. В случае прямой суммы будем писать $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{L}_1 + \boldsymbol{L}_2$.

И, наконец, n-мерное векторное пространство будет обозначаться через $\boldsymbol{R}_n$. При этом, если не оговорено противное, подразумевается, что за основное поле взято поле вещественных чисел, т. е. $\boldsymbol{R}_n$ состоит из всех n-мерных векторов с любыми вещественными координатами.

Векторы $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ и $\boldsymbol{x}$ заданы своими координатами в некотором базисе. Показать, что векторы $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ сами образуют базис и найти координаты вектора $\boldsymbol{x}$ в этом базисе:

1277. $\boldsymbol{e}_1 = (1, 1, 1)$, $\boldsymbol{e}_2 = (1, 1, 2)$, $\boldsymbol{e}_3 = (1, 2, 3)$; $\boldsymbol{x} = (6, 9, 14)$.

1278. $\boldsymbol{e}_1 = (2, 1, -3)$, $\boldsymbol{e}_2 = (3, 2, -5)$, $\boldsymbol{e}_3 = (1, -1, 1)$; $\boldsymbol{x} = (6, 2, -7)$.

1279. $\boldsymbol{e}_1 = (1, 2, -1, -2)$, $\boldsymbol{e}_2 = (2, 3, 0, -1)$, $\boldsymbol{e}_3 = (1, 2, 1, 4)$, $\boldsymbol{e}_4 = (1, 3, -1, 0)$; $\boldsymbol{x} = (7, 14, -1, 2)$.

Доказать, что каждая из двух систем векторов является базисом и найти связь координат одного и того же вектора в этих двух базисах:

1280. $\boldsymbol{e}_1 = (1, 2, 1)$, $\boldsymbol{e}_2 = (2, 3, 3)$, $\boldsymbol{e}_3 = (3, 7, 1)$; $\boldsymbol{e}'_1 = (3, 1, 4)$, $\boldsymbol{e}'_2 = (5, 2, 1)$, $\boldsymbol{e}'_3 = (1, 1, -6)$.

1281. $\boldsymbol{e}_1 = (1, 1, 1, 1)$, $\boldsymbol{e}_2 = (1, 2, 1, 1)$, $\boldsymbol{e}_3 = (1, 1, 2, 1)$, $\boldsymbol{e}_4 = (1, 3, 2, 3)$; $\boldsymbol{e}'_1 = (1, 0, 3, 3)$, $\boldsymbol{e}'_2 = (-2, -3, -5, -4)$, $\boldsymbol{e}'_3 = (2, 2, 5, 4)$, $\boldsymbol{e}'_4 = (-2, -3, -4, -4)$.

1282. Найти координаты многочлена

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

а) в базисе $1, x, x^2, \ldots, x^n$;

б) в базисе $1, x - \alpha, (x - \alpha)^2, \ldots, (x - \alpha)^n$, выяснив, что последние многочлены действительно образуют базис.

1283. Найти матрицу перехода от базиса $1, x, x^2, \ldots, x^n$ к базису $1, x-\alpha, (x-\alpha)^2, \ldots, (x-\alpha)^n$ пространства многочленов степени, меньшей или равной n.

1284. Как изменится матрица перехода от одного базиса к другому, если:
а) поменять местами два вектора первого базиса?
б) поменять местами два вектора второго базиса?
в) записать векторы обоих базисов в обратном порядке?

Является ли линейным подпространством соответствующего векторного пространства каждая из следующих совокупностей векторов:

1285. Все векторы n-мерного векторного пространства, координаты которых — целые числа?

1286. Все векторы плоскости, каждый из которых лежит на одной из осей координат Ox и Oy?

1287. Все векторы плоскости, концы которых лежат на данной прямой (начало любого вектора, если не оговорено противное, предполагается совпадающим с началом координат)?

1288. Все векторы плоскости, начала и концы которых лежат на данной прямой?

1289. Все векторы трехмерного пространства, концы которых не лежат на данной прямой?

1290. Все векторы плоскости, концы которых лежат в первой четверти системы координат?

1291. Все векторы из $\boldsymbol{R}_n$, координаты которых удовлетворяют уравнению $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$?

1292. Все векторы из $\boldsymbol{R}_n$, координаты которых удовлетворяют уравнению $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$?

1293. Все векторы, являющиеся линейными комбинациями данных векторов: $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k$, из $\boldsymbol{R}_n$?

1294. Перечислить все линейные подпространства трехмерного векторного пространства.

1295. Пусть линейное подпространство $\boldsymbol{L}_1$ содержится в линейном подпространстве $\boldsymbol{L}_2$. Доказать, что размерность $\boldsymbol{L}_1$ не выше размерности $\boldsymbol{L}_2$, причем размерности равны тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{L}_1 = \boldsymbol{L}_2$. Верно ли последнее утверждение для любых двух линейных подпространств данного пространства?

1296. Доказать, что если сумма размерностей двух линейных подпространств n-мерного пространства больше n, то эти подпространства имеют общий ненулевой вектор.

Доказать, что следующие системы векторов образуют линейные подпространства, и найти их базис и размерность:

1297. Все n-мерные векторы, у которых первая и последняя координаты равны между собой.

1298. Все n-мерные векторы, у которых координаты с четными номерами равны нулю.

1299. Все n-мерные векторы, у которых координаты с четными номерами равны между собой.

1300. Все n-мерные векторы вида $(\alpha, \beta, \alpha, \beta, \alpha, \beta, \ldots)$, где α и β — любые числа.

1301. Доказать, что все квадратные матрицы порядка n с вещественными элементами (или элементами из любого поля P) образуют векторное пространство над полем вещественных чисел (соответственно над полем P), если за операции взять сложение матриц и умножение матрицы на число. Найти базис и размерность этого пространства.

1302. Доказать, что все многочлены степени $\leqslant n$ от одного неизвестного с вещественными коэффициентами (или с коэффициентами из любого поля P) образуют векторное пространство, если за операции взять обычные сложение многочленов и умножение многочлена на число. Найти базис и размерность этого пространства.

1303. Доказать, что все симметрические матрицы образуют линейное подпространство пространства всех квадратных матриц порядка n. Найти базис и размерность этого подпространства.

1304. Доказать, что кососимметрические матрицы образуют линейное подпространство пространства всех квадратных матриц порядка n. Найти базис и размерность этого подпространства.

1305. Доказать, что если линейное подпространство $\boldsymbol{L}$ пространства многочленов степени $\leqslant n$ содержит хотя бы один многочлен степени k для $k = 0, 1, 2, \ldots, p$, но не содержит многочленов степени $k > p$, то оно совпадает с подпространством $\boldsymbol{L}_p$ всех многочленов степени $\leqslant p$.

1306. Пусть f — неотрицательная квадратичная форма от n неизвестных ранга r. Доказать, что все решения уравнения $f = 0$ образуют $(n - r)$-мерное линейное подпространство пространства $\boldsymbol{R}_n$.

1307. Доказать, что решения любой системы однородных линейных уравнений с n неизвестными ранга r образуют линейное подпространство n-мерного пространства $\boldsymbol{R}_n$ размерности $d = n - r$ и, обратно, для любого линейного подпространства $\boldsymbol{L}$ размерности d пространства $\boldsymbol{R}_n$ существует система однородных линейных уравнений с n неизвестными ранга $r = n - d$, решения которой заполняют в точности данное подпространство $\boldsymbol{L}$.

1308. Найти какой-нибудь базис и размерность линейного подпространства $\boldsymbol{L}$ пространства $\boldsymbol{R}_n$, если $\boldsymbol{L}$ задано уравнением $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$.

1309. Доказать, что размерность линейного подпространства $\boldsymbol{L}$, натянутого на векторы $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ (т. е. подпространство всех линейных комбинаций данных векторов), равна рангу матрицы, составленной из координат данных векторов в каком-нибудь базисе, а за базис подпространства L можно взять любую максимальную линейно независимую подсистему системы данных векторов.

Найти размерность и базис линейных подпространств, натянутых на следующие системы векторов:

1310. $a_1 = (1,0,0,-1)$, $a_2 = (2,1,1,0)$, $a_3 = (1,1,1,1)$, $a_4 = (1,2,3,4)$, $a_5 = (0,1,2,3)$.

1311. $a_1 = (1,1,1,1,0)$, $a_2 = (1,1,-1,-1,-1)$, $a_3 = (2,2,0,0,-1)$, $a_4 = (1,1,5,5,2)$, $a_5 = (1,-1,-1,0,0)$.

Найти системы линейных уравнений, задающие линейные подпространства, натянутые на следующие системы векторов:

1312. $a_1 = (1,-1,1,0)$, $a_2 = (1,1,0,1)$, $a_3 = (2,0,1,1)$.

1313. $a_1 = (1,-1,1,-1,1)$, $a_2 = (1,1,0,0,3)$, $a_3 = (3,1,1,-1,7)$, $a_4 = (0,2,-1,1,2)$.

1314. Доказать, что сумма и пересечение двух линейных подпространств пространства R_n сами являются линейными подпространствами того же пространства.

1315. Доказать, что сумма $S = L_1 + L_2$ двух линейных подпространств пространства R_n равна пересечению всех линейных подпространств из R_n, содержащих как L_1, так и L_2.

1316. Доказать, что сумма размерностей двух линейных подпространств пространства R_n равна размерности суммы плюс размерность пересечения этих подпространств.

Найти размерность s суммы и размерность d пересечения линейных подпространств: L_1, натянутого на векторы $a_1, a_2, \ldots, a_k$, и L_2, натянутого на векторы $b_1, b_2, \ldots, b_l$:

1317. $a_1 = (1,2,0,1)$, $a_2 = (1,1,1,0)$; $b_1 = (1,0,1,0)$, $b_2 = (1,3,0,1)$.

1318. $a_1 = (1,1,1,1)$, $a_2 = (1,-1,1,-1)$, $a_3 = (1,3,1,3)$; $b_1 = (1,2,0,2)$, $b_2 = (1,2,1,2)$, $b_3 = (3,1,3,1)$.

1319*. Пусть L_1 — линейное подпространство пространства R_n с базисом $a_1, a_2, \ldots, a_k$ и L_2 — линейное подпространство того же пространства с базисом $b_1, b_2, \ldots, b_l$.

Доказать следующие правила построения базиса суммы $S = L_1 + L_2$ и базиса пересечения $D = L_1 \cap L_2$:

1) базисом суммы S служит максимальная линейно независимая подсистема системы векторов $a_1, \ldots, a_k$, $b_1, \ldots, b_l$. Его построение сводится к вычислению ранга матрицы из координат этой последней системы векторов;

2) базис суммы S можно получить, добавляя к линейно независимым векторам $a_1, \ldots, a_k$ некоторые из векторов $b_1, \ldots, b_l$ (задача

659). Меняя, если потребуется, порядок последних векторов, можем считать, что векторы $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$, $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_{s-k}$ образуют базу $\boldsymbol{S}$.

Равенство

$$x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_k\boldsymbol{a}_k = y_1\boldsymbol{b}_1 + \cdots + y_l\boldsymbol{b}_l \tag{1}$$

эквивалентно системе n однородных линейных уравнений с $k + l$ неизвестными $x_1, \ldots, x_k$, $y_1, \ldots, y_l$ ранга s. Так как первые s столбцов матрицы системы линейно независимы и, значит, хотя бы один минор порядка s в этих столбцах отличен от нуля, то за свободные неизвестные можно принять последние $k + l - s = d$ неизвестных $y_{s-k+1}, \ldots, y_l$. Поэтому можно найти фундаментальную систему решений

$$x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{ik}, y_{i1}, y_{i2}, \ldots, y_{il}, (i = 1, 2, \ldots, d) \tag{2}$$

для системы уравнений (1) такую, что

$$\begin{vmatrix} y_{1,s-k+1} & \cdots & y_{1,l} \\ \dots & \dots & \dots \\ y_{d,s-k+1} & \cdots & y_{d,l} \end{vmatrix} \neq 0; \tag{3}$$

тогда базисом пересечения $\boldsymbol{D}$ является система векторов

$$\boldsymbol{c}_i = \sum_{j=1}^{i} y_{ij}\boldsymbol{b}_j \quad (i = 1, 2, \ldots, d). \tag{4}$$

Замечание. Так как $d = k + l - s$, то этим дано второе решение задачи 1316.

Найти базисы суммы и пересечения линейных подпространств, натянутых на системы векторов $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ и $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_l$:

1320. $\boldsymbol{a}_1 = (1, 2, 1)$, $\boldsymbol{a}_2 = (1, 1, -1)$, $\boldsymbol{a}_3 = (1, 3, 3)$;
$\boldsymbol{b}_1 = (2, 3, -1)$, $\boldsymbol{b}_2 = (1, 2, 2)$, $\boldsymbol{b}_3 = (1, 1, -3)$.

1321. $\boldsymbol{a}_1 = (1, 2, 1, -2)$, $\boldsymbol{a}_2 = (2, 3, 1, 0)$, $\boldsymbol{a}_3 = (1, 2, 2, -3)$;
$\boldsymbol{b}_1 = (1, 1, 1, 1)$, $\boldsymbol{b}_2 = (1, 0, 1, -1)$, $\boldsymbol{b}_3 = (1, 3, 0, -4)$.

1322. $\boldsymbol{a}_1 = (1, 1, 0, 0)$, $\boldsymbol{a}_2 = (0, 1, 1, 0)$, $\boldsymbol{a}_3 = (0, 0, 1, 1)$;
$\boldsymbol{b}_1 = (1, 0, 1, 0)$, $\boldsymbol{b}_2 = (0, 2, 1, 1)$, $\boldsymbol{b}_3 = (1, 2, 1, 2)$.

1323. Доказать, что если размерность суммы двух линейных подпространств пространства $\boldsymbol{R}_n$ на единицу больше размерности их пересечения, то сумма совпадает с одним из этих подпространств, а пересечение — с другим.

1324. Пусть $\boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{L}_1$, $\boldsymbol{L}_2$ — линейные подпространства пространства $\boldsymbol{R}_n$. Доказать, что $\boldsymbol{L}$ тогда и только тогда будет прямой суммой $\boldsymbol{L}_1$, $\boldsymbol{L}_2$, когда выполняются условия:

а) $\boldsymbol{L}$ содержит $\boldsymbol{L}_1$ и $\boldsymbol{L}_2$;

б) каждый вектор $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{L}$ однозначно представляется в виде $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2$, где $\boldsymbol{x}_1 \in \boldsymbol{L}_1$, $\boldsymbol{x}_2 \in \boldsymbol{L}_2$. Иными словами, сумма $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}_1 + \boldsymbol{L}_2$

тогда и только тогда является прямой суммой, когда для любого вектора $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{L}$ представление $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2$, где $\boldsymbol{x}_1 \in \boldsymbol{L}_1$, $\boldsymbol{x}_2 \in \boldsymbol{L}_2$, однозначно.

1325. Доказать, что сумма $\boldsymbol{S}$ линейных подпространств $\boldsymbol{L}_1$ и $\boldsymbol{L}_2$ тогда и только тогда будет прямой суммой, когда хотя бы один вектор $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{S}$ однозначно представляется в виде $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2$, где $\boldsymbol{x}_1 \in \boldsymbol{L}_1$, $\boldsymbol{x}_2 \in \boldsymbol{L}_2$.

1326. Пусть линейное подпространство $\boldsymbol{L}$ является прямой суммой линейных подпространств $\boldsymbol{L}_1$ и $\boldsymbol{L}_2$. Доказать, что размерность $\boldsymbol{L}$ равна сумме размерностей $\boldsymbol{L}_1$ и $\boldsymbol{L}_2$, причем любые базисы $\boldsymbol{L}_1$ и $\boldsymbol{L}_2$ дают вместе базис $\boldsymbol{L}$.

1327. Доказать, что для любого линейного подпространства $\boldsymbol{L}_1$ пространства $\boldsymbol{R}_n$ можно найти другое подпространство $\boldsymbol{L}_2$, такое, что все пространство $\boldsymbol{R}_n$ будет прямой суммой $\boldsymbol{L}_1$ и $\boldsymbol{L}_2$.

1328. Доказать, что пространство $\boldsymbol{R}_n$ есть прямая сумма двух линейных подпространств: $\boldsymbol{L}_1$, заданного уравнением $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$, и $\boldsymbol{L}_2$, заданного системой уравнений $x_1 = x_2 = \dots = x_n$. Найти проекции единичных векторов

$$\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, 0, \dots, 0),\ \boldsymbol{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots,\ \boldsymbol{e}_n = (0, 0, 0, \dots, 1)$$

на $\boldsymbol{L}_1$ параллельно $\boldsymbol{L}_2$ и на $\boldsymbol{L}_2$ параллельно $\boldsymbol{L}_1$.

1329. Доказать, что пространство всех квадратных матриц порядка n есть прямая сумма линейных подпространств $\boldsymbol{L}_1$ — симметрических и $\boldsymbol{L}_2$ — кососимметрических матриц. Найти проекции A_1 и A_2 матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

на $\boldsymbol{L}_1$ параллельно $\boldsymbol{L}_2$ и на $\boldsymbol{L}_2$ параллельно $\boldsymbol{L}_1$.

1330. Доказать, что решения любой совместной системы линейных уравнений с n неизвестными ранга r образуют линейное многообразие пространства $\boldsymbol{R}_n$ размерности $d = n - r$ и, обратно, для любого d-мерного линейного многообразия $\boldsymbol{P}$ пространства $\boldsymbol{R}_n$ существует система линейных уравнений с n неизвестными ранга $r = n - d$, решения которой заполняют в точности данное многообразие $\boldsymbol{P}$.

1331. Пусть даны два линейных многообразия (см. введение) $\boldsymbol{P}_1 = \boldsymbol{L}_1 + \boldsymbol{x}_1$ и $\boldsymbol{P}_2 = \boldsymbol{L}_2 + \boldsymbol{x}_2$, где $\boldsymbol{L}_1$, $\boldsymbol{L}_2$ — линейные подпространства и $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ — векторы пространства $\boldsymbol{R}_n$. Доказать, что $\boldsymbol{P}_1 = \boldsymbol{P}_2$ тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{L}_1 = \boldsymbol{L}_2$ и $\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2 \in \boldsymbol{L}_1$. Таким образом, линейное пространство, параллельным сдвигом которого получается данное многообразие, определено однозначно.

1332. Доказать, что если $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{x}_0$, где $\boldsymbol{L}$ — линейное подпространство и $\boldsymbol{x}_0$ — вектор пространства $\boldsymbol{R}_n$, то вектор $\boldsymbol{x}_0$ принадлежит многообразию $\boldsymbol{P}$ и после замены этого вектора любым вектором $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{P}$ получается то же самое многообразие $\boldsymbol{P}$.

1333. Доказать, что если прямая имеет две общие точки с линейным многообразием, то вся она содержится в этом многообразии (при этом точка отождествляется с вектором, имеющим те же координаты, т. е. идущим из начала координат в данную точку).

1334*. Доказать, что любые две прямые пространства $\boldsymbol{R}_n$ ($n \geqslant 3$) содержатся в некотором трехмерном линейном многообразии, лежащем в $\boldsymbol{R}_n$.

1335. Найти условия, необходимые и достаточные для того, чтобы две прямые $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}_0 + \boldsymbol{a}_1 t$ и $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_0 + \boldsymbol{b}_1 t$ пространства $\boldsymbol{R}_n$ ($n > 1$) лежали в одной плоскости.

1336. Найти необходимые и достаточные условия для того, чтобы две прямые $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}_0 + \boldsymbol{a}_1 t$ и $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_0 + \boldsymbol{b}_1 t$ проходили через одну точку, но не совпадали. Указать метод отыскания точки пересечения этих прямых.

Найти точку пересечения двух прямых $\boldsymbol{a}_0 + \boldsymbol{a}_1 t$ и $\boldsymbol{b}_0 + \boldsymbol{b}_1 t$:

1337. $\boldsymbol{a}_0 = (2, 1, 1, 3, -3)$, $\boldsymbol{a}_1 = (2, 3, 1, 1, -1)$;
$\boldsymbol{b}_0 = (1, 1, 2, 1, 2)$, $\boldsymbol{b}_1 = (1, 2, 1, 0, 1)$.

1338. $\boldsymbol{a}_0 = (3, 1, 2, 1, 3)$, $\boldsymbol{a}_1 = (1, 0, 1, 1, 2)$;
$\boldsymbol{b}_0 = (2, 2, -1, -1, -2)$, $\boldsymbol{b}_1 = (2, 1, 0, 1, 1)$.

1339. Найти условия, необходимые и достаточные для того, чтобы через точку, заданную вектором $\boldsymbol{c}$, можно было провести единственную прямую, пересекающую две данные прямые $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}_0 + \boldsymbol{a}_1 t$ и $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_0 + \boldsymbol{b}_1 t$. Указать метод построения такой прямой и точек пересечения ее с данными прямыми.

Найти прямую, проходящую через точку, заданную вектором $\boldsymbol{c}$ и пересекающую прямые $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}_0 + \boldsymbol{a}_1 t$, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_0 + \boldsymbol{b}_1 t$, и найти точки пересечения искомой прямой с двумя данными прямыми:

1340. $\boldsymbol{a}_0 = (1, 0, -2, 1)$, $\boldsymbol{a}_1 = (1, 2, -1, -5)$;
$\boldsymbol{b}_0 = (0, 1, 1 - 1)$, $\boldsymbol{b}_1 = (2, 3, -2, -4)$; $\boldsymbol{c} = (8, 9, -11, -15)$.

1341. $\boldsymbol{a}_0 = (1, 1, 1, 1)$, $\boldsymbol{a}_1 = (1, 2, 1, 0)$;
$\boldsymbol{b}_0 = (2, 2, 3, 1)$, $\boldsymbol{b}_1 = (1, 0, 1, 3)$; $\boldsymbol{c} = (4, 5, 2, 7)$.

1342. Доказать, что любые две плоскости пространства $\boldsymbol{R}_n$ содержатся в линейном многообразии размерности $\leqslant 5$.

1343. Доказать, что два линейных многообразия пространства $\boldsymbol{R}_n$ размерностей k и l соответственно содержатся в линейном многообразии размерности $\leqslant k + l + 1$.

1344. Доказать, что если два линейных многообразия — $\boldsymbol{P}$ размерности k и $\boldsymbol{Q}$ размерности l — пространства $\boldsymbol{R}_n$ имеют общую точку, причем $k+l > n$, то их пересечение есть линейное многообразие размерности $\geqslant k+l-n$. Какие теоремы вытекают отсюда для трехмерного и четырехмерного пространств?

1345. Описать все случаи взаимного расположения двух плоскостей $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}_0 + \boldsymbol{a}_1 t_1 + \boldsymbol{a}_2 t_2$ и $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_0 + \boldsymbol{b}_1 t_1 + \boldsymbol{b}_2 t_2$ в n-мерном пространстве и указать необходимые и достаточные условия для каждого из этих случаев.

1346. Пусть

$$\boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{a}_1 \ldots, \boldsymbol{a}_k \tag{1}$$

— любые $k+1$ векторов пространства $\boldsymbol{R}_n$. Доказать, что все векторы вида

$$\boldsymbol{x} = \alpha_0 \boldsymbol{a}_0 + \alpha_1 \boldsymbol{a}_1 + \cdots + \alpha_k \boldsymbol{a}_k, \tag{2}$$

где числа $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k$ удовлетворяют условию

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_k = 1, \tag{3}$$

образуют линейное многообразие $\boldsymbol{P}$, размерность которого равна рангу системы векторов

$$\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_0, \ldots, \boldsymbol{a}_k - \boldsymbol{a}_0. \tag{4}$$

$\boldsymbol{P}$ есть многообразие наименьшей размерности, содержащее все векторы (1). Роль $\boldsymbol{a}_0$ может играть любой из этих векторов. Обратно, для любого k-мерного линейного многообразия $\boldsymbol{P}$ существует система $k+1$ векторов (1) такая, что $\boldsymbol{P}$ состоит из всех векторов вида (2) при условии (3), причем система векторов (4) линейно независима.

1347*. *Отрезком с концами в точках, заданных векторами* $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ *пространства* $\boldsymbol{R}_n$, называется совокупность всех точек, заданных векторами вида $\boldsymbol{x} = \alpha_1 \boldsymbol{a}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{a}_2$, где $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ и $0 \leqslant \alpha_1 \leqslant 1$, $0 \leqslant \alpha_2 \leqslant 1$. Множество M точек пространства $\boldsymbol{R}_n$ называется *выпуклым*, если для любых двух точек из M весь отрезок с концами в этих точках содержится в M. Показать, что пересечение любой системы выпуклых множеств пространства $\boldsymbol{R}_n$ есть выпуклое множество. *Выпуклым замыканием данного множества* A *из* $\boldsymbol{R}_n$ называется пересечение всех выпуклых множеств из $\boldsymbol{R}_n$, содержащих A. Доказать, что выпуклое замыкание конечной системы точек из $\boldsymbol{R}_n$, заданных векторами $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$, состоит из всех точек, заданных векторами вида $\boldsymbol{x} = \alpha_1 \boldsymbol{a}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \alpha_k \boldsymbol{a}_k$, где $\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$ и $0 \leqslant \alpha_i \leqslant 1$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$.

1348.* Найти форму тела, полученного в сечении четырехмерного параллелепипеда (в случае прямоугольной декартовой системы координат — четырехмерного куба) $|x_i| \leqslant 1$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ трехмерной гиперплоскостью с уравнением $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$.

1349.* Найти проекцию четырехмерного тетраэдра, ограниченного координатными трехмерными подпространствами и гиперплоскостью $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$, на подпространство $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ параллельно прямой $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$.

1350.* Доказать, что диагональ n-мерного параллелепипеда делится на n равных частей точками пересечения ее с $(n-1)$-мерными линейными многообразиями, проведенными через все вершины параллелепипеда параллельно линейному многообразию, проведенному через концы всех n ребер, начало которых совпадает с одним из концов данной диагонали.

§ 17. Евклидовы и унитарные пространства

Евклидовым (соответственно *унитарным*) пространством $\boldsymbol{R}_n$ называется n-мерное векторное пространство над полем вещественных (соответственно комплексных) чисел, в котором каждой паре векторов $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ поставлено в соответствие вещественное (соответственно комплексное) число $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, называемое скалярным произведением этих векторов, причем выполнены условия:

а) в случае евклидова пространства:

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}), \tag{1}$$

$$(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}), \tag{2}$$

$$(\alpha\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \alpha(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \tag{3}$$

для любого вещественного числа α;

$$\text{если } \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}, \text{ то } (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) > 0; \tag{4}$$

б) в случае унитарного пространства:

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \overline{(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})}, \tag{1'}$$

$$(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}), \tag{2'}$$

что совпадает с (2),

$$(\alpha\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \alpha(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), \tag{3'}$$

для любого комплексного числа α;

$$\text{если } \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}, \text{ то } (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) > 0, \tag{4'}$$

что совпадает с (4).

Базис (или вообще система векторов) $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ называется *ортонормированным*, если

$$(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

Если нет других указаний, то координаты всех векторов предполагаются взятыми в ортонормированном базисе.

Векторы $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ называются *ортогональными*, если $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$.

Процессом ортогонализации системы векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_s$ называется переход от этой системы к новой системе $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots \boldsymbol{b}_s$, построенной следующим образом: $\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_1$; $\boldsymbol{b}_k = \boldsymbol{a}_k - \sum\limits_{i=1}^{k-1} c_i \boldsymbol{b}_i$ $(k = 2, 3, \ldots, s)$, где $c_i = \dfrac{(\boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{b}_i)}{(\boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{b}_i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, k-1)$, если $\boldsymbol{b}_i \neq \boldsymbol{0}$, и c_i — любое число, если $\boldsymbol{b}_i = \boldsymbol{0}$.

Значение c_i получается умножением равенства, выражающего $\boldsymbol{b}_k$ через $\boldsymbol{a}_k$ и $\boldsymbol{b}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k-1)$, на $\boldsymbol{b}_i$ при условии, что $(\boldsymbol{b}_k, \boldsymbol{b}_i) = 0$.

1351. Доказать, что из свойств скалярного произведения, указанных во введении, вытекают следующие свойства:

а) $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_1) + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_2)$ для любых векторов евклидова (или унитарного) пространства;

б) $(\boldsymbol{x}, \alpha\boldsymbol{y}) = \alpha(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ для любых векторов $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ евклидова пространства и любого вещественного числа α;

в) $(\boldsymbol{x}, \alpha\boldsymbol{y}) = \overline{\alpha}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ для любых векторов $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ унитарного пространства и любого комплексного числа α;

г) $(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}) - (\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y})$;

д) $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0}) = 0$.

1352. Какими свойствами должна обладать билинейная форма $g = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$ для того, чтобы ее значение от координат двух любых векторов

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad \boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots y_n)$$

вещественного векторного пространства $\boldsymbol{R}_n$ в некотором базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, ..., $\boldsymbol{e}_n$ можно было принять за скалярное произведение этих векторов, определяющее n-мерное евклидово пространство? Чему равны скалярные произведения векторов выбранного базиса?

1353. Пусть дана эрмитова билинейная форма $g = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i \overline{y}_j$.

Черта над неизвестным y_j означает, что при замене y_j его числовым значением α_j следует $\overline{y}_j$ заменять комплексно сопряженным значением $\overline{\alpha}_j$. Пусть матрица $A = (a_{ij})_1^n$ этой формы эрмитова, т. е. $\overline{a}_{ij} = a_{ji}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$. Показать, что значения соответствующей эрмитовой квадратичной формы $f = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i\overline{x}_j$ при любых комплексных значениях x_1, x_2, $\ldots x_n$ вещественны, и если форма f положительно определенна, т.е. $f > 0$ при любых комплексных значениях x_1, x_2, $\ldots x_n$, не все из которых равны нулю, то задание скалярного произведения равенством $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i\overline{y}_j$, где $x_1, \ldots, x_n$ и $y_1, \ldots, y_n$ — координаты соответственно векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ в некотором базисе $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ комплексного векторного пространства $\boldsymbol{R}_n$, превращает это пространство в унитарное, причем любое унитарное пространство можно получить таким путем.

1354. Доказать, что скалярное произведение двух любых векторов:

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad \boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

евклидова пространства тогда и только тогда выражается равенством

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n,$$

когда базис, в котором взяты координаты, является ортонормированным.

1355. Пусть $\boldsymbol{L}_1$ и $\boldsymbol{L}_2$ — линейные подпространства евклидова (или унитарного) пространства $\boldsymbol{R}_n$, причем размерность $\boldsymbol{L}_1$ меньше размерности $\boldsymbol{L}_2$; доказать, что в $\boldsymbol{L}_2$ найдется ненулевой вектор, ортогональный ко всем векторам из $\boldsymbol{L}_1$.

1356. Доказать, что любая система попарно ортогональных ненулевых векторов (в частности, любая ортонормированная система) линейно независима.

Проверить, что векторы следующих систем попарно ортогональны, и дополнить их до ортогональных базисов:

1357. $(1,\ -2,\ 2,\ -3)$, $(2,\ -3,\ 2,\ 4)$.

1358. $(1,\ 1,\ 1,\ -2)$, $(1,\ 2,\ 3,\ -3)$.

Найти векторы, дополняющие следующие системы векторов до ортонормированных базисов:

1359. $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.

1360. $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

Применяя процесс ортогонализации (см. введение), построить ортогональный базис подпространства, натянутого на данную систему векторов:

1361. $(1,2,\ \ 2,-1)$, $(1,1,-5,\ \ 3)$, $(3,2,\ \ 8,-7)$.

1362. $(1,1,-1,-2)$, $(5,8,-2,-3)$, $(3,9,\ \ 3,\ \ 8)$.

1363. $(2,1,\ \ 3,-1)$, $(7,4,\ \ 3,-3)$, $(1,1,-6,\ \ 0)$, $(5,7,\ \ 7,\ \ 8)$.

1364. *Ортогональным дополнением подпространства* $\boldsymbol{L}$ *пространства* $\boldsymbol{R}_n$ называется совокупность $\boldsymbol{L}^*$ всех векторов из $\boldsymbol{R}_n$, каждый из которых ортогонален ко всем векторам из $\boldsymbol{L}$.

Доказать, что:

а) $\boldsymbol{L}^*$ является линейным подпространством пространства $\boldsymbol{R}_n$;

б) сумма размерностей $\boldsymbol{L}$ и $\boldsymbol{L}^*$ равна n;

в) пространство $\boldsymbol{R}_n$ есть прямая сумма подпространств $\boldsymbol{L}$ и $\boldsymbol{L}^*$.

1365. Доказать, что ортогональное дополнение к линейному подпространству пространства $\boldsymbol{R}_n$ обладает свойствами:

а) $(\boldsymbol{L}^*)^* = \boldsymbol{L}$; б) $(\boldsymbol{L}_1 + \boldsymbol{L}_2)^* = \boldsymbol{L}_1^* \cap \boldsymbol{L}_2^*$;

в) $(\boldsymbol{L}_1 \cap \boldsymbol{L}_2)^* = \boldsymbol{L}_1^* + \boldsymbol{L}_2^*$; г) $\boldsymbol{R}_n^* = \boldsymbol{O}, \boldsymbol{O}^* = \boldsymbol{R}_n$.

Здесь $\boldsymbol{O}$ — нулевое подпространство, содержащее лишь нулевой вектор $\mathbf{0}$.

1366. Найти базис ортогонального дополнения $\boldsymbol{L}^*$ подпространства $\boldsymbol{L}$, натянутого на векторы:

$$\boldsymbol{a}_1 = (1,0,2,1),\ \boldsymbol{a}_2 = (2,1,2,3),\ \boldsymbol{a}_3 = (0,1,-2,1).$$

1367. Линейное подпространство $\boldsymbol{L}$ задано уравнениями:

$$\begin{aligned} 2x_1 + \ \ x_2 + 3x_3 - \ \ x_4 &= 0,\\ 3x_1 + 2x_2 \qquad\quad - 2x_4 &= 0,\\ 3x_1 + \ \ x_2 + 9x_3 - \ \ x_4 &= 0. \end{aligned}$$

Найти уравнения, задающие ортогональное дополнение $\boldsymbol{L}^*$.

1368. Показать, что задание линейного подпространства $\boldsymbol{L}$ пространства $\boldsymbol{R}_n$ и его ортогонального дополнения $\boldsymbol{L}^*$ в ортонормированном базисе связаны так: коэффициенты линейно независимой системы линейных уравнений, задающей одно из этих подпространств, служат координатами векторов базиса другого подпространства.

1369. Пусть $\boldsymbol{L}$ — линейное подпространство пространства $\boldsymbol{R}_n$. Доказать, что любой вектор $\boldsymbol{x}$ из $\boldsymbol{R}_n$ однозначно представляется в виде $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}$, где $\boldsymbol{y}$ принадлежит $\boldsymbol{L}$ и $\boldsymbol{z}$ ортогонален к $\boldsymbol{L}$. Вектор $\boldsymbol{y}$ называется ортогональной проекцией вектора $\boldsymbol{x}$ на подпространство $\boldsymbol{L}$, а $\boldsymbol{z}$ — ортогональной составляющей $\boldsymbol{x}$ относительно $\boldsymbol{L}$. Указать прием для вычисления $\boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{z}$.

Найти ортогональную проекцию $\boldsymbol{y}$ и ортогональную составляющую $\boldsymbol{z}$ вектора $\boldsymbol{x}$ на линейное подпространство $\boldsymbol{L}$:

1370. $\boldsymbol{x} = (4,-1,-3,4)$. $\boldsymbol{L}$ натянуто на векторы $\boldsymbol{a}_1 = (1,1,1,1)$, $\boldsymbol{a}_2 = (1,2,2,-1)$, $\boldsymbol{a}_3 = (1,0,0,3)$.

1371. $\boldsymbol{x} = (5,2,-2,2)$. $\boldsymbol{L}$ натянуто на векторы $\boldsymbol{a}_1 = (2,1,1,-1)$, $\boldsymbol{a}_2 = (1,1,3,0)$, $\boldsymbol{a}_3 = (1,2,8,1)$.

1372. $\boldsymbol{x} = (7,-4,-1,2)$. $\boldsymbol{L}$ задано системой уравнений

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 &= 0,\\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 &= 0,\\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 9x_4 &= 0. \end{aligned}$$

1373*. *Расстоянием от точки, заданной вектором* $\boldsymbol{x}$, *до линейного многообразия* $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{x}_0$ называется минимум расстояний от данной точки до точек многообразия, т. е. минимум длин векторов $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{u}$, где $\boldsymbol{u}$ — вектор многообразия $\boldsymbol{P}$.

Доказать, что это расстояние равно длине ортогональной составляющей $\boldsymbol{z}$ вектора $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0$ относительно линейного подпространства $\boldsymbol{L}$, параллельным сдвигом которого получается многообразие $\boldsymbol{P}$.

1374. Найти расстояние от точки, заданной вектором $\boldsymbol{x}$, до линейного многообразия, заданного системой уравнений:

а) $\boldsymbol{x} = (4,2,-5,1)$;
$$\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 9,\\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 12. \end{aligned}$$

б) $\boldsymbol{x} = (2,4,-4,2)$;
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 &= 1,\\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 3x_4 &= 2. \end{aligned}$$

1375*. Доказать, что расстояние d от точки, заданной вектором $\boldsymbol{x}$, до линейного многообразия $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{x}_0$, где $\boldsymbol{L}$ — линейное подпространство с базой $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$, вычисляется с помощью определителя Грама (см. задачу 1415) по формуле

$$d^2 = \frac{G(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)}{G(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k)}.$$

1376*. Расстоянием между двумя линейными многообразиями $\boldsymbol{P}_1 = \boldsymbol{L}_1 + \boldsymbol{x}_1$ и $\boldsymbol{P}_2 = \boldsymbol{L}_2 + \boldsymbol{x}_2$ называется минимум расстояний любых двух точек, одна из которых принадлежит $\boldsymbol{P}_1$, а другая — $\boldsymbol{P}_2$. Доказать, что это расстояние равно длине ортогональной составляющей вектора $\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2$ относительно линейного подпространства $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}_1 + \boldsymbol{L}_2$.

1377. Найти расстояние между двумя плоскостями $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}_1 t_1 + \boldsymbol{a}_2 t_2 + \boldsymbol{x}_1$ и $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}_3 t_1 + \boldsymbol{a}_4 t_2 + \boldsymbol{x}_2$, где

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}_1 &= (1,2,2,2), & \boldsymbol{a}_2 &= (2,-2,1,2),\\ \boldsymbol{a}_3 &= (2,0,2,1), & \boldsymbol{a}_4 &= (1,-2,0,-1);\\ \boldsymbol{x}_1 &= (4,5,3,2), & \boldsymbol{x}_2 &= (1,-2,1,-3). \end{aligned}$$

1378* Правильным n-мерным симплексом евклидова пространства $\boldsymbol{R}_p$ ($p \geqslant n$) называется выпуклое замыкание (см. задачу 1347) системы $n+1$ точек, находящихся друг от друга на одинаковом расстоянии. Точки данной системы называются вершинами; отрезки, их соединяющие, — ребрами, а выпуклые замыкания подсистем $k+1$ точек данной системы — k-мерными гранями симплекса. Две грани называются противоположными, если они не имеют общих вершин и любая из $n+1$ вершин симплекса является вершиной одной из этих граней.

Найти расстояние между двумя противоположными гранями размерностей k и $n-k-1$ n-мерного симплекса с длиной ребер, равной единице, и доказать, что оно равно расстоянию между центрами этих граней.

1379* Пусть $\boldsymbol{e}$ — вектор единичной длины евклидова (или унитарного) пространства $\boldsymbol{R}_n$. Доказать, что любой вектор $\boldsymbol{x}$ из $\boldsymbol{R}_n$ однозначно представляется в виде $\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{e} + \boldsymbol{z}$, где $(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{e}) = 0$. Число α называется проекцией вектора $\boldsymbol{x}$ на направление $\boldsymbol{e}$ и обозначается через $\mathrm{pr}_{\boldsymbol{e}}\, \boldsymbol{x}$.

Доказать, что:

а) $\mathrm{pr}_{\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \mathrm{pr}_{\boldsymbol{e}}\, \boldsymbol{x} + \mathrm{pr}_{\boldsymbol{e}}\, \boldsymbol{y}$; б) $\mathrm{pr}_{\boldsymbol{e}}(\lambda\boldsymbol{x}) = \lambda\,\mathrm{pr}_{\boldsymbol{e}}\, \boldsymbol{x}$; в) $\mathrm{pr}_{\boldsymbol{e}}\, \boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e})$;

г) для любого ортонормированного базиса $\boldsymbol{e}_1 \ldots, \boldsymbol{e}_n$ и любого вектора $\boldsymbol{x}$ имеет место равенство $\boldsymbol{x} = \sum\limits_{i=1}^{n} (\mathrm{pr}_{\boldsymbol{e}_i}\, \boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{e}_i$.

1380* Пусть $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k$ — ортонормированная система векторов евклидова пространства $\boldsymbol{R}_n$. Доказать, что для любого вектора $\boldsymbol{x}$ из $\boldsymbol{R}_n$ имеет место неравенство (неравенство Бесселя)

$$\sum_{i=1}^{k} (\mathrm{pr}_{\boldsymbol{e}_i}\, \boldsymbol{x})^2 \leqslant |\boldsymbol{x}|^2,$$

причем это неравенство обращается в равенство (равенство Парсеваля) для любого $\boldsymbol{x}$ из $\boldsymbol{R}_n$ тогда и только тогда, когда $k = n$, т. е. система $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k$ является ортонормированным базисом.

1381* Доказать неравенство Коши—Буняковского

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})^2 \leqslant (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y})$$

для любых векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ евклидова пространства, причем знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда векторы $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ линейно зависимы.

1382* Доказать неравенство Коши—Буняковского

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) \leqslant (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y})$$

для любых векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ унитарного пространства, причем знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда векторы $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ линейно зависимы.

1383. Пользуясь неравенством Коши—Буняковского, доказать следующие неравенства:

$$\text{а)}\quad \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i^2$$

для любых вещественных чисел $a_1 \ldots, a_n$; $b_1, \ldots, b_n$ (см. задачу 503);

$$\text{б)}\quad \left|\sum_{i=1}^{n} a_i \bar{b}_i\right|^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} |b_i|^2$$

для любых комплексных чисел $a_1 \ldots, a_n$; $b_1, \ldots, b_n$ (см. задачу 505).

1384. В бесконечномерном векторном пространстве всех вещественных непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций с обычными сложением функций и умножением функции на число задано скалярное произведение $(f, g) = \int\limits_a^b f(x)g(x)dx$. Проверить выполнение всех свойств скалярного произведения евклидова пространства (см. введение) и написать неравенство Коши—Буняковского для этого пространства.

Найти длины сторон и внутренние углы треугольников, вершины которых заданы своими координатами:

1385. $A(2, 4, 2, 4, 2)$, $B(6, 4, 4, 4, 6)$, $C(5, 7, 5, 7, 2)$.

1386. $A(1, 2, 3, 2, 1)$; $B(3, 4, 0, 4, 3)$;

$$C(1 + \frac{5}{26}\sqrt{78}, 2 + \frac{5}{13}\sqrt{78}, 3 + \frac{10}{13}\sqrt{78}, 2 + \frac{5}{13}\sqrt{78}, 1 + \frac{5}{26}\sqrt{78}).$$

1387. Доказать следующее обобщение теоремы элементарной математики о двух перпендикулярах: если вектор $\boldsymbol{x}$ евклидова (или унитарного) пространства ортогонален к каждому из векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$, то он ортогонален к любому вектору линейного подпространства $\boldsymbol{L}$, натянутого на векторы $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$.

1388. Доказать, что если $\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{y}$, то $|\boldsymbol{x}| = |\alpha| \cdot |\boldsymbol{y}|$. Здесь $|\boldsymbol{x}|$, $|\boldsymbol{y}|$ — длина векторов $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$.

1389*. Доказать, что квадрат диагонали прямоугольного n-мерного параллелепипеда равен сумме квадратов его ребер, выходящих из одной вершины (n-мерное обобщение теоремы Пифагора).

1390*. Доказать теорему о том, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон.

1391. Доказать теорему о том, что квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними, пользуясь скалярным умножением векторов.

1392. Пользуясь неравенством Коши—Буняковского, доказать неравенство треугольника: если $\rho(X, Y)$ — расстояние между точками X и Y, то для любых трех точек A, B и C имеем $\rho(A, B) + \rho(B, C) \geqslant \rho(A, C)$, причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда вектор $\boldsymbol{x}$, проведенный из A в B, и $\boldsymbol{y}$, проведенный из B в C, коллинеарны и одинаково направлены.

1393. Найти число диагоналей n-мерного куба, ортогональных к данной диагонали.

1394. Найти длину диагонали n-мерного куба с ребром a и предел этой длины при $n \to \infty$.

1395. Доказать, что все диагонали n-мерного куба образуют один и тот же угол φ_n со всеми его ребрами. Найти этот угол и его предел при $n \to \infty$. При каком n получим $\varphi_n = 60°$?

1396. Найти выражение радиуса R шара, описанного около n-мерного куба, через ребро a; какая из этих величин R и a больше при различных n?

1397. Доказать, что ортогональная проекция любого ребра n-мерного куба на любую диагональ этого куба по абсолютной величине равна $1/n$ длины диагонали.

1398*. Доказать, что ортогональные проекции вершин n-мерного куба на любую его диагональ делят ее на n равных частей.

1399*. Пусть $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ — ненулевые векторы евклидова пространства $\boldsymbol{R}_n$. Доказать, что:

а) $\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{y}$, где $\alpha > 0$, тогда и только тогда, когда угол между $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ равен нулю;

б) $\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{y}$, где $\alpha < 0$, тогда и только тогда, когда угол между $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ равен π.

1400*. Доказать, что из всех векторов линейного подпространства $\boldsymbol{L}$ наименьший угол с данным вектором $\boldsymbol{x}$ образует ортогональная проекция $\boldsymbol{y}$ вектора $\boldsymbol{x}$ на $\boldsymbol{L}$. При этом равенство $\cos(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \cos(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}')$, где $\boldsymbol{y}' \in \boldsymbol{L}$, выполняется тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{y}' = \alpha\boldsymbol{y}$, где $\alpha > 0$.

1401. Найти угол между диагональю n-мерного куба и его k-мерной гранью.

Найти угол между вектором $\boldsymbol{x}$ и линейным подпространством, натянутым на векторы $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$:

1402. $\boldsymbol{x} = (2,2,1,1)$; $\boldsymbol{a}_1 = (3,4,-4,-1)$, $\boldsymbol{a}_2 = (0,1,-1,2)$.

1403. $\boldsymbol{x} = (1,0,3,0)$; $\boldsymbol{a}_1 = (5,3,4,-3)$, $\boldsymbol{a}_2 = (1,1,4,5)$, $\boldsymbol{a}_3 = (2,-1,1,2)$.

1404. *Углом* между двумя линейными подпространствами $\boldsymbol{L}_1$ и $\boldsymbol{L}_2$ евклидова пространства $\boldsymbol{R}_n$, не имеющими общих ненулевых векторов, называется минимум углов между ненулевыми векторами $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$, где $\boldsymbol{x}_1 \in \boldsymbol{L}_1$, $\boldsymbol{x}_2 \in \boldsymbol{L}_2$. Если пересечение $\boldsymbol{L}_1 \cap \boldsymbol{L}_2 = \boldsymbol{D} \neq 0$, причем $\boldsymbol{D} \neq \boldsymbol{L}_1$, $\boldsymbol{D} \neq \boldsymbol{L}_2$, то углом между $\boldsymbol{L}_1$ и $\boldsymbol{L}_2$ называется угол между их пересечениями с ортогональным дополнением $\boldsymbol{D}^*$ к пересечению $\boldsymbol{D}$. Если одно из данных подпространств содержится в другом (в частности, если они совпадают), то угол между ними считается равным нулю. Углом между линейными многообразиями называется угол между соответствующими им подпространствами. Показать, что угол между любыми подпространствами или многообразиями всегда определен и равен нулю тогда и только тогда, когда одно из подпространств или многообразий содержится в другом или многообразия параллельны.

1405*. Найти угол между двумерными гранями $A_0A_1A_2$ и $A_0A_3A_4$ правильного четырехмерного симплекса (см. задачу 1378) $A_0A_1A_2A_3A_4$.

1406*. Найти угол между плоскостями $\boldsymbol{a}_0 + \boldsymbol{a}_1 t_1 + \boldsymbol{a}_2 t_2$ и $\boldsymbol{b}_0 + \boldsymbol{b}_1 t_1 + \boldsymbol{b}_2 t_2$, где

$$\boldsymbol{a}_0 = (3,1,0,1), \quad \boldsymbol{a}_1 = (1,0,0,0), \quad \boldsymbol{a}_2 = (0,1,0,0),$$
$$\boldsymbol{b}_0 = (2,1,1,3), \quad \boldsymbol{b}_1 = (1,1,1,1), \quad \boldsymbol{b}_2 = (1,-1,1,-1).$$

1407*. Пусть даны линейно независимая система векторов $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_s$ и две ортогональные системы ненулевых векторов $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \ldots, \boldsymbol{f}_s$ и $\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \ldots, \boldsymbol{g}_s$ такие, что векторы $\boldsymbol{f}_k$ и $\boldsymbol{g}_k$ линейно выражаются через $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_k$ $(k = 1, 2, \ldots, s)$. Доказать, что $\boldsymbol{f}_k = \alpha_k \boldsymbol{g}_k$ $(k = 1, 2, \ldots, s)$, где $\alpha_k \neq 0$.

1408*. Пусть $\boldsymbol{R}_{n+1}$ — евклидово пространство, за векторы которого взяты все многочлены степени $\leqslant n$ с вещественными коэффициентами от одного неизвестного x, а скалярное произведение многочленов $f(x)$ и $g(x)$ определено так: $(f,g) = \int\limits_{-1}^{+1} f(x)g(x)dx$.

Доказать, что следующие многочлены, известные под названием *полиномов Лежандра*:

$$P_0(x) = 1, \quad P_k(x) = \frac{1}{2^k k!} \cdot \frac{d^k}{dx^k}\left[(x^2-1)^k\right] \quad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

образуют ортогональный базис пространства $\boldsymbol{R}_{n+1}$.

1409. Исходя из определения полиномов Лежандра, данного в предыдущей задаче, найти многочлены $P_k(x)$ для $k = 1, 2, 3, 4$. Убедиться, что $P_k(x)$ имеет степень k, и написать развернутое выражение по степеням x для $P_k(x)$ при любом k.

1410.* Вычислить «длину» полинома Лежандра $P_k(x)$ как вектора евклидова пространства $\boldsymbol{R}_{n+1}$ задачи 1408.

1411.* Вычислить значение полинома Лежандра $P_k(x)$ при $x = 1$.

1412.* Доказать, что если к базису $1, x, x^2, \ldots, x^n$ евклидова пространства $\boldsymbol{R}_{n+1}$ задачи 1408 применить процесс ортогонализации, то получатся многочлены $f_0(x), f_1(x), \ldots, f_n(x)$, отличающиеся лишь постоянными множителями от соответствующих полиномов Лежандра. Найти эти множители.

1413. Пусть процесс ортогонализации переводит векторы $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ в векторы $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ соответственно. Доказать, что $\boldsymbol{b}_k$ есть ортогональная составляющая вектора $\boldsymbol{a}_k$ относительно линейного подпространства $\boldsymbol{L}_{k-1}$, натянутого на $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{k-1}$ $(k > 1)$. Далее доказать, что

$$0 \leqslant |\boldsymbol{b}_k| \leqslant |\boldsymbol{a}_k| \quad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

причем $|\boldsymbol{b}_k| = 0$ тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{a}_k$ линейно выражается через $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{k-1}$ $(k > 1)$ или $\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{0}$ $(k = 1)$; $|\boldsymbol{b}_k| = |\boldsymbol{a}_k|$ тогда и только тогда, когда $(\boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{a}_j) = 0$ $(j = 1, 2, \ldots, k-1;\ k > 1)$ или $k = 1$.

1414.* Доказать, что интеграл $\int\limits_{-1}^{+1} [f(x)]^2 dx$, где $f(x)$ — многочлен n-й степени с вещественными коэффициентами и старшим коэффициентом, равным единице, достигает своего минимума, равного $\dfrac{2^{2n+1}}{(2n+1)(C_{2n}^n)^2}$, тогда и только тогда, когда $f(x) = \dfrac{2^n}{C_{2n}^n} P_n(x)$, где $P_n(x)$ — полином Лежандра степени n (см. задачу 1408).

1415. Определителем Грама векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ евклидова (или унитарного) пространства $\boldsymbol{R}_n$ называется определитель

$$g(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k) = \begin{vmatrix} (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_1) & (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) & \ldots & (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_k) \\ (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_1) & (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_2) & \ldots & (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_k) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (\boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{a}_1) & (\boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{a}_2) & \ldots & (\boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{a}_k) \end{vmatrix}.$$

Доказать, что определитель Грама не изменяется при применении к векторам $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ процесса ортогонализации, т. е. если в результате ортогонализации векторы $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ перейдут в векторы $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_k$, то

$$g(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k) = g(\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_k) = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1)(\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_2) \ldots (\boldsymbol{b}_k, \boldsymbol{b}_k).$$

Пользуясь этим, выяснить геометрический смысл $g(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$ и $g(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$, предполагая векторы линейно независимыми.

1416*. Доказать, что для линейной зависимости векторов $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ евклидова (или унитарного) пространства необходимо и достаточно, чтобы определитель Грама этих векторов был равен нулю.

1417*. Два базиса $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ и $\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_n$ евклидова (или унитарного) пространства называются взаимными, если

$$(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{f}_j) = \begin{cases} 1 \text{ при } i = j, \\ 0 \text{ при } i \neq j. \end{cases}$$

Доказать, что для любого базиса $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ взаимный базис существует и определен однозначно.

1418. Пусть S — матрица перехода от базиса $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ к базису $\boldsymbol{e}'_1, \ldots, \boldsymbol{e}'_n$. Найти матрицу T перехода от базиса $\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_n$, взаимного с $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$, к базису $\boldsymbol{f}'_1 \ldots, \boldsymbol{f}'_n$, взаимному с $\boldsymbol{e}'_1, \ldots, \boldsymbol{e}'_n$:

а) в евклидовом пространстве,

б) в унитарном пространстве.

1419*. Доказать, что определитель Грама $g(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k)$ равен нулю, если векторы $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ линейно зависимы, и положителен, если линейно независимы.

1420. Доказать, что если линейно независимые векторы $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ процессом ортогонализации переводятся в векторы $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$, то $|\boldsymbol{b}_k|^2 = \dfrac{g(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k)}{g(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{k-1})}$ ($k = 1, 2, \ldots, n$; определитель Грама с нулевым числом векторов принимается равным единице).

1421*. В пространстве многочленов степени не выше n-й от одного неизвестного x с вещественными коэффициентами скалярное произведение задано равенством $(f, g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)dx$.

Найти расстояние от начала координат до линейного многообразия, состоящего из всех многочленов степени n со старшим коэффициентом, равным единице.

1422*. Доказать, что для определителя Грама справедливо неравенство

$$0 \leqslant g(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k) \leqslant |\boldsymbol{a}_1|^2 \ldots |\boldsymbol{a}_k|^2,$$

причем $g(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k) = 0$ тогда и только тогда, когда векторы $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ линейно зависимы, и $g(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k) = |\boldsymbol{a}_1|^2 \ldots |\boldsymbol{a}_k|^2$ тогда и только тогда, когда либо векторы $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ попарно ортогональны, либо хотя бы один из этих векторов равен нулю.

1423. Пользуясь предыдущей задачей, доказать неравенство Адамара, именно, если $D = |a_{ij}|_1^n$ — определитель с вещественными элементами, то $D^2 \leqslant \prod_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2$ (см. задачу 923), причем знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда либо

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{jk} = 0 \quad (i \neq j;\ i,j = 1,2,\ldots,n),$$

либо определитель D содержит нулевую строку. Как изменится утверждение для определителя с комплексными элементами?

1424*. Доказать, что определитель D_f положительно определенной квадратичной формы $f = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$ удовлетворяет неравенству $D_f \leqslant \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$.

1425*. Доказать, что любая вещественная симметрическая матрица $A = (a_{ij})_1^n$ с неотрицательными главными минорами является матрицей Грама, т. е. существует система векторов $\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n$ евклидова пространства $\boldsymbol{R}_n$ такая, что $(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j) = a_{ij}$ $(i,j = 1,2,\ldots,n)$.

1426*. Доказать, что любая эрмитова матрица $A = (a_{ij})_1^n$ с неотрицательными главными минорами является матрицей Грама, т. е. существует система векторов $\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n$ унитарного пространства $\boldsymbol{R}_n$ такая, что

$$(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j) = a_{ij} \quad (i,j = 1,2,\ldots,n).$$

1427*. Определим объем n-мерного параллелепипеда, построенного на линейно независимых векторах $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_n$ евклидова пространства, индуктивно условиями:

1) $V(\boldsymbol{a}_1) = |\boldsymbol{a}_1|$;

2) $V(\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_n) = V(\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_{n-1})\cdot h_n$, где h_n — длина ортогональной составляющей вектора $\boldsymbol{a}_n$ относительно подпространства, натянутого на векторы $\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_{n-1}$. Доказать, что

$$V(\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_n) = \sqrt{g(\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_n)} = |D|,$$

где D — определитель из координат данных векторов в каком-нибудь ортонормированном базисе n-мерного пространства, натянутого на векторы $\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_n$.

1428*. Доказать, что объем n-мерного параллелепипеда не превосходит произведения длин его ребер, выходящих из одной вершины, и равен этому произведению тогда и только тогда, когда эти ребра попарно ортогональны, т. е. параллелепипед прямоугольный.

1429*. Доказать следующее свойство определителя Грама:

$$g(\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_k,\boldsymbol{b}_1,\ldots,\boldsymbol{b}_l) \leqslant g(\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_k)g(\boldsymbol{b}_1,\ldots,\boldsymbol{b}_l), \qquad (1)$$

причем знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда либо

$$(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{b}_j) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, k;\ j = 1, 2, \ldots, l), \tag{2}$$

либо хотя бы одна из подсистем $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ и $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_l$ линейно зависима.

1430*. Доказать следующее свойство объема параллелепипеда:

$$V(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k;\ \boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_l) \leqslant V(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k)V(\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_l),$$

причем знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда $(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{b}_j) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, k; j = 1, 2, \ldots, l)$.

1431*. Доказать, что если A — вещественная симметрическая матрица порядка n с неотрицательными главными минорами, A_1 — матрица порядка $k < n$ в левом верхнем углу, A_2 — матрица порядка $n - k$ в правом нижнем углу матрицы A, то $|A| \leqslant |A_1| \cdot |A_2|$ (ср. с задачей 922).

1432*. Решить задачу, аналогичную предыдущей, если A — эрмитова матрица с неотрицательными главными минорами.

1433*. Найти условия, необходимые и достаточные для того, чтобы C_{n+1}^2 положительных чисел

$$a_{ij} \quad (i, j = 0, 1, 2, \ldots, n; i > j) \tag{1}$$

были:

а) расстояниями всевозможных пар вершин некоторого n-мерного симплекса евклидова пространства $\boldsymbol{R}_n$ (т. е. системы $n + 1$ точек, не лежащих в $(n - 1)$-мерном линейном многообразии);

б) расстояниями всевозможных пар точек некоторой системы $n + 1$ точек евклидова пространства $\boldsymbol{R}_n$.

§ 18. Линейные преобразования произвольных векторных пространств

В этом параграфе, за отдельными исключениями, рассматриваются линейные преобразования аффинных векторных пространств. Преобразования евклидовых и унитарных пространств рассмотрены в следующем параграфе.

Линейные преобразования обозначаются через φ, ψ и т. д., образ вектора $\boldsymbol{x}$ при преобразовании φ — через $\varphi\boldsymbol{x}$, система векторов $\varphi\boldsymbol{a}_1, \ldots, \varphi\boldsymbol{a}_n$ — через $\varphi(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$.

Матрицей линейного преобразования φ в базисе $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ называется матрица A_φ, столбцы которой составлены из координат образов базиса $\varphi\boldsymbol{e}_1, \ldots, \varphi\boldsymbol{e}_n$ в том же базисе $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$; иными словами, матрица A_φ определяется равенством

$$\varphi(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n) = (\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)A_\varphi. \tag{1}$$

Пусть T — матрица перехода от базиса $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ к базису $\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_n$ (см. введение к § 16), A_φ и B_φ — матрицы преобразования φ в первом и втором базисе соответственно. Тогда имеет место соотношение

$$B_\varphi = T^{-1} A_\varphi T. \tag{2}$$

Координаты $y_1, \ldots, y_n$ образа $\varphi\boldsymbol{x}$ вектора $\boldsymbol{x}$ при линейном преобразовании φ выражаются через координаты $x_1, \ldots, x_n$ прообраза $\boldsymbol{x}$ в том же базисе при помощи матрицы $A_\varphi = (a_{ij})_1^n$ линейного преобразования φ в том же базисе следующим образом: $y_j = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$ $(i = 1, \ldots, n)$ или в матричной записи:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix} = A_\varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Суммой $\varphi + \psi$, произведением $\varphi\psi$ двух линейных преобразований φ и ψ и произведением $\alpha\varphi$ числа α на линейное преобразование φ пространства $\boldsymbol{R}_n$ называются преобразования, определяемые соответственно равенствами

$$(\varphi + \psi)\boldsymbol{x} = \varphi\boldsymbol{x} + \psi\boldsymbol{x}, \ (\varphi\psi)\boldsymbol{x} = \varphi(\psi\boldsymbol{x}), (\alpha\varphi)\boldsymbol{x} = \alpha(\varphi\boldsymbol{x}),$$

для любого вектора $\boldsymbol{x}$ пространства $\boldsymbol{R}_n$.

1434. Доказать, что поворот плоскости на угол α вокруг начала координат является линейным преобразованием, и найти матрицу этого преобразования в любом ортонормированном базисе, если положительное направление отсчета углов совпадает с направлением кратчайшего поворота, переводящего первый базисный вектор во второй.

1435. Доказать, что поворот трехмерного пространства на угол $2\pi/3$ вокруг прямой, заданной в прямоугольной системе координат уравнениями $x_1 = x_2 = x_3$, является линейным преобразованием, и найти матрицу этого преобразования в базисе из единичных векторов $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ осей координат.

1436. Доказать, что проектирование трехмерного пространства на координатную ось вектора $\boldsymbol{e}_1$ параллельно координатной плоскости векторов $\boldsymbol{e}_2$ и $\boldsymbol{e}_3$ является линейным преобразованием, и найти его матрицу в базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$.

1437. Доказать, что проектирование трехмерного пространства на координатную плоскость векторов $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ параллельно оси координат вектора $\boldsymbol{e}_3$ является линейным преобразованием, и найти его матрицу в базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$.

1438. Доказать, что ортогональное проектирование трехмерного пространства на ось, образующую равные углы с осями прямоугольной системы координат, является линейным преобразованием, и найти его матрицу в базисе единичных векторов координатных осей.

1439. Пусть пространство $\boldsymbol{R}_n$ есть прямая сумма линейных подпространств $\boldsymbol{L}_1$ с базисом $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ и $\boldsymbol{L}_2$ с базисом $\boldsymbol{a}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{a}_n$. Доказать, что проектирование пространства на $\boldsymbol{L}_1$ параллельно $\boldsymbol{L}_2$ является линейным преобразованием, и найти матрицу этого преобразования в базисе $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$.

1440. Доказать, что существует единственное линейное преобразование пространства $\boldsymbol{R}_n$, переводящее данные линейно независимые векторы $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ в данные векторы $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$. Как найти матрицу этого преобразования в базисе $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$?

Выяснить, какие из следующих преобразований φ, заданных путем задания координат вектора $\varphi\boldsymbol{x}$ как функций координат вектора $\boldsymbol{x}$, являются линейными, и в случае линейности найти их матрицы в том же базисе, в котором заданы координаты векторов $\boldsymbol{x}$ и $\varphi\boldsymbol{x}$.

1441. $\varphi\boldsymbol{x} = (x_2 + x_3, 2x_1 + x_3, 3x_1 - x_2 + x_3)$.

1442. $\varphi\boldsymbol{x} = (x_1, x_2 + 1, x_3 + 2)$.

1443. $\varphi\boldsymbol{x} = (2x_1 + x_2, x_1 + x_3, x_3^2)$.

1444. $\varphi\boldsymbol{x} = (x_1 - x_2 + x_3, x_3, x_2)$.

Доказать, что существует единственное линейное преобразование трехмерного пространства, переводящее векторы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ соответственно в $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, $\boldsymbol{b}_3$, и найти матрицу этого преобразования в том же базисе, в котором даны координаты всех векторов:

1445. $\boldsymbol{a}_1 = (2, 3, 5)$, $\quad \boldsymbol{b}_1 = (1, 1, 1)$,
$\boldsymbol{a}_2 = (0, 1, 2)$, $\quad \boldsymbol{b}_2 = (1, 1, -1)$,
$\boldsymbol{a}_3 = (1, 0, 0)$, $\quad \boldsymbol{b}_2 = (2, 1, 2)$.

1446. $\boldsymbol{a}_1 = (2, 0, 3)$, $\quad \boldsymbol{b}_1 = (1, 2, -1)$,
$\boldsymbol{a}_2 = (4, 1, 5)$, $\quad \boldsymbol{b}_2 = (4, 5, -2)$,
$\boldsymbol{a}_3 = (3, 1, 2)$, $\quad \boldsymbol{b}_2 = (1, -1, 1)$.

1447. Пусть линейное преобразование φ пространства $\boldsymbol{R}_n$ переводит линейно независимые векторы $\boldsymbol{a}_1, \ldots \boldsymbol{a}_n$ в векторы $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ соответственно. Доказать, что матрицу A_φ этого преобразования в некотором базисе $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ можно найти из равенства $A_\varphi = BA^{-1}$, где столбцы матриц A и B состоят из координат векторов $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ и соответственно $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ в базисе $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$.

1448. Доказать, что преобразование трехмерного пространства $\varphi\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}\boldsymbol{a})\boldsymbol{a}$, где $\boldsymbol{a} = (1, 2, 3)$, является линейным преобразованием и найти его матрицы в ортонормированном базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$, в котором даны координаты всех векторов, и в базисе $\boldsymbol{b}_1 = (1, 0, 1)$, $\boldsymbol{b}_2 = (2, 0, -1)$, $\boldsymbol{b}_3 = (1, 1, 0)$.

1449. Показать, что умножения квадратных матриц второго порядка а) слева, б) справа на данную матрицу $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ являются линейными преобразованиями пространства всех матриц второго порядка, и найти матрицы этих преобразований в базисе, состоящем из матриц:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1450. Показать, что дифференцирование является линейным преобразованием пространства всех многочленов степени $\leqslant n$ от одного неизвестного с вещественными коэффициентами.

Найти матрицу этого преобразования в базисе:

а) $1, x, x^2, \ldots, x^n$;

б) $1, x-c, \dfrac{(x-c)^2}{2!}, \ldots, \dfrac{(x-c)^n}{n!}$, где c — вещественное число.

1451. Как изменится матрица линейного преобразования, если в базисе e_1, e_2, ..., e_n поменять местами два вектора e_i , e_j?

1452. Линейное преобразование φ в базисе e_1, e_2, e_3, e_4 имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу этого же преобразования в базисе:

а) e_1, e_2, e_3, e_4;

б) $e_1, e_1+e_2, e_1+e_2+e_3, e_1+e_2+e_3+e_4$.

1453. Линейное преобразование φ в базисе e_1, e_2, e_3 имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}.$$

Найти его матрицу в базисе

$$f_1 = 2e_1 + 3e_2 + e_3, \quad f_2 = 3e_1 + 4e_2 + e_3, \quad f_3 = e_1 + 2e_2 + 2e_3.$$

1454. Линейное преобразование φ в базисе $a_1 = (8, -6, 7)$, $a_2 = (-16, 7, -13)$, $a_3 = (9, -3, 7)$ имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & -18 & 15 \\ -1 & -22 & 20 \\ 1 & -25 & 22 \end{pmatrix}.$$

Найти его матрицу в базисе

$$b_1 = (1, -2, 1), \quad b_2 = (3, -1, 2), \quad b_3 = (2, 1, 2).$$

1455. Доказать, что матрицы одного и того же линейного преобразования в двух базисах тогда и только тогда совпадают, когда матрица перехода от одного из этих базисов к другому перестановочна с матрицей этого линейного преобразования в одном из данных базисов.

1456. Доказать, что любое линейное преобразование φ одномерного пространства сводится к умножению всех векторов на одно и то же число, т. е. $\varphi\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{x}$ для любого вектора $\boldsymbol{x}$.

1457. Пусть преобразование φ в базисе $\boldsymbol{a}_1 = (1, 2)$, $\boldsymbol{a}_2 = (2, 3)$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. Преобразование ψ в базисе $\boldsymbol{b}_1 = (3, 1)$, $\boldsymbol{b}_2 = (4, 2)$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$.

Найти матрицу преобразования $\varphi + \psi$ в базисе $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$.

1458. Преобразование φ в базисе $\boldsymbol{a}_1 = (-3, 7)$, $\boldsymbol{a}_2 = (1, -2)$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$, а преобразование ψ в базисе $\boldsymbol{b}_1 = (6, -7)$, $\boldsymbol{b}_2 = (-5, 6)$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$.

Найти матрицу преобразования $\varphi\psi$ в том базисе, в котором даны координаты всех векторов.

1459. Пусть φ — линейное преобразование пространства многочленов степени $\leqslant n$ с вещественными коэффициентами, переводящее каждый многочлен в его производную. Показать, что $\varphi^{n+1} = 0$.

1460. Пусть φ — линейное преобразование дифференцирования, а ψ — умножение на x в бесконечномерном пространстве всех многочленов от x с вещественными коэффициентами. Доказать, что $\varphi\psi^n - \psi^n\varphi = n\psi^{n-1}$.

1461. Показать, что линейные преобразования n-мерного пространства относительно сложения и умножения на число сами образуют векторное пространство. Найти размерность этого пространства.

1462. Линейное преобразование φ пространства $\boldsymbol{R}_n$ называется *невырожденным*, если его матрица A_φ в каком-нибудь (а значит, и в любом) базисе невырожденна, т. е. $|A_\varphi| \neq 0$. Доказать, что этому определению эквивалентно каждое из следующих: линейное преобразование φ невырожденно, если: а) из $\varphi\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ следует $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$; б) при отображении φ любой базис пространства переходит снова в базис; в) отображение φ взаимно однозначно, т. е. если $\boldsymbol{x}_1 \neq \boldsymbol{x}_2$, то $\varphi\boldsymbol{x}_1 \neq \varphi\boldsymbol{x}_2$; г) φ отображает пространство на все пространство, т. е. для любого $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}_n$ найдется $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}_n$ такой, что $\varphi\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$; д) φ обладает обратным преобразованием ψ, т. е. $\psi(\varphi\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$ для любого $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}_n$.

1463. Пусть $\boldsymbol{x}$ — собственный вектор линейного преобразования φ, принадлежащий собственному значению λ, и $f(t)$ — многочлен. Доказать, что тот же вектор $\boldsymbol{x}$ будет собственным вектором преобразования $f(\varphi)$, принадлежащим собственному значению $f(\lambda)$. Иными словами, доказать, что из $\varphi \boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$ следует $f(\varphi)\boldsymbol{x} = f(\lambda)\boldsymbol{x}$.

1464*. Пусть $\boldsymbol{x}$ — собственный вектор линейного преобразования φ, принадлежащий собственному значению λ, и $f(t)$ — функция, для которой преобразование $f(\varphi)$ имеет смысл (если φ в некотором базисе имеет матрицу A, то $f(\varphi)$ определяется в том же базисе матрицей $f(A)$, причем можно доказать, что $f(\varphi)$ не зависит от выбора базиса). Доказать, что тот же вектор $\boldsymbol{x}$ будет собственным вектором преобразования $f(\varphi)$, принадлежащим собственному значению $f(\lambda)$.

Найти собственные значения и собственные векторы линейных преобразований, заданных в некотором базисе матрицами:

1465. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. **1466.** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. **1467.** $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$.

1468. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$. **1469.** $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$. **1470.** $\begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$.

1471. $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. **1472.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1473. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **1474.** $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

1475. Доказать, что собственные векторы линейного преобразования, принадлежащие различным собственным значениям, линейно независимы.

1476. Доказать, что любая квадратная матрица A, имеющая различные характеристические числа, подобна диагональной матрице (над полем, содержащим как элементы матрицы, так и ее характеристические числа).

1477. Доказать, что если линейное преобразование φ пространства $\boldsymbol{R}_n$ имеет n различных собственных значений, то любое линейное преобразование ψ, перестановочное с φ, обладает базисом собственных векторов, причем любой собственный вектор φ будет собственным и для ψ.

1478. Доказать, что матрица линейного преобразования в некотором базисе является диагональной тогда и только тогда, когда базис состоит из собственных векторов данного преобразования.

Выяснить, какие из следующих матриц линейных преобразований можно привести к диагональному виду путем перехода к новому базису. Найти этот базис и соответствующую ему матрицу:

1479. $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. **1480.** $\begin{pmatrix} 6 & -5 & -3 \\ 3 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. **1481.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1482. $\begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 & 2 \\ 5 & -8 & 5 & 4 \\ 6 & -12 & 8 & 5 \\ 1 & -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. **1483.** $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1484*. Для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

порядка n найти невырожденную матрицу T, для которой матрица $B = T^{-1}AT$ была бы диагональной, и найти эту матрицу B.

1485. *Минимальным многочленом для вектора* $\boldsymbol{x}$ относительно линейного преобразования φ называется многочлен $g_{\boldsymbol{x}}(\lambda)$ со старшим коэффициентом 1, имеющий наименьшую степень среди всех аннулирующих многочленов для $\boldsymbol{x}$ относительно φ, т.е. многочленов $f(\lambda)$ со свойством $f(\varphi)\boldsymbol{x} = 0$.

Аналогично определяется минимальный многочлен $g(\lambda)$ относительно линейного преобразования φ для всего пространства. Доказать, что минимальный многочлен $g(\lambda)$ линейного преобразования φ равен наименьшему общему кратному минимальных многочленов для векторов любого базиса пространства относительно φ.

1486*. Найти условия, при которых матрица A, имеющая на побочной диагонали числа α_1, α_2, α_n, а на остальных местах нули, подобна диагональной матрице.

1487. Найти собственные значения и собственные векторы линейного преобразования, являющегося дифференцированием многочленов степени $\leqslant n$ с вещественными коэффициентами.

1488. Пусть φ — линейное преобразование пространства $\boldsymbol{R}_n$. Совокупность всех векторов $\varphi\boldsymbol{x}$, где $\boldsymbol{x}$ — любой вектор из $\boldsymbol{R}_n$, называется *образом* $\boldsymbol{R}_n$ *при преобразовании* φ или *областью значений* φ. Совокупность всех векторов $\boldsymbol{x}$ из $\boldsymbol{R}_n$ таких, что $\varphi\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, называется *полным прообразом нуля при преобразовании* φ или *ядром* φ. Доказать, что: а) область значений φ является линейным подпространством $\boldsymbol{R}_n$, размерность которого равна рангу φ; б) ядро φ есть линейное подпространство пространства $\boldsymbol{R}_n$, размерность которого равна дефекту φ, т.е. разности между n и рангом φ.

1489. Пусть φ — линейное преобразование и $\boldsymbol{L}$ — подпространство пространства $\boldsymbol{R}_n$. Доказать, что: а) образ $\varphi\boldsymbol{L}$ и б) полный прообраз $\varphi^{-1}\boldsymbol{L}$ подпространства $\boldsymbol{L}$ при линейном преобразовании φ снова являются подпространствами.

1490. Доказать, что для невырожденного линейного преобразования φ пространства $\boldsymbol{R}_n$ размерность: а) образа $\varphi\boldsymbol{L}$ и б) полного прообраза $\varphi^{-1}\boldsymbol{L}$ любого линейного подпространства $\boldsymbol{L}$ равна размерности $\boldsymbol{L}$.

1491*. Обозначим через разм. $\boldsymbol{L}$ размерность линейного подпространства $\boldsymbol{L}$ и через деф. φ дефект линейного преобразования φ. Доказать, что размерности образа и полного прообраза подпространства $\boldsymbol{L}$ пространства $\boldsymbol{R}_n$ при преобразовании φ удовлетворяют неравенствам:

а) разм. $\boldsymbol{L}$ – деф. $\varphi \leqslant$ разм. $\varphi\boldsymbol{L} \leqslant$ разм. $\boldsymbol{L}$;

б) разм. $\boldsymbol{L} \leqslant$ разм. $\varphi^{-1}\boldsymbol{L} \leqslant$ разм. $\boldsymbol{L}$ + деф. φ.

1492*. Пользуясь предыдущей задачей, доказать неравенства Сильвестера для ранга произведения двух квадратных матриц A и B порядка n: $r_A + r_B - n \leqslant r_{AB} \leqslant \min(r_A, r_B)$ (см. задачу 931).

1493. Доказать, что:

а) ранг $(\varphi + \psi) \leqslant$ ранг φ + ранг ψ;

б) деф. $(\varphi\psi) \leqslant$ деф. φ + деф. ψ для любых линейных преобразований φ и ψ пространства $\boldsymbol{R}_n$.

1494. Найти собственные значения и собственные векторы линейного преобразования φ, заданного в базисе $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{a}_4$ матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Показать, что подпространство, натянутое на векторы $\boldsymbol{a}_1 + 2\boldsymbol{a}_2$ и $\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 + 2\boldsymbol{a}_4$, является инвариантным относительно φ.

1495*. Доказать, что число линейно независимых собственных векторов преобразования φ, принадлежащих одному собственному значению λ_0, не превосходит кратности λ_0 как корня характеристического многочлена преобразования φ.

1496. Доказать, что линейное подпространство, натянутое на любую систему собственных векторов преобразования φ, инвариантно относительно φ.

1497. Доказать, что множество всех собственных векторов линейного преобразования φ, принадлежащих одному и тому же собственному значению λ_0 (вместе с нулевым вектором), является линейным подпространством, инвариантным относительно φ.

1498. Доказать, что все отличные от нуля векторы пространства тогда и только тогда являются собственными векторами линейного преобразования φ, когда φ — преобразование подобия, т. е. $\varphi \boldsymbol{x} = \alpha \boldsymbol{x}$ с одним и тем же α для любого вектора $\boldsymbol{x}$.

1499. Доказать, что любое подпространство $\boldsymbol{L}$, инвариантное относительно невырожденного линейного преобразования φ, будет инвариантно и относительно обратного преобразования φ^{-1}.

1500. Доказать, что: а) образ $\varphi \boldsymbol{L}$ и б) полный прообраз $\varphi^{-1}\boldsymbol{L}$ линейного подпространства $\boldsymbol{L}$, инвариантного относительно линейного преобразования φ, сами будут инвариантны относительно φ.

1501. Найти все линейные подпространства пространства многочленов от одного неизвестного степени $\leqslant n$ с вещественными коэффициентами, инвариантные относительно преобразования φ, переводящего любой многочлен в его производную.

1502. Доказать, что матрица линейного преобразования φ n-мерного пространства в базисе $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ является клеточной полураспавшейся матрицей вида:

а) $\begin{pmatrix} A_1 & B \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$, где A_1 — квадратная матрица порядка $k < n$, тогда и только тогда, когда линейное подпространство, натянутое на первые k векторов базиса $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$, инвариантно относительно φ;

б) $\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ B & A_2 \end{pmatrix}$, где A_1 — квадратная матрица порядка $k < n$, тогда и только тогда, когда линейное подпространство, натянутое на первые $n-k$ векторов базиса $\boldsymbol{a}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{a}_n$, инвариантно относительно φ;

в) матрица будет клеточной распавшейся вида $\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$, где A_1 — квадратная матрица порядка k, тогда и только тогда, когда как подпространство, натянутое на векторы $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$, так и подпространство, натянутое на векторы $\boldsymbol{a}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{a}_n$, инвариантно относительно φ.

1503*. Пусть линейное преобразование φ n-мерного пространства $\boldsymbol{R}_n$ в базисе $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ имеет диагональную матрицу с различными элементами на диагонали. Найти все линейные подпространства, инвариантные относительно φ, и определить их число.

1504. Найти все подпространства трехмерного пространства, инвариантные относительно линейного преобразования, заданного матрицей

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1505. Найти все подпространства трехмерного пространства, инвариантные одновременно относительно двух линейных преобразований, заданных матрицами:

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} -6 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 6 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

1506. Доказать, что любые два перестановочных линейных преобразования комплексного пространства имеют общий собственный вектор.

1507. Доказать, что для любой (хотя бы и бесконечной) совокупности попарно перестановочных линейных преобразований комплексного пространства $\boldsymbol{R}_n$ существует вектор, собственный для всех преобразований данной совокупности.

1508. Доказать, что корневые векторы, принадлежащие различным собственным значениям, линейно независимы.

Найти собственные значения и корневые подпространства линейных преобразований, заданных в некотором базисе следующими матрицами:

1509. $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$. **1510.** $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$.

1511. $\begin{pmatrix} 2 & 6 & -15 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix}$. **1512.** $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1513. Доказать, что линейное преобразование комплексного пространства тогда и только тогда имеет диагональную матрицу в некотором базисе, когда все его корневые векторы являются собственными векторами.

1514. Доказать, что комплексное пространство тогда и только тогда состоит сплошь из корневых векторов линейного преобразования φ, когда все собственные значения этого преобразования равны между собой.

1515. Пусть $\boldsymbol{R}$ — бесконечномерное пространство всех вещественных функций $f(x)$, определенных и имеющих производные любого порядка на всей числовой прямой, при обычных сложении функций и умножении функции на число, и φ — преобразование, переводящее любую функцию в ее производную.

Найти: а) все собственные значения и собственные векторы, б) все корневые подпространства преобразования φ.

1516. Пространство $\boldsymbol{R}_n$ называется *циклическим* относительно линейного преобразования φ, если $\boldsymbol{R}_n$ обладает циклическим базисом, т. е. базисом $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, ..., $\boldsymbol{a}_n$, для которого

$$\varphi \boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{a}_{k+1} \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Доказать, что если $\boldsymbol{R}_n$ — циклическое пространство относительно φ и $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, ..., $\boldsymbol{a}_n$ — циклический базис, то:

а) минимальный многочлен $g(\lambda)$ преобразования φ имеет степень n;

б) минимальный многочлен всего пространства совпадает с минимальным многочленом вектора $\boldsymbol{a}_1$;

в) если $\varphi \boldsymbol{a}_n = c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{a}_n$, то минимальный многочлен преобразования φ определяется равенством

$$g(\lambda) = \lambda^n - c_n\lambda^{n-1} - c_{n-1}\lambda^{n-2} - \cdots - c_1.$$

1517. Доказать, что если степень минимального многочлена $g(\lambda)$ линейного преобразования φ пространства $\boldsymbol{R}_n$ равна n и $g(\lambda)$ есть степень многочлена, неприводимого над тем полем, над которым рассматривается пространство $\boldsymbol{R}_n$, т. е. в случае комплексного пространства $g(\lambda) = (\lambda - \alpha)^n$, то:

а) $\boldsymbol{R}_n$ не разложимо в прямую сумму двух подпространств, инвариантных относительно φ;

б) $\boldsymbol{R}_n$ является циклическим относительно φ.

Какой вид имеет матрица преобразования φ в циклическом базисе?

1518. Пусть минимальный многочлен линейного преобразования φ пространства $\boldsymbol{R}_n$ имеет вид $(\lambda - \alpha)^n$. Доказать, что существует вектор $\boldsymbol{a}$ такой, что векторы $(\varphi - \alpha\varepsilon)^{n-1}\boldsymbol{a}$, $(\varphi - \alpha\varepsilon)^{n-2}\boldsymbol{a}, \ldots, (\varphi - \alpha\varepsilon)\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}$, где ε — тождественное преобразование, образуют базис пространства. Какой вид имеет матрица преобразования φ в этом базисе?

1519. Доказать, что любое подпространство $\boldsymbol{L}$ комплексного пространства $\boldsymbol{R}_n$, инвариантное относительно линейного преобразования φ, содержит прямую, инвариантную относительно φ.

1520. Доказать, что любое подпространство $\boldsymbol{L}$ действительного пространства $\boldsymbol{R}_n$, инвариантное относительно линейного преобразования φ и имеющее нечетную размерность, содержит прямую, инвариантную относительно φ. Показать на примерах, что для подпространства четной размерности утверждение неверно. При каких условиях $\boldsymbol{L}$ содержит прямую, все точки которой остаются неподвижными при преобразовании φ?

1521. Доказать, что комплексное пространство, содержащее лишь одну прямую, инвариантную относительно линейного преобразования φ, неразложимо в прямую сумму двух ненулевых подпространств, инвариантных относительно φ.

1522. Доказать, что комплексное пространство $\boldsymbol{R}_n$ относительно данного линейного преобразования φ распадается в прямую сумму (одного или нескольких) инвариантных линейных подпространств, каждое из которых содержит лишь одну инвариантную прямую и, значит (по предыдущей задаче), далее не разложимо.

1523*. Пусть φ — линейное преобразование пространства $\boldsymbol{R}_n$ и $g(\lambda)$ — минимальный многочлен φ. Доказать, что:

а) если $g(\lambda) = h(\lambda)k(\lambda)$ и многочлены $h(\lambda)$ и $k(\lambda)$ взаимно просты, то пространство $\boldsymbol{R}_n$ есть прямая сумма подпространств $\boldsymbol{L}_1$, состоящего из всех векторов $\boldsymbol{x}$ таких, что $h(\varphi)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, и $\boldsymbol{L}_2$, состоящего из всех векторов $\boldsymbol{x}$ таких, что $k(\varphi)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$;

б) если $g(\lambda) = h_1(\lambda)h_2(\lambda)\ldots h_s(\lambda)$ и многочлены $h_1(\lambda), h_2(\lambda), \ldots, h_s(\lambda)$ попарно взаимно просты, то пространство $\boldsymbol{R}_n$ есть прямая сумма подпространств $\boldsymbol{L}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$, где $\boldsymbol{L}_1$ состоит из всех векторов $\boldsymbol{x}$ таких, что $h_i(\varphi)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

1524*. Линейное преобразование φ в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ задано матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти минимальный многочлен $g(\lambda)$ этого преобразования и разложение пространства в прямую сумму подпространств, соответствующее разложению $g(\lambda)$ на взаимно простые множители вида $(\lambda - \alpha)^k$.

1525. Решить задачу, аналогичную предыдущей, если линейное преобразование φ в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ задано матрицей

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -5 & 7 & -5 \\ -6 & 6 & -4 \end{pmatrix}.$$

1526. Линейное преобразование φ евклидова (или унитарного) пространства $\boldsymbol{R}_n$ задано равенством $\varphi\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a})\boldsymbol{a}$ для любого $\boldsymbol{x}$ из $\boldsymbol{R}_n$, причем $\boldsymbol{a}$ — данный ненулевой вектор. Найти минимальный многочлен $g(\lambda)$ этого преобразования и разложение пространства в прямую сумму, соответствующее разложению $g(\lambda)$ на взаимно простые степени неприводимых многочленов с вещественными коэффициентами (или многочленов вида $\lambda - \alpha$ в случае унитарного пространства).

1527. Найти жорданову форму матрицы линейного преобразования φ комплексного пространства $\boldsymbol{R}_n$, если φ имеет с точностью до числового множителя только один собственный вектор.

1528. Доказать, что число линейно независимых собственных векторов линейного преобразования φ, принадлежащих одному и тому же собственному значению λ_0, равно числу клеток с диагональным элементом λ_0 в жордановой форме матрицы φ.

1529*. Доказать, что базис, в котором матрица линейного преобразования φ комплексного векторного пространства $\boldsymbol{R}_n$ имеет жорданову форму, можно построить следующим образом:

А) Если не все собственные значения φ равны между собой и характеристический многочлен имеет вид

$$f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1} \dots (\lambda - \lambda_s)^{k_s} \quad (\lambda_i \neq \lambda_j \text{ при } i \neq j),$$

то строим базис подпространства $\boldsymbol{P}_i$ всех векторов $\boldsymbol{x}$ таких, что $(\varphi - \lambda_i \varepsilon)^{k_i} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ (ε — тождественное преобразование, $i = 1, 2, \dots, s$).

Пространство $\boldsymbol{R}_n$ будет прямой суммой подпространств $\boldsymbol{P}_i$. Они инвариантны относительно φ; φ на $\boldsymbol{P}_i$ имеет одно собственное значение λ_i, причем $(\varphi - \lambda_i \varepsilon)^{k_i} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ для любого вектора $\boldsymbol{x}$ из $\boldsymbol{P}_i$. В этом построении вместо характеристического многочлена $f(\lambda)$ можно взять минимальный многочлен $g(\lambda)$, что может понизить показатели степени k_i.

Б) Пусть φ на $\boldsymbol{R}_n$ имеет единственное собственное значение λ_0 и k — наименьшее целое положительное число такое, что $(\varphi - \lambda_0 \varepsilon)^k = 0$. Положим $\psi = \varphi - \lambda_0 \varepsilon$. *Высотой* вектора $\boldsymbol{x}$ назовем наименьшее h такое, что $\psi^h \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. Через $\boldsymbol{R}_h$ обозначим подпространство всех векторов высоты $\leqslant h$ $(0 \leqslant h \leqslant k)$. $\boldsymbol{R}_0$ содержит только нулевой вектор; $\boldsymbol{R}_k$ совпадает со всем пространством.

Строим базис $\boldsymbol{R}_1$, дополняем его до базиса $\boldsymbol{R}_2$, полученный базис дополняем до базиса $\boldsymbol{R}_3$ и т. д., пока не построим базис $\boldsymbol{R}_k$ (для краткости все эти базисы назовем начальными). Для каждого вектора $\boldsymbol{f}$ высоты k начального базиса $\boldsymbol{R}_k$ строим *серию* векторов $\boldsymbol{f}, \psi\boldsymbol{f}, \psi^2\boldsymbol{f}, \dots, \psi^{k-1}\boldsymbol{f}$ с начальным вектором $\boldsymbol{f}$. Берем любой (например, начальный) базис $\boldsymbol{R}_{k-2}$ и векторы высоты $k-1$ всех построенных серий. Это векторы вместе будут линейно независимы. Дополним их до базиса $\boldsymbol{R}_{k-1}$ любыми векторами (например, из начального базиса $\boldsymbol{R}_{k-1}$). Для каждого из дополнительно взятых векторов $\boldsymbol{f}$ (если они вообще существуют) строим новую серию: $\boldsymbol{f}, \psi\boldsymbol{f}, \psi^2\boldsymbol{f}$ и т. д.

Пусть на некотором шаге уже построены серии, в которых векторы высоты $h+1$ вместе с любым (например, начальным) базисом $\boldsymbol{R}_h$ образуют базис $\boldsymbol{R}_{h+1}$. Векторы любого (например, начального) базиса $\boldsymbol{R}_{h-1}$ вместе с векторами высоты h построенных серий будут линейно независимы. Дополним их до базиса $\boldsymbol{R}_h$ любыми векторами (например, из начального базиса $\boldsymbol{R}_h$). Для каждого дополнительно взятого вектора $\boldsymbol{f}$ (если таковые существуют) строим новую серию:

$\boldsymbol{f}, \psi\boldsymbol{f}, \psi^2\boldsymbol{f}, \ldots, \psi^{h-1}\boldsymbol{f}$. Поступаем так до тех пор, пока векторы всех построенных серий не образуют вместе базис всего пространства. Записав векторы серию за серией так, что в каждой серии векторы взяты в обратном порядке (начальный вектор серии берется в данной серии последним), получим искомый базис, в котором матрица преобразования φ имеет жорданову форму.

В) Базис, построение которого указано в пунктах А) и Б), определен не однозначно. Доказать единственность (с точностью до порядка расположения жордановых клеток) жордановой матрицы A_J, подобной данной квадратной матрице A (и, значит, единственность жордановой формы матрицы данного линейного преобразования φ). Именно, доказать, что жорданова форма A_J матрицы A порядка n определяется следующим образом. Пусть k — наивысший порядок жордановых клеток матрицы A_J с числом λ_0 на диагонали, x_h — число таких клеток порядка h $(h = 1, 2, \ldots, k)$, $B = A - \lambda_0 E$, r_h — ранг матрицы B^h $(h = 0, 1, 2, \ldots, k, k+1)$. Тогда числа x_h определяются формулами

$$x_h = r_{h-1} - 2r_h + r_{h+1} \quad (h = 1, 2, \ldots, k). \tag{α}$$

Замечание. Формулы (α) дают прием отыскания жордановой формы A_J без помощи теории элементарных делителей λ-матриц.

Линейное преобразование φ пространства $\boldsymbol{R}_n$ в базисе $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ задано матрицей A. Найти базис $\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_n$, в котором матрица этого преобразования имеет жорданову форму A_J, и найти эту жорданову форму (искомый базис определен неоднозначно).

1530. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 4 & 10 & -12 \\ 3 & 6 & -7 \end{pmatrix}$. **1531.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

1532. $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 8 & 5 \\ 2 & -14 & -10 \end{pmatrix}$. **1533.** $A = \begin{pmatrix} 6 & 6 & -15 \\ 1 & 5 & -5 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

1534. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **1535.** $A = \begin{pmatrix} 6 & -9 & 5 & 4 \\ 7 & -13 & 8 & 7 \\ 8 & -17 & 11 & 8 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1536. $A = B^2$, где

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \text{— клетка Жордана порядка } n.$$

1537*. Линейное преобразование φ пространства $\boldsymbol{R}_n$ называется *инволютивным*, если $\varphi^2 = \varepsilon$, где ε — тождественное преобразование. Выяснить геометрический смысл инволютивного преобразования.

1538*. Линейное преобразование φ пространства $\boldsymbol{R}_n$ называется *идемпотентным*, если $\varphi^2 = \varphi$. Выяснить геометрический смысл идемпотентного преобразования.

1539. Привести примеры линейного преобразования φ трехмерного пространства, для которого:

а) пространство не является прямой суммой области значений $\boldsymbol{L}_1$ и ядра $\boldsymbol{L}_2$ преобразования φ (определение дано в задаче 1488);

б) пространство является прямой суммой области значений $\boldsymbol{L}_1$ и ядра $\boldsymbol{L}_2$ для φ, но φ не является проектированием на $\boldsymbol{L}_1$ параллельно $\boldsymbol{L}_2$.

§ 19. Линейные преобразования евклидовых и унитарных векторных пространств

1540. Доказать, что операция перехода от линейного преобразования φ унитарного (или евклидова) пространства к сопряженному преобразованию φ^* обладает следующими свойствами:

а) $(\varphi^*)^* = \varphi$; б) $(\varphi + \psi)^* = \varphi^* + \psi^*$; в) $(\varphi\psi)^* = \psi^*\varphi^*$;

г) $(\alpha\varphi)^* = \overline{\alpha}\varphi^*$; д) если φ невырожденно, то $(\varphi^{-1})^* = (\varphi^*)^{-1}$.

1541. Пусть $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ — ортонормированный базис плоскости и линейное преобразование φ в базисе $\boldsymbol{f}_1 = \boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{f}_2 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Найти матрицу сопряженного преобразования φ^* в том же базисе $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2$.

1542. Линейное преобразование φ евклидова пространства в базисе из векторов $\boldsymbol{f}_1 = (1, 2, 1)$, $\boldsymbol{f}_2 = (1, 1, 2)$, $\boldsymbol{f}_3 = (1, 1, 0)$ задано матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \\ 2 & 7 & -3 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу сопряженного преобразования φ^* в том же базисе, считая, что координаты векторов базиса даны в некотором ортонормированном базисе.

1543. Найти матрицу линейного преобразования φ^*, сопряженного преобразованию φ в ортонормированном базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$, если φ переводит векторы $\boldsymbol{a}_1 = (0, 0, 1)$, $\boldsymbol{a}_2 = (0, 1, 1)$, $\boldsymbol{a}_3 == (1, 1, 1)$ в векторы $\boldsymbol{b}_1 = (1, 2, 1)$, $\boldsymbol{b}_2 = (3, 1, 2)$, $\boldsymbol{b}_3 = (7, -1, 4)$ соответственно, где координаты всех векторов даны в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$.

1544. Пусть xOy — прямоугольная система координат на плоскости и φ — проектирование плоскости на ось Ox параллельно биссектрисе первой и третьей четверти. Найти сопряженное преобразование φ^*.

1545*. Пусть $\boldsymbol{R}_n = \boldsymbol{L}_1 + \boldsymbol{L}_2$ — разложение евклидова (или унитарного) пространства в прямую сумму двух подпространств; φ — проектирование $\boldsymbol{R}_n$ на $\boldsymbol{L}_1$ параллельно $\boldsymbol{L}_2$; $\boldsymbol{L}_1^*$ и $\boldsymbol{L}_2^*$ — ортогональные дополнения соответственно для $\boldsymbol{L}_1$ и $\boldsymbol{L}_2$; φ^* — преобразование, сопряженное с φ. Доказать, что $\boldsymbol{R}_n = \boldsymbol{L}_1^* + \boldsymbol{L}_2^*$ и что φ^* является проектированием $\boldsymbol{R}_n$ на $\boldsymbol{L}_2^*$ параллельно $\boldsymbol{L}_1^*$.

1546. Доказать, что если подпространство $\boldsymbol{L}$ унитарного (или евклидова) пространства инвариантно относительно линейного преобразования φ, то ортогональное дополнение $\boldsymbol{L}^*$ инвариантно относительно сопряженного преобразования φ^*.

1547*. Доказать, что линейное преобразование φ унитарного пространства $\boldsymbol{R}_n$ имеет инвариантное подпространство любого числа измерений от нуля до n.

1548*. Доказать, что для любого линейного преобразования φ унитарного пространства существует ортонормированный базис, в котором матрица этого преобразования имеет треугольную форму (теорема Шура).

1549. Написать уравнение плоскости, инвариантной относительно линейного преобразования φ, заданного в некотором ортонормированном базисе матрицей
$$\begin{pmatrix} 4 & -23 & 17 \\ 11 & -43 & 30 \\ 15 & -54 & 37 \end{pmatrix}.$$

1550. Доказать, что если один и тот же вектор $\boldsymbol{x}$ является собственным для линейного преобразования φ со значением λ_1 и для сопряженного преобразования φ^* со значением λ_2, то $\lambda_1 = \overline{\lambda}_2$.

1551. Доказать, что если линейное преобразование φ унитарного пространства $\boldsymbol{R}_n$ имеет собственные значения $\lambda_1, \lambda_2 \ldots, \lambda_n$, то собственными значениями сопряженного преобразования φ^* будут сопряженные числа $\overline{\lambda}_1, \overline{\lambda}_2, \ldots, \overline{\lambda}_n$.

1552. Доказать, что соответствующие друг другу коэффициенты минимальных многочленов сопряженных между собой линейных преобразований сопряжены друг другу.

1553*. Пусть линейное преобразование φ унитарного (или евклидова) пространства в базисе $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ имеет матрицу A, а сопряженное преобразование φ^* во взаимном базисе (см. задачу 1417) $\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_n$ — матрицу B. Доказать, что $B = \bar{A}'$ в унитарном пространстве и $B = A'$ в евклидовом пространстве.

1554*. Пусть скалярное произведение $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ в некотором базисе задано билинейной формой $\boldsymbol{f}$ с матрицей U (иными словами, матрица U является матрицей Грама векторов базиса). Показать, что матрица A

линейного преобразования φ и матрица A_1 сопряженного преобразования φ^* в данном базисе связаны так:

а) $A_1 = U^{-1}A'U$ для евклидова пространства;

б) $\overline{A}_1 = U^{-1}A'U$ для унитарного пространства.

Пусть в некотором базисе скалярное произведение задано билинейной формой f, а линейное преобразование φ — матрицей A. Найти матрицу A_1 сопряженного преобразования φ^* в том же базисе:

1555. $f = x_1y_1 + 5x_2y_2 + 6x_3y_3 + 2x_1y_3 + 2x_3y_1 + 3x_2y_3 + 3x_3y_2$;

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

1556. $f = 2x_1y_1 + 3x_2y_2 + x_3y_3 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 + x_2y_3 + x_3y_2$;

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Пусть U — матрица Грама некоторого базиса и A — матрица линейного преобразования φ. Найти матрицу A_1 сопряженного преобразования φ^* в том же базисе:

1557. $U = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$; $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1558. $U = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

1559. Пусть φ — линейное преобразование унитарного или евклидова пространства. Доказать, что $(e^{\varphi})^* = e^{\varphi^*}$. (Определение функции от линейного преобразования дано в задаче 1464.)

1560. Доказать, что произведение двух ортогональных (соответственно унитарных) преобразований само ортогонально (унитарно).

1561. Доказать, что если линейное преобразование φ унитарного (или евклидова) пространства сохраняет длины всех векторов, то оно унитарно (соответственно ортогонально).

1562*. Пусть в унитарном (или евклидовом) пространстве задано некоторое преобразование φ, в силу которого каждому вектору $\boldsymbol{x}$ соответствует единственный вектор $\varphi\boldsymbol{x}$. Доказать, что если преобразование φ сохраняет скалярное произведение, т. е. $(\varphi\boldsymbol{x}, \varphi\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ для любых векторов $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ пространства, то φ будет линейным и, значит, унитарным (соответственно ортогональным) преобразованием.

Показать на примерах, что сохранения скалярных квадратов всех векторов недостаточно для линейности φ.

1563. Пусть скалярное умножение векторов пространства $\boldsymbol{R}_n$ задано матрицей Грама U векторов некоторого базиса. Найти условие, необходимое и достаточное для того, чтобы линейное преобразование φ, заданное в том же базисе матрицей A, было:

а) ортогональным преобразованием евклидова пространства,

б) унитарным преобразованием унитарного пространства.

1564. Доказать, что если два вектора $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ евклидова (или унитарного) пространства имеют одинаковую длину, то существует ортогональное (соответственно унитарное) преобразование φ, переводящее $\boldsymbol{x}$ в $\boldsymbol{y}$.

1565. Доказать, что если две пары векторов $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ и $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2$ евклидова (или унитарного) пространства обладают свойствами $|\boldsymbol{x}_1| = |\boldsymbol{y}_1|$, $|\boldsymbol{x}_2| = |\boldsymbol{y}_2|$ и угол между $\boldsymbol{x}_1$ и $\boldsymbol{x}_2$ равен углу между $\boldsymbol{y}_1$ и $\boldsymbol{y}_2$, то существует ортогональное (соответственно унитарное) преобразование φ такое, что $\varphi\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{y}_1$, $\varphi\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{y}_2$.

1566*. Пусть даны две системы векторов $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ и $\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_k$ евклидова (или унитарного) пространства. Доказать утверждение: для того чтобы существовало ортогональное (соответственно унитарное) преобразование φ такое, что $\varphi\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{y}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$, необходимо и достаточно, чтобы матрицы Грама обеих систем векторов совпадали: $((\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_j))_1^k = ((\boldsymbol{y}_i, \boldsymbol{y}_j))_1^k$.

1567*. Пусть φ — унитарное (или ортогональное) преобразование унитарного (соответственно евклидова) пространства $\boldsymbol{R}_n$. Доказать, что ортогональное дополнение $\boldsymbol{L}^*$ к линейному подпространству $\boldsymbol{L}$, инвариантному относительно φ, также инвариантно относительно φ.

1568. Доказать, что два перестановочных унитарных преобразования унитарного пространства обладают общим ортонормированным базисом собственных векторов.

1569*. Доказать, что для унитарного преобразования φ унитарного пространства:

а) собственные значения по модулю равны единице (и, значит, характеристические числа унитарной, в частности вещественной ортогональной, матрицы по модулю равны единице);

б) собственные векторы, принадлежащие двум различным собственным значениям, ортогональны;

в) если в некотором базисе матрица A преобразования φ вещественна и собственный вектор, принадлежащий комплексному собственному значению $\alpha + \beta i$ $(\beta \neq 0)$, представлен в виде $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}i$, где векторы $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ имеют вещественные координаты, то $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ ортогональны и имеют одинаковую длину, причем

$$\varphi \boldsymbol{x} = \alpha \boldsymbol{x} - \beta \boldsymbol{y}; \quad \varphi \boldsymbol{y} = \beta \boldsymbol{x} + \alpha \boldsymbol{y}; \tag{1}$$

г) ортогональное преобразование евклидова пространства всегда обладает одномерным или двумерным инвариантным подпространством.

1570*. Доказать, что:

а) для любого унитарного преобразования φ унитарного пространства $\boldsymbol{R}_n$ существует ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов преобразования φ. В этом базисе матрица φ является диагональной с диагональными элементами, равными по модулю единице.

Какое свойство унитарных матриц отсюда вытекает?

б) для любого ортогонального преобразования φ евклидова пространства $\boldsymbol{R}_n$ существует ортонормированный базис, в котором матрица φ имеет канонический вид, где на главной диагонали стоят клетки второго порядка вида

$$\begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma \\ \sin\gamma & \cos\gamma \end{pmatrix} \quad (\gamma \neq k\pi)$$

и клетки первого порядка вида (± 1).

Клетки какого-нибудь из этих типов могут отсутствовать. Все остальные элементы равны нулю. Каков геометрический смысл преобразования? Какое свойство вещественных ортогональных матриц отсюда вытекает?

Для ортогонального преобразования φ, заданного в ортонормированном базисе матрицей A, найти ортонормированный базис, в котором матрица B этого преобразования имеет канонический вид, указанный в задаче 1570. Найти канонический вид. (Искомый базис определен неоднозначно.)

1571. $A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$. **1572.** $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$.

1573. $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{6}\sqrt{2} & \frac{2}{3}\sqrt{2} & \frac{1}{6}\sqrt{2} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

Найти канонический вид B ортогональной матрицы A и ортогональную матрицу Q такую, что $B = Q^{-1}AQ$:

1574. $A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$. **1575.** $A = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4}\sqrt{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4}\sqrt{6} \\ \frac{1}{4}\sqrt{6} & -\frac{1}{4}\sqrt{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

1576. $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. **1577.** $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

1578. Для данной унитарной матрицы

$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4+3i & 4i & -6-2i \\ -4i & 4-3i & -2-6i \\ 6+2i & -2-6i & 1 \end{pmatrix}$$

найти диагональную матрицу B и унитарную матрицу Q такие, что

$$B = Q^{-1}AQ.$$

1579. Доказать, что линейная комбинация самосопряженных преобразований с вещественными коэффициентами (в частности, сумма двух самосопряженных преобразований) есть самосопряженное преобразование.

1580. Доказать, что произведение $\varphi\psi$ двух самосопряженных преобразований φ и ψ и тогда и только тогда будет самосопряженным, когда φ и ψ перестановочны.

1581. Доказать, что если φ и ψ — самосопряженные преобразования, то самосопряженными будут также преобразования

$$\varphi\psi + \psi\varphi \text{ и } i(\varphi\psi - \psi\varphi).$$

1582. Доказать, что отражение φ евклидова (или унитарного) пространства $\boldsymbol{R}_n$ в подпространстве $\boldsymbol{L}_1$ параллельно подпространству $\boldsymbol{L}_2$ тогда и только тогда будет самосопряженным линейным преобразованием, когда $\boldsymbol{L}_1$ и $\boldsymbol{L}_2$ ортогональны.

1583. Доказать, что проектирование φ евклидова (или унитарного) пространства $\boldsymbol{R}_n$ на подпространство $\boldsymbol{L}_1$ параллельно подпространству $\boldsymbol{L}_2$ тогда и только тогда будет самосопряженным линейным преобразованием, когда $\boldsymbol{L}_1$ и $\boldsymbol{L}_2$ ортогональны.

1584. Доказать, что если линейное преобразование φ унитарного (или евклидова) пространства $\boldsymbol{R}_n$ обладает любыми двумя из следующих трех свойств:

1) φ — самосопряженное преобразование;

2) φ — унитарное (соответственно ортогональное) преобразование;

3) φ — инволютивное преобразование, т. е. $\varphi^2 = \varepsilon$ — тождественное преобразование,

то оно обладает и третьим свойством. Найти все типы преобразований, обладающих всеми этими свойствами.

Найти ортонормированный базис собственных векторов и матрицу B в этом базисе для линейного преобразования, заданного в некотором ортонормированном базисе матрицей A (искомый базис определен не однозначно):

1585. $A = \begin{pmatrix} 11 & 2 & -8 \\ 2 & 2 & 10 \\ -8 & 10 & 5 \end{pmatrix}$. **1586.** $A = \begin{pmatrix} 17 & -8 & 4 \\ -8 & 17 & -4 \\ 4 & -4 & 11 \end{pmatrix}$.

1587. $A = \begin{pmatrix} 3 & -i & 0 \\ i & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Для данной матрицы A найти диагональную матрицу B и унитарную матрицу C такие, что $B = C^{-1}AC$.

1588. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2+2i \\ 2-2i & 1 \end{pmatrix}$. **1589.** $A = \begin{pmatrix} 3 & 2-i \\ 2+i & 7 \end{pmatrix}$.

1590*. Рассмотрим n^2-мерное пространство всех комплексных квадратных матриц порядка n с обычными операциями сложения матриц и умножения матрицы на число. Превратим это пространство в унитарное, считая, что скалярное произведение двух матриц $A = (a_{ij})_1^n$ и $B = (b_{ij})_1^n$ задано равенством $(AB) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}\bar{b}_{ij}$.

Доказать, что:

а) умножение всех матриц слева на одну и ту же матрицу C является линейным преобразованием;

б) унитарные матрицы как векторы указанного пространства имеют длину $\sqrt{n}$;

в) умножения всех матриц слева на сопряженно-транспонированные матрицы C и $\bar{C}'$ вызывают сопряженные преобразования;

г) умножение слева на унитарную матрицу C вызывает унитарное преобразование;

д) умножение на эрмитову матрицу вызывает самосопряженное преобразование;

е) умножение на косоэрмитову матрицу вызывает кососимметрическое преобразование.

1591. Пусть скалярное умножение векторов пространства $\boldsymbol{R}_n$ задано матрицей Грама U некоторого базиса. Найти условие, необходимое и достаточное для того, чтобы линейное преобразование φ, заданное в том же базисе матрицей A, было самосопряженным в случае: а) евклидова, б) унитарного пространства.

1592*. Доказать, что два самосопряженных преобразования φ и ψ унитарного (или евклидова) пространства $\boldsymbol{R}_n$ тогда и только тогда имеют общий ортонормированный базис собственных векторов обоих преобразований, когда эти преобразования перестановочны. Какое свойство квадратичных форм и поверхностей второго порядка отсюда вытекает?

1593. Пусть $\boldsymbol{R}$ — евклидово пространство размерности n^2, векторами которого являются все вещественные матрицы порядка n с обычными сложением матриц и умножением матрицы на число, а скалярное произведение матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ определено равенством $(AB) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}b_{ij}$. Пусть, далее, P и Q — вещественные симметрические матрицы порядка n.

Доказать, что линейные преобразования $\varphi X = PX$ и $\psi X = XQ$ (X — любая матрица из пространства $\boldsymbol{R}$) являются перестановочными самосопряженными преобразованиями пространства $\boldsymbol{R}$, и найти связь между общим ортонормированным базисом собственных векторов преобразований φ и ψ и ортонормированными базисами собственных векторов матриц P и Q.

1594. Самосопряженное линейное преобразование φ унитарного (или евклидова) пространства $\boldsymbol{R}_n$ называется положительно определенным, если $(\varphi\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) > 0$, и неотрицательным, если $(\varphi\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geqslant 0$ для любого вектора $\boldsymbol{x} \neq 0$ из $\boldsymbol{R}_n$. Доказать, что самосопряженное преобразование φ тогда и только тогда является положительно определенным (или неотрицательным), когда все его собственные значения положительны (соответственно неотрицательны). Показать, что для любого (а не только для самосопряженного) линейного преобразования φ из $(\varphi\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) > 0$ (или $\geqslant 0$) следует, что все собственные значения φ положительны (соответственно неотрицательны). Привести пример, показывающий, что для самосопряженного линейного преобразования обратное утверждение может быть неверно.

1595*. Доказать, что если $\varphi = \psi\chi$ или $\varphi = \chi\psi$, где φ и ψ — самосопряженные линейные преобразования с положительными собственными значениями, а χ — унитарное преобразование, то $\varphi = \psi$ и χ — тождественное преобразование (см. задачу 1276, в).

1596*. Доказать, что любое невырожденное линейное преобразование φ унитарного (или евклидова) пространства представляется как в виде $\varphi = \psi_1\chi_1$, так и в виде $\varphi = \chi_2\psi_2$, где ψ_1, ψ_2 — самосопряженные преобразования с положительными собственными значениями, а χ_1, χ_2 — унитарные (соответственно ортогональные) преобразования, причем оба указанных представления единственны.

1597. Почему равенства

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

не приводят к противоречию с единственностью представления, указанного в предыдущей задаче.

Следующие матрицы представить в виде произведения симметрической матрицы с положительными характеристическими числами на ортогональную матрицу:

1598 $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. **1599.** $\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. **1600.** $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 4 & 4 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

1601. Доказать, что самосопряженное линейное преобразование φ тогда и только тогда является положительно определенным, когда коэффициенты его характеристического многочлена $\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \dots + c_n$ все отличны от нуля и имеют чередующиеся знаки, и неотрицательным (т. е. с неотрицательными собственными значениями) тогда и только тогда, когда коэффициенты $c_0 = 1, c_1, c_2, \dots, c_k$ отличны от нуля и имеют чередующиеся знаки, а $c_{k+1}, \dots, c_n$ равны нулю. Здесь k — любое число от 0 до n.

1602*. Доказать, что если φ и ψ — самосопряженные преобразования и φ — положительно определенно, то собственные значения преобразования $\varphi\psi$ вещественны.

1603*. Доказать, что если φ и ψ — самосопряженные преобразования с неотрицательными собственными значениями, причем одно из них невырожденно, то собственные значения преобразования $\varphi\psi$ вещественны и неотрицательны.

1604. Доказать, что сумма двух или нескольких неотрицательных самосопряженных преобразований (см. задачу 1594) является снова неотрицательным самосопряженным преобразованием.

1605*. Доказать, что неотрицательное самосопряженное преобразование ранга r есть сумма r неотрицательных самосопряженных преобразований ранга 1.

1606*. Доказать, что линейное преобразование φ унитарного пространства $\boldsymbol{R}_n$, имеющее ранг единица, тогда и только тогда будет неотрицательным самосопряженным, когда в любом ортонормированном базисе его матрица представляется в виде $\bar{X}'X$, где X — строка n чисел.

1607*. Доказать, что если матрицы $A = (a_{ij})_1^n$ и $B = (b_{ij})_1^n$ эрмитовы и неотрицательны (т. е. имеют неотрицательные собственные значения), то и матрица $C = (c_{ij})_1^n$, где $c_{ij} = a_{ij}b_{ij}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$, эрмитова и неотрицательна (ср. с задачей 1220).

1608. Линейное преобразование φ евклидова (или унитарного) пространства $\boldsymbol{R}_n$ называется кососимметрическим, если $\varphi^* = -\varphi$, где φ^* — преобразование, сопряженное φ. Доказать, что:

а) для того чтобы линейное преобразование φ евклидова пространства было кососимметрическим, необходимо и достаточно, чтобы его матрица A в любом ортонормированном базисе была кососимметрической, т. е. $A' = -A$;

б) для того чтобы линейное преобразование φ унитарного пространства было кососимметрическим, необходимо и достаточно, чтобы его матрица A в любом ортонормированном базисе была косоэрмитовой, т. е. $\bar{A}' = -A$.

1609*. Доказать, что ортогональное дополнение $\boldsymbol{L}^*$ к линейному подпространству $\boldsymbol{L}$ евклидова (или унитарного) пространства, инвариантному относительно кососимметрического преобразования φ, также инвариантно относительно φ.

1610*. Доказать, что для кососимметрического преобразования φ унитарного пространства:

а) собственные значения чисто мнимы (и, значит, характеристические числа комплексной косоэрмитовой, в частности вещественной кососимметрической, матрицы чисто мнимы);

б) собственные векторы, принадлежащие двум различным собственным значениям, ортогональны;

в) если в ортонормированном базисе матрица A преобразования φ вещественна и собственный вектор, принадлежащий значению $\beta i \neq 0$, представлен в виде $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}i$, где векторы $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ имеют вещественные координаты, то $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ ортогональны и имеют одинаковую длину, причем

$$\varphi \boldsymbol{x} = -\beta \boldsymbol{y}, \quad \varphi \boldsymbol{y} = \beta \boldsymbol{x}; \tag{1}$$

г) кососимметрическое преобразование евклидова пространства всегда обладает одномерным или двумерным инвариантным подпространством.

1611*. Доказать, что:

а) для любого кососимметрического преобразования φ унитарного пространства $\boldsymbol{R}_n$ существует ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов преобразования φ. В этом базисе матрица φ является диагональной с чисто мнимыми элементами на диагонали (причем некоторые из этих элементов могут равняться нулю). Какое свойство комплексных косоэрмитовых матриц отсюда вытекает?

б) для любого кососимметрического преобразования φ евклидова пространства $\boldsymbol{R}_n$ существует ортонормированный базис, в котором матрица имеет следующий канонический вид: по главной диагонали стоят клетки второго порядка вида $\begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix}$, где $\beta \neq 0$, и нулевые клетки первого порядка (клетки одного из этих типов могут отсутствовать). Каков геометрический смысл преобразования, какое свойство вещественных кососимметрических матриц отсюда вытекает?

1612. Доказать, что если φ — самосопряженное преобразование унитарного пространства, то преобразование $\psi = i\varphi$ является кососимметрическим. Обратно, если φ — кососимметрическое, то $\psi = i\varphi$ — самосопряженное преобразование.

1613. Доказать, что если φ — самосопряженное преобразование унитарного пространства, то преобразование $\psi = (\varphi - i\varepsilon)^{-1}(\varphi + i\varepsilon)$, где ε — тождественное преобразование, существует и является унитарным.

1614*. Доказать, что кососимметрические и унитарные преобразования унитарного пространства (и соответственно кососимметрические и ортогональные преобразования евклидова пространства) связаны следующим образом: если в равенстве

$$\psi = (\varepsilon - \varphi)(\varepsilon + \varphi)^{-1} \tag{1}$$

(где ε — тождественное преобразование) φ — кососимметрическое преобразование, то ψ — унитарное преобразование, не имеющее собственным значением число -1. Обратно, если в том же равенстве (1) φ — унитарное преобразование, не имеющее собственным значением число -1, то ψ — кососимметрическое преобразование. Равенство (1) определяет взаимно однозначное отображение всех кососимметрических преобразований на все унитарные преобразования, не имеющие собственным значением число -1. Аналогичная связь имеется между кососимметрическими и ортогональными преобразованиями евклидова пространства. Какие свойства матриц отсюда вытекают?

1615. Показать, что равенство (1) предыдущей задачи определяет взаимно однозначное соответствие, во-первых, между всеми невырожденными кососимметрическими преобразованиями и всеми унитарными (соответственно ортогональными) преобразованиями, не имеющими собственных значений ± 1, и, во-вторых, между всеми вырожденными кососимметрическими преобразованиями и всеми унитарными (ортогональными) преобразованиями, имеющими собственные значения $+1$, но не имеющими собственного значения -1.

1616. Доказать, что если φ — кососимметрическое преобразование унитарного (или евклидова) пространства, то преобразование e^{φ} является унитарным (соответственно ортогональным). Какое свойство матриц отсюда вытекает?

1617*. Доказать, что функция e^{φ} вызывает взаимно однозначное отображение всех самосопряженных преобразований унитарного (или евклидова) пространства на все положительно определенные (т. е. самосопряженные с положительными собственными значениями) преобразования.

1618. Линейное преобразование φ унитарного (или евклидова) пространства называется нормальным, если оно перестановочно с сопряженным ему преобразованием φ^*. Проверить, что самосопряженные, кососимметрические и унитарные (или ортогональные) преобразования нормальны.

1619. Доказать, что нормальное преобразование унитарного (или евклидова) пространства тогда и только тогда является самосопряженным, когда все его собственные значения (соответственно все корни его характеристического уравнения) вещественны.

1620. Доказать, что нормальное преобразование унитарного (или евклидова) пространства тогда и только тогда является унитарным (соответственно ортогональным), когда все его собственные значения (соответственно все корни его характеристического уравнения) по модулю равны единице.

1621. Доказать, что нормальное преобразование унитарного (или евклидова) пространства тогда и только тогда является кососимметрическим, когда все его собственные значения (соответственно все корни его характеристического уравнения) чисто мнимы.

1622. Доказать, что линейное преобразование φ унитарного пространства тогда и только тогда является нормальным, когда $\varphi = \psi\chi$, где ψ — самосопряженное и χ — унитарное преобразования, перестановочные между собой.

1623. Доказать, что:

а) каждое линейное преобразование φ однозначно представляется в виде $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, где φ_1 — самосопряженное и φ_2 — кососимметрическое преобразования;

б) для того чтобы преобразование φ было нормальным, необходимо и достаточно, чтобы преобразования φ_1 и φ_2 в вышеуказанном представлении были перестановочны.

1624. Доказать, что:

а) каждое линейное преобразование φ унитарного пространства однозначно представляется в виде $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$, где φ_1 и φ_2 — самосопряженные преобразования;

б) для того чтобы преобразование φ было нормальным, необходимо и достаточно, чтобы преобразования φ_1 и φ_2 в вышеуказанном представлении были перестановочны.

1625*. Доказать, что для любой (конечной или бесконечной) совокупности попарно перестановочных нормальных преобразований унитарного пространства $\boldsymbol{R}_n$ существует ортонормированный базис, векторы которого являются собственными для всех преобразований данной совокупности.

1626. Доказать, что из любого нормального преобразования φ унитарного пространства $\boldsymbol{R}_n$ можно в области нормальных преобразований извлечь корень k-й степени для любого натурального числа k. Найти число различных нормальных преобразований ψ таких, что $\psi^k = \varphi$.

1627*. Доказать, что если $\boldsymbol{x}$ — собственный вектор нормального преобразования φ унитарного (или евклидова) пространства, принадлежащий собственному значению λ, то $\boldsymbol{x}$ является собственным вектором для сопряженного преобразования φ^*, принадлежащим сопряженному (соответственно тому же самому) числу $\overline{\lambda}$.

1628*. Доказать, что собственные векторы нормального преобразования, принадлежащие двум различным собственным значениям, ортогональны.

1629*. Пусть $\boldsymbol{e}$ — собственный вектор нормального преобразования φ. Доказать, что подпространство $\boldsymbol{L}$, состоящее из всех векторов пространства, ортогональных $\boldsymbol{e}$, инвариантно относительно φ.

1630*. Доказать, что для нормальности линейного преобразования φ унитарного пространства необходимо и достаточно, чтобы каждый собственный вектор φ был собственным и для φ^*.

1631*. Доказать, что любое подпространство $\boldsymbol{L}$ унитарного пространства $\boldsymbol{R}_n$, инвариантное относительно нормального преобразования φ, обладает ортонормированным базисом, состоящим из собственных векторов преобразования φ.

1632.* Говорят, что линейное преобразование φ унитарного (или евклидова) пространства $\boldsymbol{R}_n$ обладает *нормальным свойством*, если ортогональное дополнение $\boldsymbol{L}^*$ для каждого подпространства $\boldsymbol{L}$, инвариантного относительно φ, само инвариантно относительно φ. Доказать утверждение: для того чтобы линейное преобразование φ унитарного (или евклидова) пространства было нормальным, необходимо и достаточно, чтобы φ обладало нормальным свойством.

1633.* Доказать, что для нормальности линейного преобразования φ унитарного (или евклидова) пространства необходимо и достаточно, чтобы каждое подпространство, инвариантное относительно φ, было инвариантно и относительно φ^*.

Дополнение

§ 20. Группы

1634. Выяснить, образует ли группу каждое из следующих множеств при указанной операции над элементами:

1) целые числа относительно сложения;
2) четные числа относительно сложения;
3) целые числа, кратные данному натуральному числу n, относительно сложения;
4) степени данного действительного числа a, $a \neq 0, \pm 1$, с целыми показателями относительно умножения;
5) неотрицательные целые числа относительно сложения;
6) нечетные целые числа относительно сложения;
7) целые числа относительно вычитания;
8) рациональные числа относительно сложения;
9) рациональные числа относительно умножения;
10) рациональные числа, отличные от нуля, относительно умножения;
11) положительные рациональные числа относительно умножения;
12) положительные рациональные числа относительно деления;
13) двоично-рациональные числа, т. е. рациональные числа, знаменатели которых — степени числа 2 с целыми неотрицательными показателями, относительно сложения;
14) все рациональные числа, знаменатели которых равны произведениям простых чисел из данного множества M (конечного или бесконечного) с целыми неотрицательными показателями (лишь конечное число которых может быть отлично от нуля), относительно сложения;
15) корни n-й степени из единицы (как действительные, так и комплексные) относительно умножения;
16) корни всех целых положительных степеней из единицы относительно умножения;
17) матрицы порядка n с действительными элементами относительно умножения;
18) невырожденные матрицы порядка n с действительными элементами относительно умножения;

19) матрицы порядка n с целыми элементами относительно умножения;

20) матрицы порядка n с целыми элементами и определителем, равным единице, относительно умножения;

21) матрицы порядка n с целыми элементами и определителем, равным ± 1, относительно умножения;

22) матрицы порядка n с действительными элементами относительно сложения;

23) подстановки чисел 1, 2, ..., n относительно умножения;

24) четные подстановки чисел 1, 2, ..., n относительно умножения;

25) нечетные подстановки чисел 1, 2, ..., n относительно умножения;

26) взаимно однозначные отображения множества $N = \{1, 2, 3, \ldots, \}$ натуральных чисел на себя, каждое из которых перемещает лишь конечное число чисел, если за произведение отображений s и t принято отображение st, которое получается при последовательном выполнении отображений s и t;

27) преобразования множества M, т.е. взаимно однозначные отображения этого множества на себя, если за произведение преобразований s и t принято преобразование st, которое получается при последовательном выполнении преобразований s и t;

28) векторы n-мерного линейного пространства $\boldsymbol{R}_n$ относительно сложения;

29) параллельные переносы трехмерного пространства $\boldsymbol{R}$, если за произведение переносов s и t принято их последовательное выполнение;

30) повороты трехмерного пространства $\boldsymbol{R}$ вокруг данной точки O, если за произведение поворотов s и t принято их последовательное выполнение;

31) все движения трехмерного пространства $\boldsymbol{R}$, если за произведение движений s и t принято движение st, получающееся при последовательном выполнении движений s и t;

32) положительные действительные числа, если операция определяется так: $a * b = a^b$;

33) положительные действительные числа, если операция определяется так: $a * b = a^2 b^2$;

34) действительные многочлены степени $\leqslant n$ (включая нуль) от неизвестного x относительно сложения;

35) действительные многочлены степени n от неизвестного x относительно сложения;

36) действительные многочлены любых степеней (включая нуль) от неизвестного x относительно сложения.

1635. Доказать, что конечное множество G, в котором определена ассоциативная алгебраическая операция и каждое из уравнений $ax = b$, $ya = b$ для любых a и b из G имеет в G не более одного решения, будет группой.

1636. Доказать, что если $a^2 = e$ для любого элемента a группы G, то эта группа абелева.

1637*. Доказать, что группа корней n-й степени из единицы является единственной мультипликативной группой n-го порядка с числовыми элементами, отличной от $\{0\}$.

1638*. Найти все (с точностью до изоморфизма) группы порядка а) 3; б) 4; в) 6. Написать таблицы умножения этих групп и представить эти группы в виде групп подстановок.

1639*. Показать, что вращения каждого из пяти правильных многогранников вокруг центра, совмещающие многогранник с самим собой, образуют группу, если за умножение двух вращений принять их последовательное выполнение. Найти порядки этих групп.

1640. Доказать, что группы 1)–4) задачи 1634 изоморфны между собой.

1641. Доказать, что:

а) все бесконечные циклические группы изоморфны между собой;

б) все конечные циклические группы данного порядка n изоморфны между собой.

1642. Доказать, что:

а) группа положительных действительных чисел по умножению изоморфна группе всех действительных чисел по сложению;

б) группа положительных рациональных чисел по умножению не изоморфна группе всех рациональных чисел по сложению.

1643*. Доказать, что:

а) любая конечная группа порядка n изоморфна некоторой группе подстановок n элементов;

б) любая группа изоморфна группе некоторых взаимно однозначных отображений множества элементов этой группы на себя.

1644. Доказать, что для любых элементов a, b, c группы G:

а) элементы ab и ba имеют одинаковый порядок;

б) элементы abc, bca и cab имеют одинаковый порядок.

1645. Доказать, что если e — единица и a — элемент порядка n группы G, то $a^k = e$ тогда и только тогда, когда k делится на n.

1646. Найти все образующие элементы аддитивной группы целых чисел.

1647. Пусть $G = \{a\}$ — циклическая группа порядка n и $b = a^k$. Доказать, что:

а) элемент b тогда и только тогда будет образующим группы G, когда числа n и k взаимно просты;

б) порядок элемента b равен n/d, где d — наибольший общий делитель n и k;

в) если n и k взаимно просты, то в G существует корень $\sqrt[k]{a}$, т. е. a является k-й степенью некоторого элемента из G и обратно;

г) в группе нечетного порядка все элементы являются квадратами.

1648*. Доказать утверждения:

а) если элементы a и b группы G перестановочны, т. е.

$$ab = ba, \tag{1}$$

и имеют конечные взаимно простые порядки r и s, то их произведение ab имеет порядок rs;

б) если элементы a и b группы G перестановочны, имеют конечные порядки r и s и пересечение их циклических подгрупп содержит лишь единицу e, т. е.

$$\{a\} \cap \{b\} = \{e\}, \tag{2}$$

то порядок произведения ab равен наименьшему общему кратному r и s. Показать на примерах, что для справедливости последнего утверждения каждого из условий (1) и (2) в отдельности недостаточно и что условие (1) не является следствием условия (2) даже для взаимно простых порядков элементов a и b;

в) если порядки r и s элементов a и b взаимно просты, то условие (2) выполняется;

г) показать на примере, что без условия (2) порядок произведения ab не определяется однозначно порядками сомножителей a и b.

1649. Какие из групп задачи 1634 являются подгруппами других из этих групп?

1650. Доказать, что:

а) если H — конечное множество элементов группы G и произведение двух любых элементов из H снова лежит в H, то H будет подгруппой группы G;

б) если все элементы множества H группы G имеют конечные порядки и произведение двух любых элементов из H снова лежит в H, то H будет подгруппой группы G.

1651. Доказать, что в любой группе подстановок, содержащей хотя бы одну нечетную подстановку:

а) число четных подстановок равно числу нечетных;

б) четные подстановки образуют нормальный делитель;

в) все простые группы подстановок n элементов порядка больше 2 содержатся в знакопеременной группе A_n (*простой* называется группа, не имеющая нормальных делителей, кроме себя самой и единичной подгруппы).

1652. Доказать, что любая бесконечная группа имеет бесконечное число подгрупп.

1653. Найти все (с точностью до изоморфизма) группы, каждая из которых изоморфна любой своей неединичной подгруппе.

1654. Найти все подгруппы:

а) циклической группы порядка 6;

б) циклической группы порядка 24;

в) четверной группы (задача 1638);

г) симметрической группы S_3.

д) Какие из подгрупп группы S_3 являются нормальными делителями?

е) Доказать, что знакопеременная группа четвертой степени A_4 не имеет подгруппы шестого порядка. Таким образом, группа G порядка n для некоторых k, делящих n, может не иметь подгрупп порядка k.

1655. Найти все подгруппы группы G порядка 8, все элементы которой, кроме единицы e, имеют порядок 2.

1656. Пусть $G = \{a\}$ — конечная циклическая группа порядка n. Доказать утверждения:

а) порядок любой подгруппы группы G делит порядок n этой группы;

б) для любого делителя d числа n существует единственная подгруппа H группы G, имеющая порядок d;

в) подгруппа H порядка d содержит в качестве образующих все элементы порядка d группы G. В частности, $H = \{a^{\frac{n}{d}}\}$.

1657*. Найти все подгруппы примарной циклической группы, т. е. циклической группы $G = \{a\}$ порядка p^k, где p — простое число.

1658*. Доказать утверждения:

а) симметрическая группа S_n при $n > 1$ порождается множеством всех транспозиций (i, j);

б) симметрическая группа S_n при $n > 1$ порождается транспозициями: $(1,2), (1,3), \ldots, (1,n)$;

в) знакопеременная группа A_n при $n > 2$ порождается множеством всех тройных циклов $(i\,j\,k)$;

г) знакопеременная группа A_n при $n > 2$ порождается тройными циклами: $(1\ 2\ 3), (1\ 2\ 4), \ldots, (1\ 2\ n)$.

1659. Найти смежные классы:

а) аддитивной группы целых чисел по подгруппе чисел, кратных данному натуральному числу n;

б) аддитивной группы действительных чисел по подгруппе целых чисел;

в) аддитивной группы комплексных чисел по подгруппе целых гауссовых чисел, т. е. чисел $a + bi$ с целыми a и b;

г) аддитивной группы векторов плоскости (выходящих из начала координат) по подгруппе векторов, лежащих на оси абсцисс Ox;

д) мультипликативной группы комплексных чисел, отличных от нуля, по подгруппе чисел, равных по модулю единице;

е) мультипликативной группы комплексных чисел, отличных от нуля, по подгруппе положительных действительных чисел;

ж) мультипликативной группы комплексных чисел, отличных от нуля, по подгруппе действительных чисел;

з) симметрической группы S_n по подгруппе подстановок, оставляющих число n на месте.

1660.* Доказать, что:

а) подгруппа H порядка k конечной группы G порядка $2k$ содержит квадраты всех элементов группы G;

б) подгруппа H индекса два любой группы G содержит квадраты всех элементов группы G.

1661.* Доказать, что при $n > 1$ знакопеременная группа A_n является единственной подгруппой индекса два (т. е. содержащей половину всех элементов) в симметрической группе S_n. Привести пример конечной группы, содержащей несколько подгрупп индекса два.

1662.* Доказать, что:

а) группа тетраэдра изоморфна группе четных подстановок четырех элементов;

б) группы куба и октаэдра изоморфны группе всех подстановок четырех элементов;

в) группы додекаэдра и икосаэдра изоморфны группе четных подстановок пяти элементов. Определение групп многогранников см. в задаче 1639.

1663. Доказать, что любая подгруппа индекса два является нормальным делителем.

1664. Доказать, что множество Z всех элементов группы G, каждый из которых перестановочен со всеми элементами этой группы, является нормальным делителем (центр группы G).

1665. Элемент $aba^{-1}b^{-1}$ называется *коммутатором элементов* a и b группы G. Доказать, что все коммутаторы и их произведения (с любым конечным числом сомножителей) образуют нормальный делитель K группы G (коммутант данной группы).

1666. Доказать, что в группе всех движений трехмерного пространства элемент $x^{-1}ax$, сопряженный с поворотом a вокруг точки P, является поворотом вокруг той точки Q, в которую переходит точка P при движении x.

1667. Доказать, что подстановка $x^{-1}ax$, сопряженная в группе подстановок с подстановкой a, получается путем применения трансформирующей подстановки x ко всем числам в разложении подстановки a на независимые циклы.

1668*. Доказать, что:

а) четверная группа V (задача 1638) является нормальным делителем симметрической группы S_4;

б) факторгруппа S_4/V изоморфна симметрической группе S_3.

1669*. Пользуясь задачей 1667, найти число подстановок симметрической группы S_n, перестановочных с данной подстановкой s.

1670*. Доказать, что если пересечение двух нормальных делителей H_1 и H_2 группы G содержит лишь единицу e, то любой элемент $h_1 \in H_1$ перестановочен с любым элементом $h_2 \in H_2$.

1671. Доказать, что:

а) элементы группы G, перестановочные с данным элементом a, образуют подгруппу $N(a)$ группы G (нормализатор a в G), содержащую циклическую подгруппу $\{a\}$ в качестве нормального делителя;

б) число элементов группы G, сопряженных с a, равно индексу нормализатора $N(a)$ в G.

1672. Доказать, что:

а) элементы группы G, перестановочные с данной подгруппой H (но не обязательно с элементами из H), образуют подгруппу $N(H)$ группы G (нормализатор подгруппы H в G), содержащую подгруппу H в качестве нормального делителя;

б) число подгрупп группы G, сопряженных с H, равно индексу нормализатора $N(H)$ в G.

1673. Доказать, что следующие числа делят порядок группы:

а) число элементов группы G, сопряженных с данным элементом;

б) число подгрупп группы G, сопряженных с данной подгруппой.

1674. Пользуясь задачами 1669 и 1671, найти число подстановок симметрической группы S_n, сопряженных с данной подстановкой s.

1675*. Доказать, что:

а) центр Z группы G порядка p^n, где p — простое число, содержит более одного элемента;

б) любая группа порядка p^2, где p — простое число, коммутативна.

в) Привести пример некоммутативной группы порядка n^2, где n — составное число.

г) Привести пример некоммутативной группы порядка p^3, где p — составное число.

1676*. Доказать, что любой нормальный делитель H знакопеременной группы A_n степени $n \geqslant 5$, содержащий хотя бы один тройной цикл, совпадает с A_n.

1677*. а) Найти все классы сопряженных элементов группы икосаэдра (задача 1639); б) доказать, что группа икосаэдра является простой (т. е. не имеет нормальных делителей, отличных от самой группы и единичной подгруппы).

1678*. Доказать, что знакопеременная группа пятой степени является простой.

1679. Доказать, что группа G' тогда и только тогда является гомоморфным образом конечной циклической группы G, когда G' также циклическая и ее порядок делит порядок группы G.

1680. Доказать, что если группа G гомоморфно отображена на группу G', причем элемент a из G отображается на a' из G', то:

а) порядок a делится на порядок a';

б) порядок G делится на порядок G'.

1681. Найти все гомоморфные отображения:

а) циклической группы $\{a\}$ порядка n в себя;

б) циклической группы $\{a\}$ порядка 6 в циклическую группу $\{b\}$ порядка 18;

в) циклической группы $\{a\}$ порядка 18 в циклическую группу $\{b\}$ порядка 6;

г) циклической группы $\{a\}$ порядка 12 в циклическую группу $\{b\}$ порядка 15;

д) циклической группы $\{a\}$ порядка 6 в циклическую группу $\{b\}$ порядка 25.

1682. Доказать, что аддитивную группу рациональных чисел нельзя гомоморфно отобразить на аддитивную группу целых чисел.

1683. Изоморфное отображение группы G на себя называется *автоморфизмом*, а гомоморфное отображение в себя — *эндоморфизмом* этой группы. Автоморфизм φ называется *внутренним*, если существует элемент x из G такой, что $a\varphi = x^{-1}ax$ для любого a из G, и *внешним* — в противном случае. Все автоморфизмы группы G сами образуют группу, если за произведение автоморфизмов принять их последовательное выполнение: $a(\varphi\psi) = (a\varphi)\psi$. Все эндоморфизмы абелевой группы G образуют кольцо, если сложение эндоморфизмов определить равенством $a(\varphi + \psi) = a\varphi + a\psi$, а умножение — как для автоморфизмов. Найти группу автоморфизмов циклической группы $\{a\}$ порядка: а) 5; б) 6.

в) Доказать, что симметрическая группа S_3 имеет шесть внутренних автоморфизмов и ни одного внешнего, причем группа автоморфизмов изоморфна S_3.

г) Четверная группа V (задача 1638) имеет один внутренний автоморфизм (тождественный) и пять внешних, причем группа автоморфизмов изоморфна S_3.

Найти кольцо эндоморфизмов циклической группы $\{a\}$ порядка: д) 5; е) 6; ж) n.

1684. Доказать, что факторгруппа симметрической группы S_n по знакопеременной группе A_n изоморфна факторгруппе аддитивной группы целых чисел по подгруппе четных чисел.

1685. Найти факторгруппы:

а) аддитивной группы целых чисел по подгруппе чисел, кратных данному натуральному числу n;

б) аддитивной группы целых чисел, кратных 3, по подгруппе чисел, кратных 15;

в) аддитивной группы целых чисел, кратных 4, по подгруппе чисел, кратных 24;

г) мультипликативной группы действительных чисел, отличных от нуля, по подгруппе положительных чисел.

1686. Пусть G_n — аддитивная группа векторов n-мерного линейного пространства и H_k — подгруппа векторов k-мерного подпространства, $0 \leqslant k \leqslant n$. Доказать, что факторгруппа G_n/H_k изоморфна G_{n-k}.

1687. Пусть G — мультипликативная группа всех комплексных чисел, отличных от нуля, и H — множество всех чисел из G, лежащих на действительной и мнимой осях.

а) Доказать, что H — подгруппа группы G.

б) Найти смежные классы группы G по подгруппе H.

в) Доказать, что факторгруппа G/H изоморфна мультипликативной группе U всех комплексных чисел, равных по модулю 1.

1688*. Пусть G — мультипликативная группа комплексных чисел, отличных от нуля, H — множество чисел из G, лежащих на n лучах, выходящих из нуля под равными углами, причем один из этих лучей совпадает с положительной действительной полуосью, K — аддитивная группа всех действительных чисел, Z — аддитивная группа целых чисел, D — мультипликативная группа положительных чисел, U — мультипликативная группа комплексных чисел, равных по модулю единице, U_n — мультипликативная группа корней n-й степени из единицы. Доказать, что:

а) K/Z изоморфна U;	б) G/D изоморфна U;
в) G/U » D;	г) U/U_n » U;
д) G/U_n » G;	

е) H есть подгруппа группы G и G/H изоморфна U;

ж) H/D изоморфна U_n; з) H/U_n изоморфна D.

1689. Для мультипликативных групп невырожденных квадратных матриц порядка n доказать утверждения:

а) факторгруппа группы действительных матриц по подгруппе матриц с определителем, равным 1, изоморфна мультипликативной группе действительных чисел, отличных от нуля;

б) факторгруппа группы действительных матриц по подгруппе матриц с определителем, равным ± 1, изоморфна мультипликативной группе положительных чисел;

в) факторгруппа группы действительных матриц по подгруппе матриц с положительными определителями является циклической группой второго порядка;

г) факторгруппа группы комплексных матриц по подгруппе матриц с определителями, по модулю равными единице, изоморфна мультипликативной группе положительных чисел;

д) факторгруппа группы комплексных матриц по подгруппе матриц с положительными определителями изоморфна мультипликативной группе комплексных чисел, по модулю равных единице.

1690. Пусть G — группа всех движений трехмерного пространства, H — подгруппа параллельных переносов, K — подгруппа вращений вокруг данной точки O. Доказать, что:

а) H является нормальными делителем группы G, а K — нет;

б) факторгруппа G/H изоморфна K.

1691. Доказать, что нормальный делитель H группы G, имеющий конечный индекс j, содержит все элементы группы G, порядки которых взаимно просты с j. Показать на примере, что для подгруппы H, не являющейся нормальным делителем, утверждение может быть неверным.

1692. Доказать, что факторгруппа G/H тогда и только тогда коммутативна, когда H содержит коммутант K группы G (задача 1665).

1693*. Доказать, что факторгруппа некоммутативной группы G по ее центру Z (задача 1664) не может быть циклической.

1694*. Доказать, что если порядок конечной группы G делится на простое число p, то G содержит элемент порядка p (теорема Коши).

1695*. Пусть p — простое число. Группа G называется *p-группой* (в коммутативном случае — *примарной* группой), если порядки всех ее элементов конечны и равны некоторым степеням числа p. Доказать, что конечная группа G тогда и только тогда будет p-группой, когда ее порядок равен степени числа p.

1696. Доказать, что:

а) аддитивная группа векторов n-мерного линейного пространства есть прямая сумма n подгрупп векторов одномерных подпространств, натянутых на векторы любой базы пространства;

б) аддитивная группа комплексных чисел есть прямая сумма подгрупп действительных и чисто мнимых чисел;

в) мультипликативная группа действительных чисел есть прямое произведение подгруппы положительных чисел и подгруппы чисел ± 1;

г) мультипликативная группа комплексных чисел есть прямое произведение подгрупп положительных чисел и чисел, по модулю равных единице.

1697. Доказать, что если $G = A + B_1 = A + B_2$ — прямые разложения абелевой группы G и если B_1 содержит B_2, то $B_1 = B_2$.

1698. Доказать, что подгруппа H абелевой группы G тогда и только тогда будет слагаемым в прямом разложении $G = H + K$, когда существует гомоморфное отображение G на H, сохраняющее на месте все элементы из H.

1699. Доказать, что если $G = A + B$ — прямое разложение группы G, то факторгруппа G/A изоморфна B.

1700. Пусть $G = A_1 + A_2 + \cdots + A_s$ — разложение абелевой группы G в прямую сумму подгрупп и

$$x = a_1 + a_2 + \cdots + a_s, \quad a_i \in A_i, \quad i = 1, 2, \ldots, s,$$

— соответствующее разложение элемента x в сумму компонент. Доказать, что:

а) группа G тогда и только тогда имеет конечный порядок n, когда каждая подгруппа A_i имеет конечный порядок n_i, $i = 1, 2, \ldots, s$, причем $n = n_1 n_2 \ldots n_s$;

б) элемент x тогда и только тогда имеет конечный порядок p, когда каждая его компонента a_i имеет конечный порядок p_i, $i = 1, 2, \ldots, s$, причем p равно наименьшему общему кратному чисел $p_1, p_2, \ldots, p_s$;

в) группа G тогда и только тогда является конечной циклической, когда все прямые слагаемые A_i — конечные циклические группы, причем их порядки попарно взаимно просты.

1701. Разложить в прямую сумму примарных циклических подгрупп циклическую группу $\{a\}$ порядка: а) 6; б) 12; в) 60; г) 900.

1702*. Доказать неразложимость в прямую сумму двух ненулевых подгрупп:

а) аддитивной группы целых чисел;

б) аддитивной группы рациональных чисел;

в) примарной циклической группы.

1703*. Пусть G — ненулевая конечная абелева группа (с аддитивной записью операции). Доказать утверждения:

а) если порядки всех элементов из G делят произведение pq взаимно простых чисел p и q, то G разлагается в прямую сумму подгрупп A и B, где порядки всех элементов из A делят p, а из B — делят q, причем одна из подгрупп A или B может оказаться нулевой;

б) для группы G имеет место разложение $G = A_1 + A_2 + \cdots + A_s$ в прямую сумму (ненулевых) примарных подгрупп, относящихся соответственно к различным простым числам $p_1, p_2, \ldots, p_s$ (подгруппы A_i называются примарными компонентами группы G);

в) примарная компонента A_i, относящаяся к простому числу p_i, состоит из всех элементов группы G, порядки которых равны степеням числа p_i, что однозначно определяет разложение группы G на примарные компоненты;

г) разложение на примарные компоненты ненулевой подгруппы H группы G имеет вид $H = B_1 + B_2 + \ldots + B_s$, где $B_i = H \cap A_i$, $i = 1, 2, \ldots, s$, причем нулевые подгруппы B_i в разложении H опускаются.

1704. Обозначим через $G(n_1, n_2, \ldots, n_s)$ прямую сумму циклических групп порядков соответственно $n_1, n_2, \ldots, n_s$. Из теории конечных абелевых групп известно, что каждая такая группа однозначно (с точностью до изоморфизма) представляется в виде $G(n_1, n_2, \ldots, n_s)$, где числа n_i равны степеням простых чисел (не обязательно различных). Применяя указанное обозначение, найти все абелевы группы порядков: а) 3; б) 4; в) 6; г) 8; д) 9; е) 12; ж) 16; з) 24; и) 30; к) 36; л) 48; м) 60; н) 63; о) 72; п) 100.

1705. Разложить в прямую сумму примарных циклических и бесконечных циклических подгрупп факторгруппу G/H, где G — свободная абелева группа с базой x_1, x_2, x_3 и H — подгруппа с образующими:

а) $y_1 = 7x_1 + 2x_2 + 3x_3$, $y_2 = 21x_1 + 8x_2 + 9x_3$, $y_3 = 5x_1 - 4x_2 + 3x_3$;

б) $y_1 = 4x_1 + 5x_2 + 3x_3$, $y_2 = 5x_1 + 6x_2 + 5x_3$, $y_3 = 6x_1 + 7x_2 + 7x_3$;

в) $y_1 = 5x_1 + 5x_2 + 2x_3$, $y_2 = 11x_1 + 8x_2 + 5x_3$, $y_3 = 17x_1 + 5x_2 + 8x_3$;

г) $y_1 = 6x_1 + 5x_2 + 7x_3$, $y_2 = 8x_1 + 7x_2 + 11x_3$, $y_3 = 6x_1 + 5x_2 + 11x_3$;

д) $y_1 = 4x_1 + 5x_2 + x_3$, $y_2 = 8x_1 + 9x_2 + x_3$, $y_3 = 4x_1 + 6x_2 + 2x_3$;

е) $y_1 = 2x_1 + 6x_2 - 2x_3$, $y_2 = 2x_1 + 8x_2 - 4x_3$, $y_3 = 4x_1 + 12x_2 - 4x_3$;

ж) $y_1 = 6x_1 + 5x_2 + 4x_3$, $y_2 = 7x_1 + 6x_2 + 9x_3$, $y_3 = 5x_1 + 4x_2 - 4x_3$;

з) $y_1 = x_1 + 2x_2 + 2x_3$, $y_2 = 2y_1$, $y_3 = 3y_1$;

и) $y_1 = 4x_1 + 7x_2 + 3x_3$, $y_2 = 2x_1 + 3x_2 + 2x_3$, $y_3 = 6x_1 + 10x_2 + 5x_3$;

к) $y_1 = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3$, $y_2 = 5x_1 + 5x_2 + 6x_3$, $y_3 = 2x_1 + 6x_2 + 9x_3$.

1706*. Доказать, что конечная абелева группа G, порядок которой равен:

а) произведению двух различных простых чисел p и q;

б) произведению различных простых чисел $p_1, p_2, \ldots, p_s$,

является циклической.

в) Найти все подгруппы абелевой группы G, порядок которой удовлетворяет условию пункта б), и найти число этих подгрупп.

г) Доказать, что для любого делителя k порядка n конечной абелевой группы G существуют подгруппа и факторгруппа группы G, имеющие порядок k.

1707*. Пусть G — ненулевая конечная абелева группа, все ненулевые элементы которой имеют один и тот же порядок p (элементарная группа). Доказать утверждения:

а) число p является простым;

б) группа G разлагается в прямую сумму конечного числа циклических подгрупп порядка p и имеет порядок p^k, где k — число этих слагаемых;

в) любая ненулевая подгруппа H группы G сама будет элементарной и является прямым слагаемым в некотором прямом разложении $G = H + K$ группы G;

г) число подгрупп порядка p^l элементарной группы G порядка p^k, где $k \geqslant l > 0$, равно $\dfrac{(p^k-1)(p^k-p)(p^k-p^2)\dots(p^k-p^{l-1})}{(p^l-1)(p^l-p)(p^l-p^2)\dots(p^l-p^{l-1})}$.

1708*. Доказать, что конечная абелева группа G порождается ее элементами максимального порядка.

§ 21. Кольца и поля

Выяснить, какие из следующих множеств являются кольцами (но не полями) и какие полями относительно указанных операций. (Если операции не указаны, то подразумеваются сложение и умножение чисел.)

1709. Целые числа.

1710. Четные числа.

1711. Целые числа, кратные данному числу n (рассмотреть, в частности, случай $n = 0$).

1712. Рациональные числа.

1713. Действительные числа.

1714. Комплексные числа.

1715. Числа вида $a + b\sqrt{2}$ с целыми a и b.

1716. Числа вида $a + b\sqrt{3}$ с рациональными a и b.

1717. Комплексные числа вида $a + bi$ с целыми a и b.

1718. Комплексные числа вида $a + bi$ с рациональными a и b.

1719. Матрицы порядка n с целыми элементами относительно сложения и умножения матриц.

1720. Матрицы порядка n с действительными элементами относительно сложения и умножения матриц.

1721. Функции с действительными значениями, непрерывные на отрезке $[-1, +1]$ относительно обычных сложения и умножения функций.

1722. Многочлены от одного неизвестного x с целыми коэффициентами относительно обычных операций сложения и умножения.

1723. Многочлены от одного неизвестного x с действительными коэффициентами относительно обычных операций.

1724. Все матрицы $\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}$ с рациональными или действительными a, b относительно обычных сложения и умножения матриц.

1725*. Образуют ли кольцо все тригонометрические многочлены $a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ с действительными коэффициентами? Выяснить то же для многочленов одних косинусов $a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx$ и одних синусов $\sum_{k=1}^{n} b_k \sin kx$.

1726*. Образуют ли кольцо числа вида $a + b\sqrt[3]{2}$ с рациональными a и b относительно обычных операций (для определенности берется действительное значение корня).

1727*. Показать, что числа вида $a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}$ с рациональными a, b и c образуют поле, причем каждый элемент этого поля в указанном виде представляется однозначно. Найти элемент, обратный числу $1 - \sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{4}$ (берется действительное значение корня).

1728. Доказать, что числа вида $a + b\sqrt[3]{5} + c\sqrt[3]{25}$ с рациональными a, b и c образуют поле; найти в этом поле число, обратное числу $x = 2 + 3\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{25}$.

1729*. Пусть α — корень многочлена $f(x)$ степени $n > 1$ с рациональными коэффициентами, неприводимого над полем рациональных чисел. Доказать, что числа вида $a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \dots + a_{n-1}\alpha^{n-1}$ с рациональными $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ образуют поле, причем каждый элемент этого поля однозначно записывается в указанном виде. Говорят, что это поле получено присоединением числа α к полю рациональных чисел.

1730*. В поле, полученном присоединением к полю рациональных чисел корня α многочлена $f(x) = x^3 + 4x^2 + 2x - 6$ (задача 1729) найти число, обратное числу $\beta = 3 - \alpha + \alpha^2$.

1731. Доказать, что все диагональные матрицы, т. е. матрицы вида

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix},$$

порядка $n \geqslant 2$ с действительными элементами относительно обычных сложения и умножения матриц образуют коммутативное кольцо с делителями нуля.

1732. Привести примеры делителей нуля в кольце функций, непрерывных на отрезке $[-1,+1]$.

1733. Доказать, что в кольце квадратных матриц порядка n с элементами из некоторого поля вырожденные матрицы, и только они, являются делителями нуля.

1734. Показать, что пары (a,b) целых чисел с операциями, заданными равенствами

$$(a_1,b_1)+(a_2,b_2)=(a_1+a_2,b_1+b_2),$$
$$(a_1,b_1)(a_2,b_2)=(a_1a_2,b_1b_2),$$

образуют кольцо, и найти все делители нуля этого кольца.

1735. Доказать, что поле не имеет делителей нуля.

1736. Доказать, что из равенства $ax=ay$ для данного элемента a и любых элементов x и y кольца следует равенство $x=y$ тогда и только тогда, когда a не является левым делителем нуля.

1737. Показать, что матрицы порядка $n\geqslant 2$ с элементами из некоторого поля, в которых все строки, начиная со второй, состоят из нулей, образуют кольцо, в котором всякий элемент, отличный от нуля, будет правым делителем нуля. Какие матрицы в этом кольце не будут левыми делителями нуля?

1738*. Показать, что в кольце с единицей e коммутативность сложения вытекает из остальных аксиом кольца.

1739. Проверив, что свойство нуля и делителей нуля можно доказать, не используя коммутативности сложения, доказать, что в кольце, содержащем хотя бы один элемент c, не являющийся делителем нуля, коммутативность сложения вытекает из остальных аксиом кольца.

1740. Привести примеры колец матриц специального вида, обладающих несколькими правыми или несколькими левыми единицами.

1741. Пусть дано целое число $n\geqslant 0$. Два целых числа a и b называются *сравнимыми по модулю* n, что записывается так: $a\equiv b(\mathrm{mod}\, n)$, если их разность $a-b$ делится на n (при $n=0$ это означает, что $a=b$; при $n>0$ — что a и b при делении на n дают один и тот же остаток — вычет по модулю n). Показать, что совокупность всех целых чисел Z разбивается на классы сравнимых между собой чисел, не имеющие общих элементов. Определим сложение и умножение классов через соответствующие операции над их представителями, т. е. если числа $a,b,a+b$ и ab принадлежат соответственно классам A,B,C и D, то положим $A+B=C$ и $AB=D$.

Доказать, что при таких операциях множество классов является кольцом (кольцо вычетов Z_n по модулю n).

1742*. Доказать, что конечное коммутативное кольцо без делителей нуля, содержащее более одного элемента, является полем.

1743*. Показать, что кольцо вычетов по модулю n (задача 1741) будет полем тогда и только тогда, когда n — число простое.

1744. Квадратная матрица называется *скалярной*, если ее элементы на главной диагонали равны между собой, а вне главной диагонали — равны нулю. Показать, что скалярные матрицы порядка n с действительными элементами при обычных операциях образуют поле, изоморфное полю действительных чисел.

1745. Показать, что матрицы вида $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, где a и b — действительные числа, образуют поле, изоморфное полю комплексных чисел.

1746. Доказать, что поле матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}$ с рациональными a, b (задача 1724) изоморфно полю чисел вида $a + b\sqrt{2}$ также с рациональными a, b.

1747*. Доказать, что алгебра вещественных матриц вида

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}$$

изоморфна алгебре кватернионов $a + bi + cj + dk$.

1748. Доказать, что алгебра матриц вида $\begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix}$ с действительными a, b, c, d и $i = \sqrt{-1}$ изоморфна алгебре кватернионов $a + bi + cj + dk$.

1749. Найти все автоморфизмы (т. е. изоморфные отображения на себя) поля комплексных чисел, оставляющие неизменными действительные числа.

1750*. Доказать, что любое числовое поле содержит в качестве подполя поле рациональных чисел.

1751*. Доказать, что при любом изоморфизме числовых полей подполе рациональных чисел отображается тождественно.

В частности, поле рациональных чисел допускает лишь тождественное изоморфное отображение в себя.

1752*. Доказать, что тождественное отображение является единственным изоморфным отображением поля действительных чисел в себя.

1753. Пользуясь задачей 1752, найти все изоморфные отображения поля комплексных чисел в себя, переводящие действительные числа снова в действительные.

1754. Доказать, что минимальное подполе любого поля характеристики нуль изоморфно полю рациональных чисел.

1755. Доказать, что минимальное подполе любого поля характеристики p изоморфно полю вычетов по модулю p.

1756. Решить систему уравнений

$$x+2z=1, \quad y+2z=2, \quad 2x+z=1$$

в поле вычетов по модулю 3 и по модулю 5.

1757. Решить систему уравнений

$$3x+y+2z=1, \quad x+2y+3z=1, \quad 4x+3y+2z=1$$

в поле вычетов по модулю 5 и по модулю 7.

1758. Найти наибольший общий делитель многочленов

$$f(x)=x^3+x^2+2x+2, \quad g(x)=x^2+x+1$$

а) над полем вычетов по модулю 3;

б) над полем рациональных чисел.

1759. Найти наибольший общий делитель многочленов

$$f(x)=5x^3+x^2+5x+1, \quad g(x)=5x^2+21x+4$$

а) над полем вычетов по модулю 5 (при этом каждый коэффициент a надо понимать как кратное ae единицы e указанного поля или заменить коэффициенты их наименьшими неотрицательными вычетами по модулю 5);

б) над полем рациональных чисел.

1760. Найти наибольший общий делитель многочленов

$$f(x)=x^4+1, \quad g(x)=x^3+x+1$$

над полем вычетов по модулю: а) 3; б) 5.

1761*. а) Доказать, что если многочлены $f(x)$ и $g(x)$ с целыми коэффициентами взаимно просты над полем Z_p вычетов по простому модулю p, причем хотя бы один из старших коэффициентов не делится на p, то эти многочлены взаимно просты над полем рациональных чисел.

б) Показать на примере, что для любого простого числа p обратное утверждение неверно.

1762*. Доказать, что многочлены $f(x)$ и $g(x)$ с целыми коэффициентами тогда и только тогда взаимно просты над полем рациональных чисел, когда они взаимно просты над полем вычетов по модулю p, где p — любое простое число, исключая, быть может, конечное множество таких чисел.

1763. Многочлен $x^5+x^3+x^2+1$ разложить на неприводимые множители над полем вычетов по модулю 2.

1764. Многочлен x^3+2x^2+4x+1 разложить на неприводимые множители над полем вычетов по модулю 5.

1765. Многочлен x^4+x^3+x+2 разложить на неприводимые множители над полем вычетов по модулю 3.

1766. Многочлен $x^4+3x^3+2x^2+x+4$ разложить на неприводимые множители над полем вычетов по модулю 5.

1767. Разложить на неприводимые множители над полем вычетов по модулю 2 все многочлены второй степени от x.

1768. Разложить на неприводимые множители над полем вычетов по модулю 2 все многочлены третьей степени от x.

1769. Найти все многочлены второй степени от x со старшим коэффициентом 1, неприводимые над полем вычетов по модулю 3.

1770. Найти все многочлены третьей степени от x со старшим коэффициентом 1, неприводимые над полем вычетов по модулю 3.

1771*. Доказать, что если многочлен $f(x)$ с целыми коэффициентами приводим над полем рациональных чисел, то он приводим над полем вычетов по любому простому модулю p, не делящему старший коэффициент. Привести пример многочлена, приводимого над полем рациональных чисел, но неприводимого над полем вычетов по модулю p, где p делит старший коэффициент.

1772*. Доказать, что любая конечная подгруппа G мультипликативной группы поля P является циклической. Например, мультипликативная группа поля Z_p вычетов кольца целых чисел Z по простому модулю p и группы G_n корней n-й степени из 1 являются циклическими (последнее проще доказать с помощью записи корней в тригонометрической форме).

1773*.[1] Существуют многочлены с целыми коэффициентами, неприводимые над полем рациональных чисел, но приводимые над полем вычетов по любому простому модулю p.

Доказать, что таким будет, например, многочлен $f(x) = x^4 - 10x^2+1$. Этот многочлен — многочлен наименьшей степени с целыми коэффициентами, имеющий корень $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3}$.

1774*. Доказать, что если все элементы коммутативного кольца R имеют общий делитель a, то это кольцо обладает единицей.

1775. Указать коммутативное кольцо с единицей, содержащее элемент $a \neq 0$ с одним из следующих свойств:

а) $a^2 = 0$; б) для данного целого числа $n > 1$ выполнены условия $a^n = 0$, $a^k \neq 0$, если $0 < k < n$.

1776. Пусть R — коммутативное кольцо с единицей e. Доказать, что:

а) обратимый элемент (т. е. делитель единицы) не может быть делителем нуля;

б) обратимый элемент имеет единственный обратный элемент;

в) если δ, ε обратимы, то a делится на b тогда и только тогда, когда $a\delta$ делится на $b\varepsilon$;

г) главный идеал (a) элемента a из R тогда и только тогда отличен от R, когда a необратим.

1777. Пусть R — коммутативное кольцо с единицей e и без делителей нуля. Доказать, что:

[1] Эту задачу указал автору И. Р. Шафаревич.

а) элементы a, b тогда и только тогда ассоциированы, когда каждый из них делится на другой;

б) главные идеалы (a) и (b) тогда и только тогда совпадают, когда a и b ассоциированы (определение главного идеала дано в задаче 1783).

1778. Пусть R — коммутативное кольцо с единицей e и $R\langle x\rangle$ — множество всех формальных степенных рядов $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n$, $\alpha_n \in R$.

Введем обычные операции *сложения* и *умножения рядов*:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n + \beta_n) x^n,$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n x^n, \text{ где } \gamma_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \beta_{n-k}.$$

Показать, что:

а) $R\langle x\rangle$ — коммутативное кольцо с единицей;

б) $R\langle x\rangle$ содержит подкольцо, изоморфное R;

в) если R не имеет делителей нуля, то это верно и для $R\langle x\rangle$;

г) если R — поле, то $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n$ тогда и только тогда будет обратимым элементом кольца $R\langle x\rangle$, когда $\alpha_0 \neq 0$.

1779*. Пусть R — множество всех чисел вида $a + b\sqrt{-3}$, где a и b — целые рациональные. Показать, что R — кольцо с единицей, в котором разложение на простые множители существует, но не однозначно. В частности, показать, что в двух разложениях

$$4 = 2 \cdot 2 = (1 + \sqrt{-3})(1 - \sqrt{-3})$$

сомножители являются простыми, причем 2 не ассоциировано $1 \pm \sqrt{-3}$.

1780*. Доказать, что все конечные суммы $\sum a_i \cdot x^r i$ с действительными a_i и неотрицательными двоично рациональными r_i относительно обычных операций сложения и умножения функций образуют коммутативное кольцо с единицей и без делителей нуля, в котором не существует простых элементов.

1781. Будут ли следующие множества подгруппами аддитивной группы, подкольцами или идеалами указанных ниже колец:

а) множество nZ чисел, кратных числу $n > 1$, в кольце целых чисел Z;

б) множество Z целых чисел в кольце $Z[x]$ целочисленных многочленов;

в) множество $nZ[x]$ многочленов, коэффициенты которых кратны числу $n > 1$, в кольце $Z[x]$ целочисленных многочленов;

г) множество N натуральных чисел в кольце целых чисел Z;

д) множество Z целых чисел в кольце A целых гауссовых чисел, т.е. чисел вида $a + bi$ с целыми рациональными a, b;

е) множество B чисел $a + bi$, где $a = b$, в кольце A целых гауссовых чисел;

ж) множество C чисел вида $x(1+i)$ в кольце A целых гауссовых чисел, где x пробегает все кольцо A;

з) множество $Z[x]$ целочисленных многочленов в кольце $R[x]$ многочленов над полем R рациональных чисел;

и) множество I многочленов, не содержащих членов с x^k для всех $k < n$, где $n > 1$, в кольце $Z[x]$ целочисленных многочленов;

к) множество I многочленов с четными свободными членами в кольце $Z[x]$ целочисленных многочленов;

л) множество I многочленов с четными старшими коэффициентами в кольце $Z[x]$ целочисленных многочленов;

1782. Доказать, что пересечение любого множества идеалов коммутативного кольца R является идеалом.

1783. *Главным идеалом* (a)*, порожденным элементом* a *коммутативного кольца* R, называется минимальный идеал, содержащий a. Доказать, что идеал (a) существует для любого элемента $a \in R$ и состоит из всех элементов вида:

а) ra, где r — любой элемент из R, если R имеет единицу;

б) $ra + na$, где r — любой элемент из R и n — любое целое число, если R не имеет единицы.

1784. *Идеалом* (M)*, порожденным множеством* M *коммутативного кольца* R, называется минимальный идеал, содержащий M. Если множество M состоит из конечного числа элементов $a_1, \ldots, a_s$, то идеал (M) обозначается также через $(a_1, \ldots, a_s)$. Доказать, что идеал (M) существует для любого непустого множества $M \in R$ и состоит из всех конечных сумм вида:

а) $\sum r_i a_i$; $r_i \in R$, $a_i \in M$, если R имеет единицу;

б) $\sum r_i a_i + \sum n_i a_i$; $r_i \in R$; $a_i \in M$; n_i — целые числа, если R не имеет единицы.

1785*. *Кольцом главных идеалов* называется коммутативное кольцо с единицей и без делителей нуля, в котором каждый идеал — главный (см. задачу 1783). Доказать, что каждое из следующих колец является кольцом главных идеалов:

а) кольцо Z целых чисел;

б) кольцо $P[x]$ многочленов от одного неизвестного x над полем P;

в) кольцо A целых гауссовых чисел.

1786. *Суммой идеалов* $I_1, I_2, \ldots, I_k$ *коммутативного кольца* R называется множество I всех элементов x из R, представимых в виде

$$x = x_1 + x_2 + \cdots + x_k;$$
$$x_i \in I_i; \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Пишут $I = I_1 + I_2 + \cdots + I_k$. Если для любого x из I указанное представление единственно, то сумма I называется *прямой суммой идеалов* I_i. В этом случае пишут $I = I_1 \dot{+} I_2 \dot{+} \cdots \dot{+} I_k$.

Доказать, что:

а) сумма любого конечного числа идеалов есть идеал;

б) сумма двух идеалов тогда и только тогда будет прямой суммой, когда пересечение их содержит только нуль.

1787. Доказать, что если $I = I_1 \dot{+} I_2$ — прямая сумма идеалов I_1, I_2, то произведение любого элемента из I_1 на любой элемент из I_2 равно нулю.

1788. Пусть $R = I_1 + I_2$ — разложение коммутативного кольца R с единицей e в прямую сумму ненулевых идеалов I_1, I_2.

Доказать, что если $e = e_1 + e_2$; $e_1 \in I_1$; $e_2 \in I_2$, то e_1, e_2 будут единицами соответственно в I_1, I_2, но не в R.

1789. Доказать, что факторкольцо кольца $D[x]$ многочленов с действительными коэффициентами по идеалу многочленов, делящихся на $x^2 + 1$, изоморфно полю комплексных чисел $a + bi$ с операциями сложения и умножения, определяемыми по известным из школы правилам.

1790. Доказать, что любое гомоморфное отображение поля P в кольцо R является или изоморфным отображением на некоторое поле, входящее в R как подкольцо (так называемое вложение P в R), или отображением всех элементов из P в нуль из R.

1791. Пусть Z — кольцо целых чисел и R — любое кольцо с единицей e. Доказать, что отображение φ, для которого $\varphi(n) = ne$, есть гомоморфное отображение Z в R. Найти образ $\varphi(Z)$ кольца Z при этом гомоморфизме.

1792. Пусть A — кольцо целых гауссовых чисел, I — множество всех чисел $a + bi$ с четными a и b.

а) Показать, что I — идеал в A;

б) найти смежные классы A по I;

в) в факторкольце A/I найти делители нуля и показать этим, что A/I не является полем.

1793. Доказать, что факторкольцо A/I кольца целых гауссовых чисел по главному идеалу $I = (3)$ есть поле из девяти элементов.

1794. Доказать, что факторкольцо A/I кольца целых гауссовых чисел по главному идеалу $I = (n)$ тогда и только тогда будет полем, когда n — простое число, не равное сумме двух квадратов целых чисел.

1795. Пусть $P[x, y]$ — кольцо многочленов от двух неизвестных x, y над полем P, I — множество всех многочленов этого кольца без свободного члена. Доказать, что:

а) I является идеалом, но не является главным идеалом;

б) факторкольцо $P[x, y]/I$ изоморфно полю P.

1796. Пусть $I = (x, 2)$ — идеал, порожденный множеством из двух элементов x и 2, в кольце целочисленных многочленов $Z[x]$. Доказать, что:

а) идеал I состоит из всех многочленов с четными свободными членами;

б) идеал I не является главным;

в) факторкольцо $Z[x]/I$ изоморфно полю вычетов по модулю 2.

1797. Пусть (n) — идеал, порожденный целым числом $n > 1$ в кольце целочисленных многочленов $Z[x]$. Доказать, что факторкольцо $Z[x]/(n)$ изоморфно кольцу $Z_n[x]$ многочленов над кольцом вычетов по модулю n.

1798. Пусть R — кольцо всех действительных функций $f(x)$, определенных на всей числовой прямой при обычных операциях сложения и умножения, и c — действительное число. Доказать, что:

а) отображение $\varphi[f(x)] = f(c)$ есть гомоморфное отображение кольца R на поле D действительных чисел;

б) ядро гомоморфизма φ, т. е. множество I всех элементов кольца R, отображающихся в число 0, есть идеал в R;

в) факторкольцо R/I изоморфно полю действительных чисел D.

1799. Пусть Z_p — поле вычетов по простому модулю p, $f(x)$ — многочлен степени n из кольца $Z_p[x]$, неприводимый над полем Z_p (из теории полей известно, что такой многочлен существует для любого простого p и любого натурального n), I — главный идеал, порожденный многочленом $f(x)$ в кольце $Z_p[x]$. Доказать, что факторкольцо $Z_p[x]/I$ есть конечное поле, и найти число его элементов.

§ 22. Модули

Левым модулем над кольцом R называется абелева группа M (обычно с аддитивной записью операции), для элементов которой определено умножение на элементы из R так, что $\lambda a \in M$ для любых $\lambda \in R$, $a \in M$, причем выполнены следующие условия, аналогичные свойствам умножения вектора на число для линейного пространства:

$$1)\ \lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b, \quad 2)\ (\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a, \quad 3)\ \lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a,$$

где $\lambda, \mu \in R$, $a, b \in M$.

Если, кроме того, кольцо R обладает единицей ε и

$$4)\ \varepsilon a = a, \quad a \in M,$$

то M называется *унитарным левым модулем над* R.

Подмодулем левого модуля M *над кольцом* R называется подгруппа A группы M, для которой $\lambda a \in A$ для любых $\lambda \in R$, $a \in A$.

Отображение φ левого модуля M на левый модуль M' над одним и тем же кольцом R называется гомоморфным, если $\varphi(a + b) = \varphi a + \varphi b$, $\varphi(\lambda a) = \lambda \varphi a$ для любых $a, b \in M$, $\lambda \in R$.

Взаимно однозначное и гомоморфное отображение модуля M на модуль M' (над тем же кольцом) называется *изоморфным* (или *изоморфизмом*), а модули M и M' называются *изоморфными*.

Фактормодулем M/A *левого модуля* M *над кольцом* R *по подмодулю* A называется факторгруппа M/A с естественным умножением на элементы кольца R: $\lambda(x + A) = \lambda x + A$.

Порядком $O(a)$ (или *аннулятором* $\operatorname{Ann}(a)$) *элемента* a *левого модуля* M *над кольцом* R называется множество всех элементов $\lambda \in R$, для которых $\lambda a = 0$. Если порядок элемента a содержит только нуль кольца R, то a называется *свободным элементом* (или *элементом порядка нуль*). В противном случае a называется *периодическим элементом* (или *элементом ненулевого порядка*).

Аналогично определяются правые модули M над кольцом R с умножением $a\lambda \in M$, $a \in M$, $\lambda \in R$, и связанные с ними понятия.

Если в следующих задачах говорится просто о модуле M над кольцом R, то M рассматривается для определенности как левый модуль над R, хотя соответствующие свойства верны также и для правого модуля над R.

Для упрощения некоторые задачи формулированы для случая коммутативного кольца, хотя они могут быть обобщены на модули над некоммутативными кольцами.

1800. Привести примеры модуля M над кольцом R, где существуют $\lambda \neq 0$ из R и $a \neq 0$ из M, причем $\lambda a = 0$.

1801. Проверить, что любая абелева группа G (с аддитивной записью операции) является модулем над кольцом Z целых чисел.

1802. Левый модуль M над кольцом R называется *тривиальным*, если $\lambda a = 0$ для любых $\lambda \in R$, $a \in M$. Доказать, что левый модуль M над кольцом R с единицей ε разлагается в прямую сумму подмодулей: $M = M_1 + M_2$, где M_1 унитарен, а M_2 тривиален, причем M_1 содержит все элементы $a \in M$, для которых $\varepsilon a = a$, и M_2 — все элементы $a \in M$, для которых $\varepsilon a = 0$.

1803. Проверить, что:

а) если коммутативное кольцо R рассматривать как левый модуль над самим собой, то подмодули этого модуля совпадают с идеалами кольца R;

б) если некоммутативное кольцо R рассматривать как левый (правый) модуль над самим собой, то подмодули этого модуля совпадают с левыми (правыми) идеалами кольца R.

1804*. Показать, что примарную по простому числу p абелеву группу G (задача 1695) можно рассматривать как унитарный модуль над кольцом R рациональных чисел, знаменатели которых не делятся на p.

1805. *Циклическим подмодулем, порожденным элементом a левого модуля M над кольцом R*, называется минимальный подмодуль $\{a\}$, содержащий a. Доказать, что для любого $a \in M$ циклический подмодуль $\{a\}$ существует и состоит из всех элементов модуля M, имеющих вид:

а) λa, где $\lambda \in R$, если M — унитарный модуль;

б) $\lambda a + na$, где $\lambda \in R$ и n — целое число, если M — любой модуль.

1806. Доказать, что n-мерное линейное пространство над полем P является (при тех же операциях) унитарным модулем над P, причем этот модуль разлагается в прямую сумму n циклических подмодулей.

1807. Пусть M — унитарный модуль над коммутативным кольцом R с единицей ε, $\{a\}$ и $\{b\}$ — циклические модули, $O(a)$ и $O(b)$ — порядки соответственно a и b.

а) Доказать, что если $\{a\} = \{b\}$, то $O(a) = O(b)$;

б) показать на примере, что условия $O(a) = O(b)$ недостаточно для равенства $\{a\} = \{b\}$;

в) доказать, что для равенства $\{a\} = \{b\}$ необходимо и достаточно, чтобы было $b = \alpha a$, $a = \beta b$, где α, β — некоторые элементы из R;

г) доказать, что для равенства $\{a\} = \{b\}$ необходимо и достаточно выполнения условий: $b = \alpha a$, где $\alpha \in R$ и обратим по модулю $O(a)$, т. е. смежный класс $\alpha + O(a)$ есть обратимый элемент факторкольца $R/O(a)$.

1808*. Доказать, что всякий подмодуль A циклического модуля $M = \{a\}$ над кольцом главных идеалов R сам будет циклическим.

1809. Пусть R — множество всех бесконечных последовательностей целых чисел $\alpha = (a_1, a_2, \ldots)$ со сложением и умножением по компонентам. Проверить, что R — коммутативное кольцо с единицей, т. е. циклический модуль над самим собой. Найти в этом модуле подмодуль, не имеющий конечной системы образующих. Это показывает, что подмодуль циклического модуля может не быть циклическим, а подмодуль конечнопорожденного модуля может не быть конечнопорожденным.

1810. Пусть M — модуль над коммутативным кольцом R.

а) Доказать, что если R не имеет делителей нуля, то множество $A \subset M$ всех периодических элементов является подмодулем модуля M;

б) показать на примерах, что для кольца R с делителями нуля предыдущее утверждение может быть неверно.

1811*. Пусть M — модуль над кольцом главных идеалов R, a и b — периодические элементы M порядков $O(a) = (\alpha)$, $O(b) = (\beta)$, δ — наибольший общий делитель α и β. Доказать, что элемент $a + b$ — также периодический порядка $O(a + b) = (\gamma)$, причем: а) γ делит $\alpha\beta/\delta$; б) γ кратно $\alpha\beta/\delta^2$.

1812*. Модуль M называется периодическим, если все его элементы являются периодическими. Модуль M над кольцом главных идеалов R называется *примарным*, если порядки всех элементов из M как идеалы в R порождаются степенями одного и того же простого элемента p из R. Модуль M называется *прямой суммой системы* (не обязательно конечной) своих подмодулей M_i, если каждый ненулевой элемент из M однозначно представляется в виде суммы конечного числа ненулевых элементов, взятых по одному из некоторых M_i. Доказать, что любой периодический модуль M над кольцом главных идеалов R разлагается в прямую сумму примарных подмодулей.

1813*. Пусть M — модуль над кольцом R. Доказать теорему: для того чтобы в M любой подмодуль имел конечное число образующих, необходимо и достаточно, чтобы в M удовлетворялось условие максимальности для подмодулей: любая возрастающая последовательность подмодулей (не обязательно различных) $M_1 \subseteq M_2 \subseteq \ldots$ стабилизируется на конечном шаге. В частности, это верно для идеалов кольца R, если его рассматривать как модуль над самим собой.

1814. Доказать, что если $\{a\}$ и $\{b\}$ — унитарные циклические модули над одним и тем же кольцом R, причем порядки a и b связаны включением $O(a) \subset O(b)$, то существует гомоморфное отображение $\{a\}$ на $\{b\}$.

1815. Пусть $M = \{a\}$ — унитарный циклический модуль над коммутативным кольцом R с единицей ε. Доказать, что:

а) порядок $O(a)$ элемента a есть идеал в R;

б) факторкольцо $R/O(a)$, рассматриваемое как модуль над R с естественным умножением, определенным умножением в R, изоморфно модулю M.

1816. Пусть $M = A + B$ — разложение модуля M над кольцом R в прямую сумму подмодулей A и B. Доказать, что фактормодуль M/A изоморфен, как модуль над R, модулю B.

1817. Модуль M называется *расширением модуля A при помощи модуля B*, если A — подмодуль M и фактормодуль M/A изоморфен B

(M, A, B — модули над одним и тем же кольцом R). Доказать, что расширение конечнопорожденного модуля при помощи конечнопорожденного есть конечнопорожденный модуль.

1818. Доказать, что если в модуле M выполнено условие максимальности для подмодулей (см. задачу 1813), то это условие выполнено в фактормодуле M/A модуля M по любому подмодулю A.

1819*. Пусть A, B — подмодули модуля M над кольцом R. Доказать следующую теорему об изоморфизме:

$$(A+B)/A \cong B/(A \cap B).$$

1820*. Пусть M — унитарный модуль с конечным числом образующих $x_1, x_2, \ldots, x_n$ над коммутативным кольцом R с единицей. Доказать, что если условие максимальности выполнено для идеалов в кольце R, то оно выполнено и для подмодулей в модуле M (эту теорему можно обобщить на некоммутативные кольца с условием максимальности для левых или правых идеалов).

§ 23. Линейные пространства и линейные преобразования (добавления к §§ 10, 16–19)

1821. Доказать, что для выполнения равенства $\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y} = \beta\boldsymbol{x} + \alpha\boldsymbol{y}$, где α, β — числа и $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ — векторы, необходимо и достаточно, чтобы было или $\alpha = \beta$, или $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$.

1822*. а) Не пользуясь коммутативностью сложения векторов, доказать, что правые противоположный и нулевой элементы будут и левыми;

б) пользуясь пунктом а), доказать, что коммутативность сложения векторов вытекает из остальных аксиом линейного пространства.

1823. Пусть D — поле действительных чисел и $\boldsymbol{V}$ — множество всех функций, заданных и принимающих положительные значения на сегменте $[a, b]$. Определим сложение двух функций и умножение функции на число равенствами

$$f \oplus g = fg, \quad \alpha \odot f = f^{\alpha}, \quad f, g \in \boldsymbol{V}, \ \alpha \in D.$$

а) Проверить, что при указанных операциях $\boldsymbol{V}$ является линейным пространством над полем D;

б) доказать, что пространство $\boldsymbol{V}$ изоморфно пространству $\boldsymbol{V}'$ всех действительных функций, заданных на сегменте $[a, b]$, при обычных операциях сложения функций и умножения функции на действительное число;

в) найти размерность пространства $\boldsymbol{V}$.

1824. Доказать линейную независимость системы функций $e^{\lambda_1 x}, \ldots, e^{\lambda_n x}$, где $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — попарно различные действительные числа.

1825*. Доказать линейную независимость системы функций $x^{\alpha_1}, \ldots, x^{\alpha_n}$, где $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — попарно различные действительные числа.

1826*. Доказать линейную независимость систем функций:

а) $\sin x, \cos x$; б) $1, \sin x, \cos x$;

в) $\sin x, \sin 2x, \ldots, \sin nx$; г) $1, \cos x, \cos 2x, \ldots, \cos nx$;

д) $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots, \cos nx, \sin nx$.

1827*. Доказать линейную независимость систем функций:

а) $1, \sin x, \sin^2 x, \ldots, \sin^n x$;

б) $1, \cos x, \cos^2 x, \ldots, \cos^n x$.

1828. Доказать линейную зависимость систем функций:

а) $1, \sin x, \cos x, \sin^2 x, \cos^2 x, \ldots, \sin^n x, \cos^n x$ при $n \geqslant 2$;

б) $\sin x, \cos x, \sin^2 x, \cos^2 x, \ldots, \sin^n x, \cos^n x$ при $n \geqslant 4$.

1829*. Проверить, что все однородные многочлены степени k от n неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ с действительными коэффициентами (или с коэффициентами из любого поля) вместе с нулем при обычных операциях образуют линейное пространство, и найти его размерность.

1830*. Проверить, что все многочлены степени $\leqslant k$ от n неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ с действительными коэффициентами (или с коэффициентами из любого поля) вместе с нулем при обычных операциях образуют линейное пространство, и найти его размерность.

1831. Пусть $\boldsymbol{V}$ — линейное пространство всех многочленов от x степени $\leqslant n$, $n > 1$, с действительными коэффициентами.

а) Доказать, что множество $\boldsymbol{L}$ всех многочленов из $\boldsymbol{V}$, имеющих данный действительный корень c, является подпространством $\boldsymbol{V}$;

б) найти размерность $\boldsymbol{L}$;

в) то же для множества $\boldsymbol{L}_k$, $1 \leqslant k \leqslant n$, всех многочленов из $\boldsymbol{V}$, имеющих k различных действительных корней $c_1, \ldots, c_k$ (без учета их кратности);

г) является ли подпространством множество $\boldsymbol{L}'$ всех многочленов из $\boldsymbol{V}$, имеющих простой действительный корень c?

1832*. Доказать теорему: для того чтобы две линейно независимые системы с одинаковым числом векторов

$$\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k, \tag{1}$$

$$\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_k \tag{2}$$

n-мерного пространства $\boldsymbol{V}_n$ были эквивалентны (или порождали одно и то же подпространство), необходимо и достаточно, чтобы в любом базисе соответствующие друг другу миноры матриц A и B из координатных строк векторов этих систем были пропорциональны.

1833. Доказать, что любое подпространство $\boldsymbol{L}$ n-мерного линейного пространства $\boldsymbol{V}_n$ является областью значений некоторого линейного преобразования φ.

1834. Доказать, что любое подпространство $\boldsymbol{L}$ n-мерного линейного пространства $\boldsymbol{V}_n$ является ядром некоторого линейного преобразования φ.

1835. Доказать, что если для каждого из попарно различных собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ линейного преобразования φ взять линейно независимую систему собственных векторов, то система, содержащая все взятые векторы, линейно независима.

1836*. Пусть $\boldsymbol{V}$ — действительное линейное пространство (или линейное пространство над полем $\boldsymbol{P}$, характеристика которого отлична от двух) и $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{M}$ — разложение пространства $\boldsymbol{V}$ в прямую сумму подпространств $\boldsymbol{L}$ и $\boldsymbol{M}$. Тогда любой вектор $\boldsymbol{x}$ однозначно представляется в виде

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}; \quad \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{L}, \quad \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{M}.$$

Линейное преобразование φ, определенное условием $\varphi\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$, называется *проектированием пространства* $\boldsymbol{V}$ *на* $\boldsymbol{L}$ *параллельно* $\boldsymbol{M}$. По задаче 1538 проектирования совпадают с идемпотентными преобразованиями, т. е. с линейными преобразованиями, обладающими свойством $\varphi^2 = \varphi$. Пользуясь этим, доказать утверждения:

а) если φ — проектирование на $\boldsymbol{L}$ параллельно $\boldsymbol{M}$ и ε — тождественное преобразование, то $\varepsilon - \varphi$ — проектирование на $\boldsymbol{M}$ параллельно $\boldsymbol{L}$;

б) для того чтобы сумма $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ двух проектирований φ_1 и φ_2 была проектированием, необходимо и достаточно выполнение условия

$$\varphi_1\varphi_2 = \varphi_2\varphi_1 = \omega, \tag{1}$$

где ω — нулевое преобразование; если φ_1 и φ_2 — соответственно проектирования на $\boldsymbol{L}_1$ параллельно $\boldsymbol{M}_1$ и на $\boldsymbol{L}_2$ параллельно $\boldsymbol{M}_2$, причем выполнено условие (1), то $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ — проектирование на $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}_1 + \boldsymbol{L}_2$ параллельно $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}_1 \cap \boldsymbol{M}_2$;

в) для того чтобы разность $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ двух проектирований φ_1 и φ_2 была проектированием, необходимо и достаточно выполнение условия

$$\varphi_1\varphi_2 = \varphi_2\varphi_1 = \varphi_2; \tag{2}$$

если φ_1 и φ_2 — проектирования, определенные в пункте б), причем выполнено условие (2), то $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ — проектирование на $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}_1 \cap \boldsymbol{M}_2$ параллельно $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}_1 + \boldsymbol{L}_2$;

г) для того чтобы произведение $\varphi = \varphi_1\varphi_2$ двух проектирований φ_1 и φ_2 было проектированием, достаточно выполнение условия

$$\varphi_1\varphi_2 = \varphi_2\varphi_1; \tag{3}$$

если φ_1 и φ_2 — проектирования, определенные в пункте б), причем выполнено условие (3), то $\varphi = \varphi_1\varphi_2$ — проектирование на $\boldsymbol{L} =$

$\boldsymbol{L}_1 \cap \boldsymbol{L}_2$ параллельно $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}_1 + \boldsymbol{M}_2$ (здесь сумма не обязательно прямая). Показать на примере, что условие (3) не является необходимым для того, чтобы произведение проектирований φ_1 и φ_2 было проектированием.

1837*. Доказать, что если для преобразования φ евклидова пространства $\boldsymbol{V}$ в себя существует сопряженное преобразование φ^*, т. е. преобразование, обладающее свойством $(\varphi\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \varphi\boldsymbol{y})$ для любых векторов $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ из $\boldsymbol{V}$, то φ и φ^* линейны. В частности, симметрическое и кососимметрическое преобразования можно определить соответственно равенствами $(\varphi\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \varphi\boldsymbol{y})$ и $(\varphi\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = -(\boldsymbol{x}, \varphi\boldsymbol{y})$ без требования линейности.

1838. Найти расстояние между двумя плоскостями $\boldsymbol{P}_1$: $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}_0 + t_1\boldsymbol{a}_1 + t_2\boldsymbol{a}_2$ и $\boldsymbol{P}_2$: $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_0 + t_1\boldsymbol{b}_1 + t_2\boldsymbol{b}_2$, где $\boldsymbol{a}_0 = (2, 1, 0, 1)$, $\boldsymbol{a}_1 = (1, 1, 1, 1)$, $\boldsymbol{a}_2 = (1, 0, 0, 1)$, $\boldsymbol{b}_0 = (1, -1 - 1, 0)$, $\boldsymbol{b}_1 = (1, 1, 0, -1)$, $\boldsymbol{b}_2 = (1, 1, 2, 3)$ и координаты векторов даны в ортонормированном базисе.

1839. *Гильбертовым пространством* называется множество $\boldsymbol{V}$ всех бесконечных последовательностей действительных чисел $\boldsymbol{x} = (a_1, a_2, \ldots)$, для которых сходится ряд из квадратов $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i^2$. Такие последовательности называются *векторами* (или *точками*) пространства $\boldsymbol{V}$. Сложение векторов, умножение вектора на число и скалярное умножение векторов определяются обычным образом. Именно, если $\boldsymbol{x} = (a_1, a_2, \ldots)$ и $\boldsymbol{y} = (b_1, b_2, \ldots)$ — векторы и c — число, то

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots), c\boldsymbol{x} = (ca_1, ca_2, \ldots), (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i.$$

Доказать, что:

а) $\boldsymbol{V}$ является бесконечномерным евклидовым пространством;

б) если $\boldsymbol{L}^*$ — ортогональное дополнение к подпространству $\boldsymbol{L}$ из $\boldsymbol{V}$ (задача 1364), то равенство $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{L}^*$ верно для конечномерного $\boldsymbol{L}$;

в) показать на примерах, что равенства $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{L}^*$ и $(\boldsymbol{L}^*)^* = \boldsymbol{L}$ (см. задачи 1364, 1365) могут быть неверны для бесконечномерных подпространств из $\boldsymbol{V}$.

1840. Пусть $\boldsymbol{V}_n = \boldsymbol{L}_1 + \boldsymbol{L}_2$ — разложение n-мерного евклидова пространства в прямую сумму двух подпространств, $\boldsymbol{L}_1^*$ и $\boldsymbol{L}_2^*$ — ортогональные дополнения, соответственно $\boldsymbol{L}_1$ и $\boldsymbol{L}_2$, φ — отражение $\boldsymbol{V}_n$ в $\boldsymbol{L}_1$ параллельно $\boldsymbol{L}_2$. Доказать, что преобразование φ^*, сопряженное φ, является отражением $\boldsymbol{V}_n$ в $\boldsymbol{L}_2^*$ параллельно $\boldsymbol{L}_1^*$.

1841. Найти все изометрические (или ортогональные) преобразования, сохраняющие на месте нулевой вектор: а) на плоскости; б) в трехмерном пространстве.

1842*. Найти геометрический смысл линейного преобразования φ трехмерного евклидова пространства, заданного в ортонормированном базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ матрицей

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} \\ -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

1843*. Выяснить геометрический смысл кососимметрического преобразования φ евклидова пространства для случаев: а) прямой; б) плоскости; в) трехмерного пространства. Показать, что в трехмерном пространстве φ сводится к векторному умножению всех векторов слева на один и тот же вектор $\boldsymbol{a}$, т. е. $\varphi\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{x}$.

1844*. Доказать утверждение: для того чтобы линейное преобразование φ евклидова пространства (не обязательно конечномерного) было кососимметрическим, необходимо и достаточно, чтобы оно переводило каждый вектор в вектор, ортогональный с ним.

§ 24. Линейные, билинейные и квадратичные функции и формы (добавление к § 15)

1845*. Доказать, что для любой ненулевой линейной функции $l(\boldsymbol{x})$, заданной в n-мерном линейном пространстве $\boldsymbol{V}_n$, существует канонический базис, в котором эта функция записывается в каноническом виде $l(\boldsymbol{x}) = x_1$, где x_1 — первая координата вектора $\boldsymbol{x}$ в этом базисе.

1846. Доказать, что ненулевая билинейная форма $b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i y_j$ тогда и только тогда распадается в произведение двух линейных форм $b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = l_1(\boldsymbol{x})l_2(\boldsymbol{y})$, где $l_1(\boldsymbol{x}) = \sum\limits_{i=1}^{n} b_i x_i$, $l_2(\boldsymbol{y}) = \sum\limits_{j=1}^{n} c_j y_j$, когда ее ранг равен единице.

1847. Доказать, что билинейная функция $b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, данная в действительном n-мерном пространстве (или в n-мерном пространстве над полем характеристики, не равной двум), тогда и только тогда является симметрической, когда она имеет канонический базис, в котором она записывается билинейной формой канонического вида: $b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \lambda_1 x_1 y_1 + \lambda_2 x_2 y_2 + \dots + \lambda_n x_n y_n$.

1848*. Доказать, что если произведение двух линейных функций, заданных на линейном пространстве $\boldsymbol{V}$ (не обязательно конечномерном), тождественно равно нулю, т. е. $l_1(\boldsymbol{x})l_2(\boldsymbol{x}) = 0$ для любого $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V}$, то хотя бы одна из этих функций тождественно равна нулю.

1849*. Доказать, что если симметрическая билинейная функция $b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, заданная в линейном пространстве $\boldsymbol{V}$ (не обязательно конечномерном), распадается на две линейные функции: $b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = l_1(\boldsymbol{x})l_2(\boldsymbol{y})$, то она представляется в виде $b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \lambda l(\boldsymbol{x})l(\boldsymbol{y})$, где λ — число, отличное от нуля, и $l(\boldsymbol{x})$ — линейная функция.

1850*. Доказать, что билинейная функция в n-мерном действительном пространстве тогда и только тогда имеет ранг 1, когда в некотором базисе она записывается формой вида:

а) $\pm x_1y_1$, если функция симметрическая;

б) x_1y_2, если функция несимметрическая.

1851*. Доказать, что ненулевая кососимметрическая функция на линейном пространстве $\boldsymbol{V}$ (не обязательно конечномерном) не может распадаться в произведение двух линейных функций.

1852*. Пусть $l(\boldsymbol{x})$ — ненулевая линейная функция на линейном пространстве $\boldsymbol{V}$ (не обязательно конечномерном). Доказать, что:

а) ядро $\boldsymbol{S}$ функции $l(\boldsymbol{x})$, т. е. множество всех векторов $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V}$, для которых $l(\boldsymbol{x}) = 0$, есть максимальное линейное подпространство, т. е. $\boldsymbol{S}$ не содержится в подпространстве $\boldsymbol{T}$, отличном от $\boldsymbol{S}$ и $\boldsymbol{V}$;

б) для любого вектора $\boldsymbol{a}$, не лежащего в $\boldsymbol{S}$, любой вектор $\boldsymbol{x}$ однозначно представляется в виде $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} + \alpha\boldsymbol{a}$, где $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{S}$.

1853*. Доказать, что если две линейные функции $l_1(\boldsymbol{x})$ и $l_2(\boldsymbol{x})$ на линейном пространстве $\boldsymbol{V}$ (не обязательно конечномерном) имеют одно и то же ядро $\boldsymbol{S}$, то $l_1(\boldsymbol{x}) = \lambda l_2(\boldsymbol{x})$, где λ — число, отличное от нуля.

1854*. Применяя метод Якоби вычисления угловых миноров, определить аффинный класс поверхностей в трехмерном пространстве:

а) $x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1 + 2x_2 = 0$;

б) $x_1^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_1 + 1 = 0$.

1855. Доказать, что если квадратичная форма с матрицей A положительно определенна, то и квадратичная форма

а) с обратной матрицей A^{-1};

б) со взаимной матрицей $\widehat{A}$ положительно определенна.

1856*. Пусть $f(\boldsymbol{x})$ — квадратичная функция на n-мерном действительном линейном пространстве $\boldsymbol{V}_n$. Вектор $\boldsymbol{x}_0$ называется *изотропным*, если $f(\boldsymbol{x}_0) = 0$. Доказать, что если функция $f(\boldsymbol{x})$ — знакопеременная, т. е. существуют векторы $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ такие, что $f(\boldsymbol{x}_1) > 0$, $f(\boldsymbol{x}_2) < 0$, то существует базис, состоящий из изотропных векторов. Указать метод построения такого базиса.

1857*. *Изотропным* (или *нулевым*) *конусом квадратичной функции* $f(\boldsymbol{x})$ называется множество K всех изотропных векторов (задача 1856).

Доказать, что изотропный конус квадратичной функции $f(\boldsymbol{x})$ на n-мерном действительном пространстве $\boldsymbol{V}_n$ тогда и только тогда будет подпространством, когда $f(\boldsymbol{x})$ знакопостоянна, т. е. или $f(\boldsymbol{x}) \geqslant 0$ для всех $\boldsymbol{x}$, или $f(\boldsymbol{x}) \leqslant 0$ для всех $\boldsymbol{x}$.

1858.* Пусть $f(\boldsymbol{x})$ — квадратичная функция на n-мерном действительном линейном пространстве $\boldsymbol{V}_n$, r — ранг, p и q — положительный и отрицательный индексы инерции этой функции. Доказать, что максимальная размерность линейных подпространств, входящих в изотропный конус K (задача 1857), равна:

а) $\min(p,q)$, если $f(\boldsymbol{x})$ невырожденна (т. е. $r=n$);

б) $n-\max(p,q)=\min(p,q)+n-r$, если $f(\boldsymbol{x})$ — любая (вырожденная или невырожденная).

1859.* Пусть $f(\boldsymbol{x})$ — квадратичная функция с теми же свойствами, как и в предыдущей задаче. Доказать, что максимальная размерность линейного многообразия $\boldsymbol{P}$, входящего в поверхность второго порядка S, заданную уравнением $f(\boldsymbol{x})=1$, равна:

а) $\min(p,q)$, если $f(\boldsymbol{x})$ невырожденна (т. е. $r=n$);

б) $\min(p-1,q)+n-r=n-\max(p,q+1)$ в общем случае.

1860. Пользуясь задачами 1858 и 1859, найти максимальную размерность линейных многообразий, содержащихся в следующих поверхностях второго порядка (если размерность пространства не указана, она считается равной наибольшему номеру координат; размерность пустого многообразия считается равной -1):

а) $x_1^2+x_2^2-x_3^2=1$ (однополостный гиперболоид);

б) $x_1^2-x_2^2-x_3^2=1$ (двуполостный гиперболоид);

в) $x_1^2-x_2^2-x_3^2=0$; г) $x_1x_2=1$;

д) $x_1x_2=1$ (в трехмерном пространстве);

е) $x_1x_2=0$;

ж) $x_1x_2=0$ (в n-мерном пространстве); з) $x_1^2-x_n^2=1$;

и) $x_1^2-x_2^2-\dots-x_n^2=1$; к) $x_1^2+\dots+x_{n-1}^2-x_n^2=1$;

л) $x_1^2+x_2^2-x_3^2-x_4^2=1$; м) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}x_k^2=1$.

1861.* *Левым ядром* (или *левым нулевым пространством*) билинейной функции $b(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$, заданной на линейном пространстве $\boldsymbol{V}$, называется множество $\boldsymbol{L}_0'$ всех векторов $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{V}$, для которых $b(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=0$ для всех $\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{V}$. Аналогично определяется правое ядро $\boldsymbol{L}_0''$.

Доказать, что:

а) левое и правое ядра — подпространства;

б) в n-мерном пространстве левое и правое ядра имеют одинаковую размерность $n-r$, где r — ранг $b(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$, т. е. ранг ее матрицы в каком-нибудь базисе.

1862. Найти базисы левого и правого ядер (нулевых пространств) $\boldsymbol{L}_0'$ и $\boldsymbol{L}_0''$ (задача 1861) для билинейной формы $b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 3x_2y_1 + 6x_2y_2$ и показать, что $\boldsymbol{L}_0' \neq \boldsymbol{L}_0''$.

1863.* а) Доказать, что для симметрической и кососимметрической билинейных функций левое ядро совпадает с правым;

б) привести пример билинейной функции в n-мерном пространстве, которая не является ни симметрической, ни кососимметрической, но для которой левое ядро совпадает с правым.

1864.* Доказать, что ненулевая кососимметрическая билинейная функция в трехмерном пространстве представляется в виде $b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = a(\boldsymbol{x})b(\boldsymbol{y}) - a(\boldsymbol{y})b(\boldsymbol{x})$, где $a(\boldsymbol{x})$ и $b(\boldsymbol{x})$ — линейные функции.

1865.* Пусть $b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ — билинейная функция и $\boldsymbol{L}$ — k-мерное подпространство в n-мерном пространстве $\boldsymbol{V}_n$. Обозначим через $\boldsymbol{L}^*$ множество всех векторов $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{V}_n$ таких, что $b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$ для всех $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{L}$. Доказать, что:

а) $\boldsymbol{L}^*$ — подпространство;

б) если $b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ невырожденна (т. е. ранг равен n), то размерность $\boldsymbol{L}^*$ равна $n - k$;

в) если $b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ имеет ранг $r < n$, то размерность $\boldsymbol{L}^*$ больше или равна $\max(n - k, n - r)$.

1866.* Пусть $b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ — ненулевая кососимметрическая билинейная функция в n-мерном линейном пространстве $\boldsymbol{V}_n$. Доказать, что существует базис, в котором $b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ запишется билинейной формой следующего канонического вида:

$$b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1y_2 - x_2y_1 + x_3y_4 - x_4y_3 + \ldots + x_{2k-1}y_{2k} - x_{2k}y_{2k-1},$$
$$1 \leqslant k \leqslant n/2.$$

Найти канонический вид кососимметрической билинейной формы (задача 1866) и невырожденное преобразование неизвестных, к нему приводящее, для следующих форм:

1867. $b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1y_2 - x_2y_1 + 2(x_1y_3 - x_3y_1) - x_1y_4 + x_4y_1 - 3(x_2y_4 - x_4y_2)$.

1868. $b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1y_2 - x_2y_1 + 2(x_1y_3 - x_3y_1) + 4(x_2y_4 - x_4y_2)$.

1869.* Пусть $f(\boldsymbol{x})$ — квадратичная функция в n-мерном евклидовом пространстве $\boldsymbol{V}_n$. Доказать утверждение:

Для того чтобы конус K с уравнением $f(\boldsymbol{x}) = 0$ (задача 1857) содержал ортонормированный базис пространства $\boldsymbol{V}_n$, необходимо и достаточно, чтобы след матрицы A функции $f(\boldsymbol{x})$ в одном (а значит, и в любом) ортонормированном базисе был равен нулю. Сформулировать соответствующее утверждение на матричном языке.

§ 25. Аффинные (точечно-векторные) пространства

Определение[1]. Пусть дано множество $\mathfrak{A}$ элементов $A, B, C \ldots$, называемых точками, и линейное пространство $\boldsymbol{V}$ (над полем действительных чисел или над любым полем P) с элементами $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, \ldots$, называемыми векторами. Пусть, далее, каждой упорядоченной паре точек A, B (различных или совпадающих) поставлен в соответствие единственный вектор $\boldsymbol{x} = \overrightarrow{AB}$, причем для этого соответствия выполняются следующие две аксиомы:

I) для любой точки A и любого вектора $\boldsymbol{x}$ существует единственная точка B такая, что $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{x}$;

II) для любых (не обязательно различных) трех точек A, B, C имеет место равенство $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Множество $\mathfrak{A}$ вместе с таким соответствием называется *аффинным пространством.*

Если $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}_n$ есть n-мерное линейное пространство, то и $\mathfrak{A}$ называется n-мерным аффинным пространством и обозначается через $\mathfrak{A}_n$. Если $\boldsymbol{V}$ бесконечномерно, то и $\mathfrak{A}$ называется бесконечномерным. Если линейное пространство $\boldsymbol{V}$ является евклидовым, то и точечно-векторное пространство $\mathfrak{A}$ называется евклидовым. В этом случае расстояние между точками A и B равно длине вектора $\overrightarrow{AB}$ и угол ABC равен углу между векторами $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$.

Замечание. Любое линейное пространство $\boldsymbol{V}$ можно рассматривать как аффинное. При этом множество $\mathfrak{A}$ совпадает с $\boldsymbol{V}$, так что векторы рассматриваются также как точки. Говорят также, что вектор $\boldsymbol{x}$ задает некоторую точку аффинного пространства. Сопоставление упорядоченной паре точек вектора, указанное в определении, в данном случае состоит в том, что упорядоченной паре точек $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ из $\boldsymbol{V}$ соответствует вектор $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}$. Отсюда по $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{z}$ однозначно определяется $\boldsymbol{y}$, что доказывает аксиому I. Аксиома II сводится к очевидному равенству $(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{z} - \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{z} - \boldsymbol{x}$. Такое отождествление точек и векторов принято в §§ 16–19 этой книги.

Плоскостью аффинного пространства $\mathfrak{A}$*, проходящей через точку* A *и имеющей направляющим подпространством* $\boldsymbol{L}$, называется множество $\boldsymbol{\pi}$ всех точек M из $\mathfrak{A}$, для которых вектор $\overrightarrow{AM}$ принадлежит $\boldsymbol{L}$. *Размерностью плоскости* $\boldsymbol{\pi}$ называется размерность ее направляющего подпространства $\boldsymbol{L}$. Одномерные плоскости называются *прямыми*, а $(n-1)$-мерные плоскости n-мерного пространства — *гиперплоскостями.*

Две плоскости $\boldsymbol{\pi}_1$ и $\boldsymbol{\pi}_2$ называются *параллельными*, в символах $\boldsymbol{\pi}_1 \| \boldsymbol{\pi}_2$, если они не пересекаются (т. е. не имеют общих точек) и направляющее

[1] Приведенное здесь определение аффинного пространства взято (с небольшими изменениями) из книги: Ефимов Н. В. Высшая геометрия, — 4-е изд. — М.: Физматгиз, 1961, § 179.

подпространство одной из них содержится в направляющем подпространстве другой (или совпадает с ним).

Если выбрать некоторую начальную точку $O \in \mathfrak{A}$, то любая точка M однозначно определяется вектором $\overrightarrow{OM}$ и обратно. Вектор $\overrightarrow{OM}$ называется *радиусом-вектором* точки M. Плоскость $\boldsymbol{\pi}$, проходящая через точку A и имеющая направляющее подпространство $\boldsymbol{L}$, состоит из всех точек M, радиусы-векторы которых определяются из равенства $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \boldsymbol{x}$, где $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{L}$. Если считать точками векторы из $\boldsymbol{V}$, то плоскость определяется из равенства $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{L}$, где $\boldsymbol{x}_0 = \overrightarrow{OA}$. Таким образом, в этом случае понятие плоскости совпадает с понятием линейного многообразия из § 16. Плоскости, проходящие через точку O, будут совпадать с подпространствами.

Аффинная система координат n-мерного аффинного пространства $\mathfrak{A}_n$ состоит из точки $O \in \mathfrak{A}_n$, называемой *началом координат*, и базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ соответствующего линейного пространства $\boldsymbol{V}_n$. *Координатами точки* $M \in \mathfrak{A}_n$ называются координаты ее радиуса-вектора $\overrightarrow{OM}$ в данном базисе, т. е. числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$, удовлетворяющие равенству

$$\overrightarrow{OM} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n.$$

Пусть k-мерная плоскость $\boldsymbol{\pi}$ действительного n-мерного аффинного пространства проходит через точку A с координатами $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ и имеет определяющее подпространство $\boldsymbol{L}$ с базисом из векторов, заданных их координатами

$$\boldsymbol{c}_i = (c_1^i, c_2^i, \ldots, c_n^i) \quad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

Тогда координаты любой точки $M \in \boldsymbol{\pi}$ определяются равенствами

$$x_i = x_i^0 + t_1 c_i^1 + \cdots + t_k c_i^k \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{1}$$

Эти равенства называются *параметрическими уравнениями плоскости* $\boldsymbol{\pi}$. Параметы $t_1, t_2, \ldots, t_k$ принимают любые действительные значения.

Ту же плоскость $\boldsymbol{\pi}$ можно задать $n - k$ линейно независимыми уравнениями вида

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n - k). \tag{2}$$

Здесь $b_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^0$ и однородные уравнения $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n-k)$ задают подпространство $\boldsymbol{L}$. Уравнения (2) будем называть общими уравнениями плоскости $\boldsymbol{\pi}$.

Уравнения прямой, проходящей через две точки $A(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ и $B(y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0)$, имеют вид

$$x_i = x_i^0 + t(y_i^0 - x_i^0) \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{3}$$

Здесь t пробегает все действительные числа.

Отрезком AB называется множество точек M, координаты которых получаются из равенств (3) при условии $0 \leqslant t \leqslant 1$. Точка M, делящая отрезок AB в отношении $\lambda \neq -1$, определяется в векторной форме условием $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{MB}$ или в координатах

$$x_i = \frac{x_1^0 + \lambda y_i^0}{1+\lambda} \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

1870*. В аффинном пространстве даны четыре различные точки A, B, C, D. Точки K, L, M, N делят отрезки AB, BC, CD, DA в одинаковом отношении $\dfrac{m}{n} \neq -1$. Доказать, что:

а) если $ABCD$ — параллелограмм, то $KLMN$ — параллелограмм;

б) если $KLMN$ — параллелограмм и $m \neq n$, то и $ABCD$ — параллелограмм.

1871. Доказать, что паре совпавших точек соответствует нулевой вектор, т. е. $\overrightarrow{AA} = \mathbf{0}$.

1872. Доказать, что $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

1873. Доказать, что любая плоскость $\boldsymbol{\pi}$ аффинного пространства сама является аффинным пространством, размерность которого равна размерности $\boldsymbol{\pi}$.

1874. Доказать, что плоскость $\boldsymbol{\pi}$, проходящая через точку A с направляющим подпространством $\boldsymbol{L}$, не зависит от выбора на ней точки A, т. е. совпадает с плоскостью $\boldsymbol{\pi}'$, проходящей через точку A' из $\boldsymbol{\pi}$, с тем же направляющим подпространством $\boldsymbol{L}$.

Найти параметрические уравнения плоскости, заданной общими уравнениями:

1875. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 1,\\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= 3,\\ x_1 - x_2 - 4x_3 + 5x_4 &= -3. \end{aligned}$$

1876. $$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 &= 2,\\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 &= 3,\\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 &= 9,\\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 &= 1. \end{aligned}$$

Найти общие уравнения плоскости, заданной параметрическими уравнениями:

1877. $$\begin{aligned} x_1 &= 2 + t_1 + t_2,\\ x_2 &= 1 + 2t_1 + t_2,\\ x_3 &= -3 + t_1 + 2t_2,\\ x_4 &= 3 + 3t_1 + t_2,\\ x_5 &= 1 + t_1 + 3t_2. \end{aligned}$$

1878. $$\begin{aligned} x_1 &= 1 + t_1 + t_2,\\ x_2 &= 2 + t_2,\\ x_3 &= 5 - t_1 + 3t_2,\\ x_4 &= 3 + 2t_1 - t_2,\\ x_5 &= 1 + 3t_1 - 2t_2. \end{aligned}$$

1879. Доказать, что через любые две различные точки A, B аффинного пространства проходит единственная прямая.

1880. Доказать, что через любые три точки A, B, C аффинного пространства, не лежащие на одной прямой, проходит единственная двумерная плоскость.

1881. Доказать, что через любые $k+1$ точек $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_k$ аффинного пространства, не лежащие в $(k-1)$-мерной плоскости, проходит единственная k-мерная плоскость.

1882. Указать все случаи взаимного расположения трех различных плоскостей трехмерного пространства, заданных общими уравнениями:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3, \end{aligned}$$

и для каждого случая дать необходимое и достаточное условие с помощью понятия ранга матрицы.

1883. С помощью понятия ранга матрицы охарактеризовать все случаи взаимного расположения двух прямых трехмерного пространства, заданных общими уравнениями

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \quad a_2x + b_2y + c_2z = d_2,$$

и

$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3, \quad a_4x + b_4y + c_4z = d_4.$$

1884. С помощью понятия ранга матрицы описать все случаи взаимного расположения двух двумерных плоскостей четырехмерного пространства, заданных общими уравнениями

$$\sum_{j=1}^{4} a_{ij}x_j = b_i \quad (i = 1, 2) \qquad (1)$$

и

$$\sum_{j=1}^{4} a_{ij}x_j = b_i \quad (i = 3, 4) \qquad (2)$$

1885. Описать все случаи взаимного расположения двух гиперплоскостей n-мерного аффинного пространства, заданных общими уравнениями

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = c \text{ и } b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n = d.$$

1886*. Доказать, что если пересечение π множества (конечного или бесконечного) плоскостей π_α аффинного пространства непусто, то π является плоскостью.

1887. Доказать, что две плоскости $\pi_1 = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{L}_1$ и $\pi_2 = \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{L}_2$ тогда и только тогда пересекаются, когда вектор $\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2$ принадлежит подпространству $\boldsymbol{L}_1 + \boldsymbol{L}_2$.

1888.* Доказать, что плоскость π_1 n-мерного аффинного пространства, отличная от точки, тогда и только тогда параллельна любой не пересекающей ее плоскости π_2, когда π_1 является гиперплоскостью (т. е. имеет размерность $n-1$).

1889.* Доказать, что две пересекающиеся гиперплоскости π_1 и π_2 n-мерного аффинного пространства тогда и только тогда параллельны, когда они лежат в плоскости π_3, имеющей размерность на единицу большую, чем большая из размерностей π_1 и π_2.

1890.* Доказать, что через любые непересекающиеся плоскости π_1 и π_2 n-мерного аффинного пространства можно провести параллельные гиперплоскости π_1' и π_2'.

1891. Пусть $\pi_1 = a_1 + L_1$ и $\pi_2 = a_2 + L_2$ — непересекающиеся плоскости конечномерного аффинного пространства. Найти плоскость π_3 наименьшей размерности, содержащую π_1 и параллельную π_2.

1892. Доказать, что если плоскость π_0 аффинного пространства параллельна каждой из плоскостей π_α и пересечение π плоскостей π_α непусто, то π есть плоскость, параллельная π_0.

1893. Выразить условие параллельности двух плоскостей n-мерного аффинного пространства, заданных общими уравнениями, с помощью понятия ранга матрицы.

1894. Гиперплоскость, заданная общим уравнением $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i = b$, разбивает n-мерное аффинное пространство на два полупространства, состоящие из точек, координаты которых удовлетворяют одному из неравенств $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i \geqslant b$ или $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i \leqslant b$. Доказать, что каждое из этих полупространств является выпуклым множеством.

1895.*[1] Многогранник P задан как выпуклое замыкание системы точек четырехмерного аффинного пространства, заданных координатами

$$O(0,0,0,0),\ A(1,0,0,0),\ B(0,1,0,0),\ C(1,1,0,0),$$
$$D(0,0,1,0),\ E(0,0,0,1),\ F(0,0,1,1).$$

а) Написать систему линейных неравенств, задающих многогранник P;

б) найти все трехмерные грани этого многогранника.

1896. Решить задачу, аналогичную предыдущей задаче, для точек:

$$O(0,0,0,0),\ A(1,0,0,0),\ B(0,1,0,0),$$
$$C(0,0,1,0),\ D(1,1,0,0),\ E(1,0,1,0),$$
$$F(0,1,1,0),\ G(1,1,1,0),\ H(0,0,0,1).$$

---

[1] Задачи 1895–1898 указал автору Э. Б. Винберг.

1897. Найти вершины и форму многогранника P трехмерного пространства, заданного системой неравенств

$$x_1 \leqslant 1,\ x_2 \leqslant 1,\ x_3 \leqslant 1,\ x_2 + x_3 \geqslant -1,\ x_1 + x_3 \geqslant -1,\ x_1 + x_2 \geqslant -1.$$

1898. Найти форму и вершины сечений четырехмерного куба, заданного в ортонормированной системе координат неравенствами $0 \leqslant x_i \leqslant 1$, $i = 1, 2, 3, 4$, плоскостями:

а) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$; б) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2$;
в) $x_1 + x_2 + x_3 = 1$; г) $x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = 1$.

1899*. В трехмерном аффинном пространстве $\mathfrak{A}_3$ над полем Z_2 из двух элементов 0 и 1 найти: а) число всех точек; б) число всех прямых, в) число всех плоскостей; г) число точек, лежащих на одной прямой; д) число прямых, проходящих через одну точку; е) число точек, лежащих на одной плоскости; ж) число плоскостей, проходящих через одну точку; з) число прямых, лежащих на одной плоскости; и) число плоскостей, проходящих через одну прямую; к) число прямых, параллельных данной прямой; л) число плоскостей, параллельных данной плоскости; м) число прямых, параллельных данной плоскости; н) число плоскостей, параллельных данной прямой; о) число прямых, скрещивающихся с данной прямой.

§ 26. Тензорная алгебра[1)]

Приведем основные понятия и свойства, которые предполагаются известными из курсов лекций. Доказательства некоторых из указанных свойств предлагаются в качестве задач в этом параграфе.

Пусть в n-мерном линейном пространстве $\boldsymbol{V}_n$ (действительном, комплексном или над некоторым полем P) даны два базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ и $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \ldots, \boldsymbol{e}'_n$. Эти базисы связаны равенствами:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{e}'_1 &= c_1^1\boldsymbol{e}_1 + c_1^2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + c_1^n\boldsymbol{e}_n,\\
\boldsymbol{e}'_2 &= c_2^1\boldsymbol{e}_1 + c_2^2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + c_2^n\boldsymbol{e}_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\boldsymbol{e}'_n &= c_n^1\boldsymbol{e}_1 + c_n^2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + c_n^n\boldsymbol{e}_n,
\end{aligned}$$

или в сокращенной записи

$$\boldsymbol{e}'_i = c_i^k\boldsymbol{e}_k \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{1}$$

[1)] Ряд задач этого параграфа указан Н. В. Ефимовым и Л. А. Скорняковым в связи с курсом «Линейная алгебра и геометрия», читавшимся ими на механико-математическом факультете МГУ с 1964 г.

В частности, определение тензорного произведения и применение к нему понятия свертки (см. введение в задачу 1918) взяты из курса Н. В. Ефимова.

Здесь и ниже по индексу, стоящему как сверху, так и снизу, предполагается суммирование в пределах от 1 до n.

Введем матрицу перехода

$$C = \begin{pmatrix} c_1^1 & c_2^1 & \dots & c_n^1 \\ c_1^2 & c_2^2 & \dots & c_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_1^n & c_2^n & \dots & c_n^n \end{pmatrix},$$

по столбцам которой стоят координаты векторов второго базиса в первом[1]. Тогда формулы (1) в матричной форме запишутся одним равенством

$$(\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \dots, \boldsymbol{e}'_n) = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n)C.$$

Координаты вектора $\boldsymbol{x}$ в первом базисе выразятся через координаты того же вектора во втором базисе при помощи строк матрицы C по формулам: $x^k = c_i^k x'^i$, $k = 1, 2, \dots, n$. Отсюда координаты x'^i выразятся через x^k в виде

$$x'^i = d_k^i x^k, \quad i = 1, 2, \dots, n. \tag{2}$$

Введем матрицу

$$D = \begin{pmatrix} d_1^1 & d_1^2 & \dots & d_1^n \\ d_2^1 & d_2^2 & \dots & d_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_n^1 & d_n^2 & \dots & d_n^n \end{pmatrix},$$

по столбцам которой стоят коэффициенты в выражениях x'^i через x^k. Тогда формулы (2) в матричной форме запишутся равенством

$$(x'^1, x'^2, \dots, x'^n) = (x^1, x^2, \dots, x^n)D.$$

Так как, с другой стороны, $(x^1, x^2, \dots, x^n) = (x'^1, x'^2, \dots, x'^n)C^*$, то матрицы C и D связаны равенством

$$D = (C^*)^{-1}. \tag{3}$$

Здесь и ниже звездочкой обозначена транспонированная матрица. Если обе матрицы C и D писать из коэффициентов формул (1) и (2) не по столбцам, а по строкам, то эти матрицы заменятся на транспонированные и равенство (3) не изменится.

Закон изменения, аналогичный изменению базиса по формулам (1), называется *ковариантным*, а закон изменения по формулам (2) — *контравариантным*. Величины (или другие объекты), связанные с базисом и изме-

[1] Если матрицу перехода писать не по столбцам, а по строкам, то формулы, использующие матричное умножение, изменятся, формулы же (1), (2) и другие, не использующие умножения матриц, останутся прежними.

няющиеся ковариантно, называются *ковариантными* и обозначаются нижними индексами, а изменяющиеся контравариантно называются *контравариантными* и обозначаются верхними индексами.

Тензором в n-мерном линейном пространстве называется такое соответствие, при котором каждому базису пространства соответствуют n^{p+q} чисел $a_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q}$, отмеченных p нижними и q верхними индексами и изменяющихся с изменением базиса ковариантно по нижним и контравариантно по верхним индексам. Эти числа называются *координатами тензора* в данном базисе, а число $p+q$ — *валентностью тензора*. Говорят также, что данный тензор является *p раз ковариантным* и *q раз контравариантным*, или *тензором типа* (p,q).

По определению тензора его координаты в двух базисах

$$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n \text{ и } \boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \dots, \boldsymbol{e}'_n,$$

связанных равенством (1), сами связаны равенством

$$a'^{j_1 j_2 \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots i_p} = c_{i_1 i_2}^{k_1 k_2} \dots c_{i_p}^{k_p} d_{i_1}^{j_1} d_{i_2}^{j_2} \dots d_{i_q}^{j_q} a_{k_1 k_2 \dots k_p}^{l_1 l_2 \dots l_q} \tag{4}$$
$$(i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q = 1, 2, \dots, n).$$

Здесь, как обычно, по всем индексам k_s и l_t предполагается суммирование в пределах от 1 до n.

Тензор можно определить иначе, как геометрический объект, связанный с линейным пространством $\boldsymbol{V}_n$. Для этого рассматривают сопряженное пространство $\boldsymbol{V}_n^*$. Его векторами являются линейные функции $\varphi(\boldsymbol{x})$, заданные на данном пространстве $\boldsymbol{V}_n$ при обычных операциях сложения двух функций и умножения функции на число. Пространство $\boldsymbol{V}_n^*$ также n-мерно, причем каждому базису $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n$ пространства $\boldsymbol{V}_n$ соответствует единственный базис $\boldsymbol{e}^1, \boldsymbol{e}^2, \dots, \boldsymbol{e}^n$ сопряженного пространства $\boldsymbol{V}_n^*$, называемый *сопряженным* (или *взаимным*) *базисом* для данного базиса пространства $\boldsymbol{V}_n$ и связанный с ним равенствами

$$\boldsymbol{e}^i(\boldsymbol{e}_j) = \delta_j^i \quad (i, j = 1, 2, \dots, n), \tag{5}$$

где δ_j^i — символ Кронекера, равный 1 при $i = j$ и 0 при $i \neq j$.

Если базис $\boldsymbol{e}_i$ преобразован по формулам (1), то сопряженный базис $\boldsymbol{e}^i$ преобразуется по формулам

$$\boldsymbol{e}'^i = d_k^i \boldsymbol{e}^k \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Между всеми полилинейными функциями

$$F(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_p;\ \varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^q)$$

от p векторов из $\boldsymbol{V}_n$ и q векторов из $\boldsymbol{V}_n^*$ и всеми тензорами типа (p,q) на $\boldsymbol{V}_n$ можно установить следующее взаимно однозначное соответствие, изоморфное относительно операций сложения, умножения и умножения на число.

Полилинейной функции, написанной выше, соответствует тензор, координаты которого в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$ пространства V_n определяются равенствами

$$a^{j_1 j_2 \ldots j_q}_{i_1 i_2 \ldots i_p} = F(e_{i_1}, e_{i_2} \ldots, e_{i_p}; e^{j_1}, e^{j_2}, \ldots, e^{j_q}) \tag{6}$$
$$(i_1, \ldots, i_p, j_1, \ldots, j_q = 1, 2, \ldots, n).$$

Наоборот, тензору с координатами $a^{j_1 j_2 \ldots j_q}_{i_1 i_2 \ldots i_p}$ в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$ соответствует полилинейная функция, определенная равенством

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_p;\ \varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^q) = a^{j_1 j_2 \ldots j_q}_{i_1 i_2 \ldots i_p} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_p^{i_p} u^1_{j_1} u^2_{j_2} \ldots u^q_{j_q}, \tag{7}$$

где $x_s^1, x_s^2, \ldots, x_s^n$ — координаты вектора x_s в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$ и $u_1^t, u_2^t, \ldots, u_n^t$ — координаты вектора φ^t в сопряженном базисе $e^1, e^2, \ldots, e^n$.

При этом значение полилинейной функции на данных векторах не зависит от выбора сопряженных базисов в V_n и V_n^*.

Ввиду указанного соответствия тензоры на пространстве V_n можно определить независимо от базиса как полилинейные функции от векторов пространства V_n и сопряженного пространства V_n^*.

Пространством с квадратичной метрикой называется n-мерное действительное линейное пространство M_n, в котором задана невырожденная симметрическая билинейная функция $g(x, y)$, называемая метрической функцией. Если соответствующая ей квадратичная функция $g(x, x)$ положительно определена, то пространство с квадратичной метрикой является евклидовым пространством и будет обозначаться через E_n. В этом случае вместо $g(x, y)$ будем писать просто (x, y) и называть значение этой функции скалярным произведением векторов x и y.

В пространстве M_n каждому базису $e_1, e_2, \ldots, e_n$ соответствует единственный взаимный базис $e^1, e^2, \ldots, e^n$, связанный с данным базисом равенствами

$$g(e_i, e^j) = \delta_i^j \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n). \tag{8}$$

Каждый вектор x из пространства M_n разлагается по базисам e_i и e^i, т. е. $x = x^i e_i = x_i e^i$. При изменении базиса e_i по формулам (1) координаты x^i в этом базисе изменяются по формулам (2), т. е. контравариантно, и называются *контравариантными координатами*. В то же время взаимный базис e^i преобразуется по формулам

$$e'^i = d_k^i e^k \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{9}$$

а координаты x_i в этом базисе — по формулам

$$x_i' = c_i^k x_k \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{10}$$

т. е. ковариантно, и называются *ковариантными координатами*.

При фиксированном векторе $y \in M_n$ функция $\varphi_y(x) = g(x, y)$ является линейной функцией от x, т. е. элементом сопряженного пространства M_n^*. Соответствие $y \to \varphi_y(x)$ является изоморфным отображением M_n

на M_n^*. Отождествляя элементы этих пространств, соответствующие друг другу при этом изоморфизме, можем считать, что пространство M_n^*, сопряженное пространству с квадратичной метрикой M_n, совпадает с M_n. В частности, это верно для евклидова пространства E_n.

В пространстве с квадратичной метрикой M_n одну и ту же полилинейную функцию от r векторов из M_n можно рассматривать как тензор типа (p, q), где $p + q = r$ и $p = 0, 1, 2, \ldots, r$. Для этого, выбрав одно из возможных значений для p, определяем координаты тензора в данном базисе e_i по формулам, аналогичным (6), где e^i — взаимный базис, связанный с базисом e_i формулами (8). Обратно, по данному тензору типа (p, q) значение соответствующей полилинейной функции на данных векторах определяется формулой, аналогичной (7). При этом в формулах (6) и (7) под $\varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^q$ надо понимать векторы из того же пространства M_n.

В частности, метрической функции $g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ соответствуют два тензора с координатами

$$g_{ij} = g(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n); \tag{11}$$

$$g^{ij} = g(\boldsymbol{e}^i, \boldsymbol{e}^j) \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n), \tag{12}$$

называемые соответственно *ковариантным и контравариантным метрическими тензорами*. Эти тензоры соответственно типа $(2, 0)$ и $(0, 2)$. Кроме того, той же функции $g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ соответствует третий тензор типа $(1, 1)$, координаты которого определяются формулами (8) и не зависят от выбора базиса $\boldsymbol{e}_i$.

Значения метрической функции $g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ определяются любой из трех формул:

$$g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = g_{ij}\boldsymbol{x}^i\boldsymbol{y}^j, \tag{13}$$

$$g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = g^{ij}\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{y}_j, \tag{14}$$

$$g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}_i\boldsymbol{y}^j. \tag{15}$$

В частности, в евклидовом пространстве аналогично вычисляется скалярное произведение $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$.

Пусть в евклидовом пространстве рассматриваются только ортонормированные базисы. Тогда матрица C из коэффициентов формул (1) ортогональна, из равенства (3) получаем $D = C$, матрицы из коэффициентов формул (1) и (2) будут взаимно транспонированными, взаимный базис совпадает с исходным, ковариантные координаты совпадают с контравариантными и матрицы метрических тензоров g_{ij} и g^{ij} превращаются в единичную матрицу. В этом случае все тензоры типов (p, q), соответствующие данной полилинейной функции от $p + q$ аргументов, совпадают. Отличие ковариантных и контравариантных валентностей тензора теряет значение. Поэтому все индексы можно писать снизу, сохраняя нужные знаки суммирования.

Пусть в евклидовом пространстве E_n дан любой базис $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$; обозначим через g определитель матрицы $G = (g_{ij})$ ковариантного метрического тензора в данном базисе. Так так $g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})$ — положительно определенная квадратичная функция, то $g > 0$.

Дискриминантным тензором (ковариантным) евклидова пространства $\boldsymbol{E}_n$ называется такое соответствие, при котором каждому базису соответствует система чисел (координат тензора), заданных формулами

$$\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} = (-1)^s \sqrt{g}, \tag{16}$$

где s — число инверсий в перестановке $i_1, i_2, \dots, i_n$ и $\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} = 0$, если хотя бы два из индексов одинаковы. В частности, $\varepsilon_{12\dots n} = \sqrt{g} > 0$.

Координаты дискриминантного тензора при переходе к новому базису с той же ориентацией меняются, как у n раз ковариантного тензора, а при переходе к базису с противоположной ориентацией дополнительно меняют знак.

Аналогично определяется *контравариантный дискриминантный тензор* $\varepsilon^{i_1 i_2 \dots i_n}$.

Ориентированным объемом параллелепипеда Q, построенного на векторах $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_n$ пространства $\boldsymbol{E}_n$, называется число, определенное в данном базисе формулой

$$\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_n) = \sqrt{g} \cdot \det_{\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_n), \tag{17}$$

где $\sqrt{g} > 0$ и $\det\limits_{\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_n)$ — определитель из координат векторов $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_n$ в данном базисе. С помощью дискриминантного тензора ориентированный объем выражается формулой

$$\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_n) = \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n}, \tag{18}$$

где x_i^s – s-я координата вектора $\boldsymbol{x}_i$ в данном базисе.

Ориентированный объем обращается в нуль тогда и только тогда, когда векторы $\boldsymbol{x}_i$ линейно зависимы. Для линейно независимых $\boldsymbol{x}_i$ его абсолютная величина равна объему параллелепипеда Q и он положителен или отрицателен, смотря по тому, является ли система векторов $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_n$ одинаково или противоположно ориентированной с базисом $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n$.

Тензорное произведение. Пусть $\boldsymbol{V}$ и $\boldsymbol{V}'$ — два линейных пространства над одним и тем же полем P. Рассмотрим упорядоченные пары $\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}'$ векторов, где $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{x}' \in \boldsymbol{V}'$, и формальные конечные суммы таких пар $\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_1' + \dots + \boldsymbol{x}_k\boldsymbol{x}_k'$. Определим отношение эквивалентности этих сумм по правилам: 1) две суммы, отличающиеся лишь порядком слагаемых, эквивалентны; 2) пары $(\alpha\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}'$ и $\boldsymbol{x}(\alpha\boldsymbol{x}')$, где $\alpha \in P$, эквивалентны; 3) пара $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\boldsymbol{x}'$ эквивалентна сумме пар $\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}' + \boldsymbol{y}\boldsymbol{x}'$ и пара $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}'+\boldsymbol{y}')$ эквивалентна сумме пар $\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}' + \boldsymbol{x}\boldsymbol{y}'$.

Две суммы эквивалентны, если от одной из них можно перейти к другой путем применения указанных правил ко всей сумме или ее части в конечном числе. Это отношение эквивалентности рефлексивно, симметрично и транзитивно. Поэтому все суммы разбиваются на классы эквивалентных сумм. Пусть $\boldsymbol{T}$ — множество этих классов. Введем в $\boldsymbol{T}$ операции сложения и умножения на элементы поля P через операции над представителями классов. *Суммой* двух сумм называется сумма, полученная припиской к первой сумме слагаемых второй суммы. *Умножение* суммы на $\alpha \in P$ определим как умножение на α первых элементов всех пар данной суммы. Например, $\alpha(\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}' + \boldsymbol{y}\boldsymbol{y}') = (\alpha\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}' + (\alpha\boldsymbol{y})\boldsymbol{y}'$.

Множество $\boldsymbol{T}$ при этих операциях является линейным пространством над полем P. Оно называется *тензорным произведением пространств* $\boldsymbol{V}$ и $\boldsymbol{V}'$ и обозначается через $\boldsymbol{V} \times \boldsymbol{V}'$. Если $\boldsymbol{V}$ и $\boldsymbol{V}'$ конечномерны, то и $\boldsymbol{V} \times \boldsymbol{V}'$ конечномерно и его размерность равна произведению размерностей $\boldsymbol{V}$ и $\boldsymbol{V}'$. Если $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ — базис $\boldsymbol{V}$ и $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \ldots, \boldsymbol{e}'_n$ — базис $\boldsymbol{V}'$, то система классов эквивалентных сумм, содержащих упорядоченные пары

$$\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}'_j \quad (i = 1, 2, \ldots, n; \quad j = 1, 2, \ldots, n'), \tag{19}$$

является базисом пространства $\boldsymbol{V} \times \boldsymbol{V}'$ (см. задачу 1918).

Аналогично определяется тензорное произведение любого конечного множества линейных пространств.

Тензоры типа (p, q), заданные на пространстве $\boldsymbol{V}_n$, можно рассматривать как векторы пространства $\boldsymbol{T}$, являющегося тензорным произведением q пространств $\boldsymbol{V}_n$ и p сопряженных пространств $\boldsymbol{V}^*_n$. Для этого берем базис $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ в $\boldsymbol{V}_n$ и сопряженный базис $\boldsymbol{e}^1, \boldsymbol{e}^2, \ldots, \boldsymbol{e}^n$ в $\boldsymbol{V}^*_n$. Тогда упорядоченные системы

$$\boldsymbol{e}_{j_1}\boldsymbol{e}_{j_2}\ldots\boldsymbol{e}_{j_q}\boldsymbol{e}^{i_1}\boldsymbol{e}^{i_2}\ldots\boldsymbol{e}^{i_p}, \tag{20}$$

где все индексы изменяются от 1 до p, составляют базис пространства $\boldsymbol{T}$. Вектор $\boldsymbol{t}$ из $\boldsymbol{T}$ выражается через этот базис в виде

$$\boldsymbol{t} = a^{j_1 j_2 \ldots j_q}_{i_1 i_2 \ldots i_p}\boldsymbol{e}_{j_1}\boldsymbol{e}_{j_2}\ldots\boldsymbol{e}_{j_q}\boldsymbol{e}^{i_1}\boldsymbol{e}^{i_2}\ldots\boldsymbol{e}^{i_p}.$$

Его координаты, т. е. числа $a^{j_1 j_2 \ldots j_q}_{i_1 i_2 \ldots i_p}$, будут координатами тензора типа (p, q) в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ в смысле первого определения тензора.

1900. Доказать, что для любого базиса $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ n-мерного линейного пространства $\boldsymbol{V}_n$ существует единственный сопряженный базис $\boldsymbol{e}^1, \ldots, \boldsymbol{e}^n$ сопряженного пространства $\boldsymbol{V}^*_n$, т. е. базис, связанный с данным базисом условиями $\boldsymbol{e}^j(\boldsymbol{e}_i) = \delta^j_i$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$, где δ^j_i — символ Кронекера.

1901. Линейная функция $\varphi(\boldsymbol{x})$ на n-мерном линейном пространстве $\boldsymbol{V}_n$ является ковариантным тензором, т. е. тензором типа (1,0).

а) Найти его координаты a_i в данном базисе $\boldsymbol{e}_i$.

б) Показать, что числа a_i являются координатами $\varphi(\boldsymbol{x})$ как вектора сопряженного пространства $\boldsymbol{V}^*_n$ в базисе $\boldsymbol{e}^i$, сопряженном базису $\boldsymbol{e}_i$ пространства $\boldsymbol{V}_n$.

1902. Координаты вектора $\boldsymbol{x}$ в данном базисе n-мерного линейного пространства $\boldsymbol{V}_n$ определяют контравариантный тензор, т. е. тензор типа (0,1). Записать этот тензор в виде полилинейной функции.

1903. Пусть $\varphi(\boldsymbol{x}) = a_1x^1 + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ — линейная форма от координат вектора $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V}_n$ в базисе $\boldsymbol{e}_i$. Показать, что коэффициенты a_ia_j $(i, j = 1, 2, \dots, n)$ квадрата этой формы дают дважды ковариантный тензор.

1904. Назовем *матрицей дважды ковариантного тензора* a_{ij} в данном базисе матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Найти закон изменения матрицы A при переходе к новому базису.

1905. Назовем *матрицей дважды контравариантного тензора* a^{ij} в данном базисе матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a^{11} & a^{12} & \dots & a^{1n} \\ a^{21} & a^{22} & \dots & a^{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a^{n1} & a^{n2} & \dots & a^{nn} \end{pmatrix}.$$

Найти закон изменения матрицы A при переходе к новому базису.

1906. Пусть a_i^j — тензор типа $(1, 1)$ в n-мерном линейном пространстве $\boldsymbol{V}_n$. Считая i номером столбца, а j — номером строки, получим матрицу из координат этого тензора

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_n^n \end{pmatrix}.$$

Найти закон изменения матрицы A при переходе к новому базису.

1907. а) Показать, что символ Кронекера δ_i^j дает во всех базисах n-мерного линейного пространства тензор типа $(1, 1)$. б) Записать этот тензор в виде полилинейной функции.

1908*. Пусть a_{ij} — дважды ковариантный тензор в n-мерном пространстве. Доказать, что:

а) если матрица A тензора a_{ij} в одном базисе невырожденна, то она и в любом базисе невырожденна;

б) элементы a^{ij} матрицы, обратной для матрицы A тензора a_{ij} (в случае, когда A невырожденна), образуют дважды контравариантный тензор.

1909. Пусть $A\boldsymbol{x}$ — линейное преобразование и $\varphi(\boldsymbol{x})$ — линейная функция на n-мерном линейном пространстве $\boldsymbol{V}_n$. Показать, что функция

$F(\boldsymbol{x}; \varphi) = \varphi(A\boldsymbol{x})$ есть тензор типа $(1, 1)$, матрица которого в любом базисе совпадает с матрицей линейного преобразования $A\boldsymbol{x}$ в том же базисе.

1910. Доказать, что элементы матрицы билинейной функции $F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ в n-мерном линейном пространстве образуют тензор типа $(2, 0)$, т. е. дважды ковариантный.

1911. Доказать, что элементы матрицы линейного преобразования в данном базисе образуют тензор типа $(1, 1)$.

1912. Пусть в n-мерном линейном пространстве $\boldsymbol{V}_n$ даны p векторов $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_p$. Выпишем координаты этих векторов в некотором базисе по строкам матрицы

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \ldots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \ldots & a_2^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_p^1 & a_p^2 & \ldots & a_p^n \end{pmatrix}.$$

а) Показать, что числа

$$a^{i_1 i_2 \ldots i_p} = \begin{vmatrix} a_1^{i_1} & a_1^{i_2} & \ldots & a_1^{i_p} \\ a_2^{i_1} & a_2^{i_2} & \ldots & a_2^{i_p} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_p^{i_1} & a_p^{i_2} & \ldots & a_p^{i_p} \end{vmatrix} \qquad (i_1, i_2, \ldots i_p = 1, 2, \ldots, n)$$

являются координатами p раз контравариантного тензора, т. е. тензора типа $(0, p)$ в данном базисе. Этот тензор называется *p-вектором* (при $p = 1$ — *вектор*, при $p = 2$ — *бивектор*).

б) Доказать, что p-вектор тогда и только тогда равен нулю, когда данные векторы $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_p$ линейно зависимы (в частности, при $p > n$ все p-векторы равны нулю).

в) Доказать, что две линейно независимые системы из p-векторов каждая тогда и только тогда эквивалентны, когда соответствующие им p-векторы различаются множителем, отличным от нуля.

г) Показать, что если понимать под тензорами полилинейные функции (см. введение к этому параграфу), то p-вектор, заданный векторами $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_p$ пространства $\boldsymbol{V}_n$, можно определить как полилинейную функцию от p-векторов $\varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^p$ сопряженного пространства $\boldsymbol{V}_n^*$, заданную равенством

$$F(\varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^p) = \begin{vmatrix} \varphi^1(\boldsymbol{x}_1) & \varphi^2(\boldsymbol{x}_1) & \ldots & \varphi^p(\boldsymbol{x}_1) \\ \varphi^1(\boldsymbol{x}_2) & \varphi^2(\boldsymbol{x}_2) & \ldots & \varphi^p(\boldsymbol{x}_2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi^1(\boldsymbol{x}_p) & \varphi^2(\boldsymbol{x}_p) & \ldots & \varphi^p(\boldsymbol{x}_p) \end{vmatrix}.$$

1913. Выяснить, как изменяются координаты тензора типа (p,q) при переходе от базиса $\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n$ к базису $\boldsymbol{e}'_1,\ldots,\boldsymbol{e}'_n$, полученному из предыдущего путем данной подстановки $\pi(i)=k_i$ $(i=1,2,\ldots,n)$; это значит, что $\boldsymbol{e}'_i=\boldsymbol{e}_{\pi(i)}$ $(i=1,2,\ldots,n)$.

1914. Найти координаты в данном базисе $\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n$ тензора типа (n,n), заданного равенством

$$F(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n;\,\varphi^1,\ldots,\varphi^n)=\begin{vmatrix}\varphi^1(\boldsymbol{x}_1) & \varphi^2(\boldsymbol{x}_1) & \ldots & \varphi^n(\boldsymbol{x}_1)\\ \varphi^1(\boldsymbol{x}_2) & \varphi^2(\boldsymbol{x}_2) & \ldots & \varphi^n(\boldsymbol{x}_2)\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \varphi^1(\boldsymbol{x}_n) & \varphi^2(\boldsymbol{x}_n) & \ldots & \varphi^n(\boldsymbol{x}_n)\end{vmatrix}.$$

1915. Пусть $F(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n;\,\varphi^1,\ldots,\varphi^n)$ — полилинейная функция, кососимметрическая как по аргументам $\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n$, так и по аргументам $\varphi^1,\ldots,\varphi^n$. Доказать, что ее значения через координаты в данном базисе выражаются формулой

$$F(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n;\,\varphi^1,\ldots,\varphi^n)=\det(\boldsymbol{x})\det(\varphi)\cdot F(\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n;\,\boldsymbol{e}^1,\ldots,\boldsymbol{e}^n),$$

где $\boldsymbol{e}^i$ — базис, сопряженный базису e_i, $\det(\boldsymbol{x})$ — определитель из координат векторов $\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n$ в базисе $\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n$ и $\det(\varphi)$ — определитель из координат векторов $\varphi^1,\ldots,\varphi^n$ в базисе $\boldsymbol{e}^1,\ldots,\boldsymbol{e}^n$.

1916. Пусть дан тензор типа (p,q) в виде полилинейной функции $F(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_p;\,\varphi^1,\ldots,\varphi^q)$. Его *сверткой* по номерам $k\leqslant p$, $l\leqslant q$ называется сумма

$$\sum_{i=1}^{n}F(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_{k-1},\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{x}_{k+1},\ldots,\boldsymbol{x}_p;\,\varphi^1,\ldots,\varphi^{l-1},\boldsymbol{e}^l,\varphi^{l+1},\ldots,\varphi^q).$$

Показать, что свертка не зависит от базиса и является тензором типа $(p-1,q-1)$. Предполагается, что $p,q>0$.

1917. Даны симметрический тензор a_{ij} и кососимметрический тензор b^{ij}. Найти их полную свертку $a_{ij}b^{ij}$.

1918*. Для изучения тензорного произведения (см. введение к этому параграфу) удобно использовать понятие свертки в следующем смысле. Для простоты рассмотрим тензорное произведение двух линейных пространств: $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{V}'$, где $\boldsymbol{V}$ и $\boldsymbol{V}'$ — линейные пространства над одним и тем же полем P.

Сверткой суммы $\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}'_1+\cdots+\boldsymbol{x}_k\boldsymbol{x}'_k$, где $\boldsymbol{x}_i\in\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{x}'_i\in\boldsymbol{V}'$ $(i=1,2,\ldots,k)$, с вектором φ пространства $\boldsymbol{V}^*$, сопряженного пространству $\boldsymbol{V}$, называется вектор $\alpha_1\boldsymbol{x}'_1+\cdots+\alpha_k\boldsymbol{x}'_k\in\boldsymbol{V}'$, где $\alpha_i=\varphi(\boldsymbol{x}_i)\in P$ $(i=1,2,\ldots,k)$. Аналогично определяется свертка той же суммы с вектором $\varphi'\in\boldsymbol{V}'^*$; она является вектором из $\boldsymbol{V}$.

а) Доказать, что если две суммы указанного выше вида эквивалентны, то их свертки равны. Это позволяет определить свертку $\varphi(\boldsymbol{t})\in\boldsymbol{V}'$ для $\boldsymbol{t}\in\boldsymbol{T}$, $\varphi\in\boldsymbol{V}^*$.

б) Для того чтобы пара $\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}'$ была эквивалентна паре $\mathbf{0}\mathbf{0}'$, где $\mathbf{0}$ и $\mathbf{0}'$ — нулевые векторы соответственно из $\boldsymbol{V}$ и $\boldsymbol{V}'$, необходимо и достаточно выполнение по крайней мере одного из условий $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{x}' = \mathbf{0}'$.

в) Если $\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_1' + \dots + \boldsymbol{x}_k\boldsymbol{x}_k' \sim \mathbf{0}\mathbf{0}'$ и векторы $\boldsymbol{x}_1', \dots, \boldsymbol{x}_k'$ линейно независимы, то

$$\boldsymbol{x}_1 = \ldots = \boldsymbol{x}_k = \mathbf{0}.$$

г) Классы эквивалентных сумм, содержащие пары $\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j'$ $(i = 1, 2, \dots, n;\ j = 1, 2, \dots, n')$, где $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n$ — базис $\boldsymbol{V}$ и $\boldsymbol{e}_1', \dots, \boldsymbol{e}_{n'}'$ — базис $\boldsymbol{V}'$, образуют базис $\boldsymbol{T}$.

1919. Доказать, что тензорные произведения линейных пространств всех многочленов от x и всех многочленов от y с коэффициентами из поля P есть пространство всех многочленов от двух неизвестных x, y с коэффициентами из P.

1920. Доказать, что тензорное произведение пространства многочленов $f(x)$ степени $\leqslant n$ и пространства многочленов $g(y)$ степени $\leqslant s$ с коэффициентами из поля P есть пространство многочленов $h(x, y)$, степень которых $\leqslant n$ по x и $\leqslant s$ по y, с коэффициентами из поля P.

1921. Доказать утверждения:

а) для любого базиса $\boldsymbol{e}_i$ n-мерного евклидова пространства $\boldsymbol{E}_n$ (или пространства с квадратичной метрикой $\boldsymbol{M}_n$) существует единственный взаимный базис $\boldsymbol{e}^i$ пространства $\boldsymbol{E}_n$ (соответственно $\boldsymbol{M}_n$), связанный с данным базисом равенствами $(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}^j) = \delta_i^j$ $(i, j = 1, 2, \dots, n)$ (соответственно равенствами (8) из введения к этому параграфу);

б) взаимный базис выражается через данный базис по формулам $\boldsymbol{e}^i = g^{i\alpha}\boldsymbol{e}_\alpha$ $(i = 1, 2, \dots, n)$;

в) данный базис выражается через взаимный по формулам $\boldsymbol{e}_i = g_{i\alpha}\boldsymbol{e}^\alpha$ $(i = 1, 2, \dots, n)$;

г) метрические тензоры g_{ij} и g^{ij} связаны равенствами $g_{i\alpha}g^{j\alpha} = \delta_i^j$ $(i, j = 1, 2, \dots, n)$;

д) если обозначить матрицы метрических тензоров через $G = (g_{ij})_1^n$ и $G_1 = (g^{ij})_1^n$, а определители этих матриц — через $g = |g_{ij}|_1^n$ и $g_1 = |g^{ij}|_1^n$, то $GG_1 = E$, $gg_1 = 1$.

1922. Доказать, что ковариантные и контравариантные координаты одного и того же вектора в данном базисе евклидова пространства связаны равенствами:

а) $x_i = g_{i\alpha}x^\alpha$ $(i = 1, 2, \dots, n)$;

б) $x^i = g^{i\alpha}x_\alpha$ $(i = 1, 2, \dots, n)$.

1923. В прямоугольной декартовой системе координат даны два вектора

$$\boldsymbol{e}_1 = (1, 0),\ \ \boldsymbol{e}_2 = (\cos\alpha, \sin\alpha),\ \ \sin\alpha \neq 0;$$

а) проверить, что эти векторы образуют базис;

б) найти ковариантный метрический тензор g_{ij} в базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_1$;

в) найти контравариантный метрический тензор g^{ij} в базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$;

г) найти выражение векторов взаимного базиса $\boldsymbol{e}^1$, $\boldsymbol{e}^2$ через базис $\boldsymbol{e}_1$, e_2 и их координаты в исходной прямоугольной системе;

д) написать выражение скалярного произведения $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ двух векторов через их координаты в базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$;

е) найти дискриминантный тензор ε_{ij} в базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$;

ж) написать выражение ориентированной площади параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$, через дискриминантный тензор ε_{ij} и через определитель из координат в базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$.

1924*. Пусть $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ — любой базис плоскости, g^{ij} — контравариантный метрический тензор и ε_{ij} — дискриминантный тензор в этом базисе. По данному вектору $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^i\boldsymbol{e}_i$ построен вектор $\boldsymbol{y} = y^i\boldsymbol{e}_i$, где $y^i = g^{ij}\varepsilon_{jk}x^k$. Выяснить, в какой мере вектор $\boldsymbol{y}$ зависит от выбора базиса и какова геометрическая связь векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$.

1925. В четырехмерном евклидовом пространстве дан дважды контравариантный тензор a^{kl}. Как изменяются с изменением базиса величины $b_{ij} = \varepsilon_{ijkl}a^{kl}$ $(i, j = 1, 2, 3, 4)$?

1926*. Пусть в некотором базисе n-мерного евклидова пространства $\boldsymbol{E}_n$ дан тензор a_{ijk} типа $(3, 0)$, g_{ij} и g^{ij} — метрические тензоры. Определим тензор a_k^{ij} типа (1,2) равенствами: $a_k^{ij} = g^{i\alpha}g^{j\beta}a_{\alpha\beta k}$ $(i, j, k = 1, 2, \ldots, n)$. Выразить a_{ijk} через a_k^{ij}.

1927. Трехмерное евклидово пространство определено метрическим тензором с матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 10 & 1 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$. Найти длины отрезков, отсекаемых на осях координат плоскостью $\frac{x^1}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{5} = 1$.

1928*. Метрика трехмерного евклидова пространства задана метрическим тензором g_{ij} с матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Найти площадь S треугольника с вершинами $A(1, 0, 1)$, $B(2, 1, 1)$, $C(3, 1, 2)$ и высоту h, опущенную из C на AB, если координаты и тензор даны в одном и том же базисе.

1929*. Трехмерное евклидово пространство задано метрическим тензором g_{ij} с матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$. Найти основание перпендикуляра PQ, опущенного из точки $P(1, -1, 2)$ на плоскость $x^1 + x^2 + 2x^3 + 2 = 0$.

1930*. В четырехмерном евклидовом пространстве $\boldsymbol{E}_4$ даны три вектора $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ и построен вектор $\boldsymbol{u}$ с ковариантными координатами $u_i = \varepsilon_{ijkl} x^j y^k z^l$ $(i = 1, 2, 3, 4)$, где ε_{ijkl} — дискриминантный тензор в том же базисе (четырехмерный аналог векторного произведения см. задачу 1938). Доказать, что:

а) вектор $\boldsymbol{u}$ ортогонален каждому из векторов $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$;

б) если векторы $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ линейно независимы, то длина $|\boldsymbol{u}|$ вектора $\boldsymbol{u}$ равна трехмерному объему $V(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ параллелепипеда, построенного на $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$; если же $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ линейно зависимы, то $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$.

1931. Найти полную свертку $g_{ij} g^{ij}$ метрических тензоров n-мерного евклидова пространства $\boldsymbol{E}_n$.

1932. Определим контравариантный дискриминантный тензор n-мерного евклидова пространства $\boldsymbol{E}_n$ формулами $\varepsilon^{i_1 i_2 \dots i_n} = (-1)^s \sqrt{g_1}$, где $g_1 = |g^{ij}|_1^n$ и s — число инверсий в перестановке $i_1, i_2, \dots, i_n$, и $\varepsilon^{i_1 i_2 \dots i_n} = 0$, если хотя бы два из индексов $i_1, i_2, \dots, i_n$ совпадают. Доказать, что:

а) ориентированный объем параллелепипеда, построенного на векторах $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_n$ (см. введение к этому параграфу), выражается равенствами

$$\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_n) = \sqrt{g_1} \det\nolimits_1(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_n) = \varepsilon^{i_1, i_2, \dots, i_n} x^1_{i_1} x^2_{i_2} \dots x^n_{i_n},$$

где $\det_1(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_n)$ — определитель из ковариантных координат векторов $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_n$ и x^s_i — i-я ковариантная координата вектора $\boldsymbol{x}_s$;

б) $\varepsilon^{i_1, i_2, \dots, i_n} = g^{i_1 \alpha_1} g^{i_2 \alpha_2} \dots g^{i_n \alpha_n} \varepsilon_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}$;

в) $\varepsilon_{i_1, i_2, \dots, i_n} = g_{i_1 \alpha_1} g_{i_2 \alpha_2} \dots g_{i_n \alpha_n} \varepsilon^{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}$.

1933. Вычислить свертку дискриминантных тензоров $\varepsilon_{ijk} \varepsilon^{ijk}$ трехмерного евклидова пространства.

1934. В базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ трехмерного действительного пространства дан ковариантный метрический тензор g^{ij} с матрицей

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

а) Проверить, что пространство евклидово;

б) найти матрицу G_1 контравариантного метрического тензора g^{ij};

в) найти контравариантные координаты единичного вектора нормали к плоскости, заданной в том же базисе уравнением $3x^1 + 2x^2 - 3x^3 - 5 = 0$.

1935*. Доказать, что квадрат ориентированного объема параллелепипеда, построенного на n векторах n-мерного евклидова пространства, равен определителю Грама этих векторов.

1936. Пусть в n-мерном евклидовом пространстве даны гиперплоскость $\boldsymbol{\pi}$, заданная уравнением $a_1x^1+\dots+a_nx^n+b=0$, и точка $M(x_0^1,\dots,x_0^n)$.

а) Показать, что вектор $\boldsymbol{p}$ с ковариантными координатами $a_1,\dots,a_n$ перпендикулярен к плоскости $\boldsymbol{\pi}$;

б) расстояние d от точки M до плоскости $\boldsymbol{\pi}$ выражается формулой

$$d=\frac{|a_1x_0^1+\dots+a_nx_0^n+b|}{|p|}.$$

1937*. Найти расстояние от точки $M(x_0,y_0)$ на евклидовой плоскости до прямой $ax+by+c=0$, если координаты даны в базисе

$$\boldsymbol{e}_1=\{1,0\},\quad \boldsymbol{e}_2=\{\cos\omega,\sin\omega\},\quad \sin\omega\neq 0$$

(координаты векторов базиса даны в прямоугольной декартовой системе координат).

1938*. Пусть ε_{ijk} — дискриминантный тензор трехмерного евклидова пространства, x^i,y^i — контравариантные координаты векторов $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ в некотором базисе. Доказать, что вектор $\boldsymbol{z}$, ковариантные координаты которого в том же базисе заданы формулами $z_i=\varepsilon_{i\alpha\beta}x^\alpha y^\beta$ $(i=1,2,3)$, является векторным произведением $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$.

Ответы

Отдел 1. Определители

1. 1. **2.** -2. **3.** -1. **4.** 0. **5.** 0. **6.** -1. **7.** $4ab$. **8.** $-2b^3$. **9.** 1.
10. $\sin(\alpha-\beta)$. **11.** $\cos(\alpha+\beta)$. **12.** 0. **13.** 1. **14.** 1. **15.** -1. **16.** 1. **17.** 0.
18. $ab-c^2-d^2$. **19.** $(a-b)^2$. **20.** 0. **21.** $a^2+b^2+c^2+d^2$. **22.** $x=3$; $y=-1$.
23. $x=5$; $y=2$. **24.** $x=\frac{2}{3}$; $y=\frac{1}{3}$. **25.** $x=2$; $y=-3$.
26. $x=\cos(\beta-\alpha)$; $y=\sin(\beta-\alpha)$. **27.** $x=\cos\alpha\cos\beta$; $y=\cos\alpha\sin\beta$.

28. Система неопределенна, формулы Крамера не дают верного ответа, так как по этим формулам x и y равны $0/0$, т.е. могут принимать произвольные значения, тогда как они связаны соотношением $2x+3y=1$, откуда по значению одного неизвестного определяется единственное значение другого.

29. Система противоречива.

30. При $a\neq b$ уравнение определенно, при $a=b\neq c$ — противоречиво, при $a=b=c$ — неопределенно.

31. При $\alpha=k\pi$, где k — целое число, уравнение противоречиво, при остальных значениях α — определенно.

32. При $\alpha=2k\pi$, где k — целое число, уравнение противоречиво, при $\alpha=(2k+1)\pi$ — неопределенно, при остальных значениях α — определенно.

33. При $\alpha+\beta\neq k\pi$, где k — целое число, уравнение определенно, при $\alpha+\beta=2k\pi$ и при $\alpha+\beta=(2k_1+1)\pi$, $\alpha=k_2\pi$, где k_1 и k_2 — целые числа, — неопределенно, при $\alpha+\beta=(2k_1+1)\pi$, $\alpha\neq k_2\pi$ — противоречиво.

34. При $a\neq 0$ система определенна, при $a=b=0$ неопределенна, при $a=0\neq b$ — противоречива.

35. При $ac-b^2\neq 0$ система определенна, при $ac-b^2=0$ — неопределенна. Противоречивой она быть не может.

36. При $a\neq\pm 6$ система определенна, при $a=6$ — неопределенна, при $a=-6$ — противоречива.

37. При $ab\neq 90$ система определенна, при $a=6$, $b=15$ — неопределенна, при $ab=90$, но $a\neq 6$, $b\neq 15$ — противоречива.

39. Указание. Убедиться, что в формуле решений квадратного уравнения подкоренное выражение положительно.

40. Решение. Пусть данный трехчлен является полным квадратом, т.е. $ax^2+2bx+c=(px+q)^2$. Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, находим $a=p^2$, $b=pq$, $c=q^2$, откуда $ac-b^2=p^2q^2-(pq)^2=0$. Пусть, обратно, $ac-b^2=0$. Тогда

$$ax^2+2bx+c=\frac{1}{a}(a^2x^2+2abx+ac)=\frac{1}{a}[(ax+b)^2+(ac-b^2)]=\frac{1}{a}(ax+b)^2$$

есть полный квадрат, так как из комплексного числа $1/a$ можно извлечь квадратный корень.

42. Решение. Если $\dfrac{ax+b}{cx+d} = q$ при любом x, то $ax+b = q(cx+d)$, $a = qc$, $b = qd$ и $ad - bc = 0$. Обратно, если $ad - bc = 0$, то при $c \neq 0 \neq d$ имеем $\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d} = q$, $a = qc$, $b = qd$. При $c = 0 \neq d$ будет $a = 0$ и, полагая $q = \dfrac{b}{d}$, снова имеем $a = qc$, $b = qd$. При $c \neq 0 = d$ получим то же самое, полагая $q = \dfrac{a}{c}$. Поэтому $\dfrac{ax+b}{cx+d} = \dfrac{q(cx+d)}{cx+d} = q$ при любых x.

43. 40. **44.** -3. **45.** 100. **46.** -5. **47.** 0. **48.** 1. **49.** 1. **50.** 2. **51.** 4. **52.** -8.

53. 6. **54.** 20. **55.** 0. **56.** $3abc - a^3 - b^3 - c^3$. **57.** $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$. **58.** 0. **59.** $2x^3 - (a+b+c)x^2 + abc$. **60.** $(ab+bc+ca)x + abc$. **61.** $1 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$. **62.** 1. **63.** $\sin(\beta-\gamma) + \sin(\gamma-\alpha) + \sin(\alpha-\beta)$. **64.** $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$. **66.** -2. **67.** $xyz + 2(ace - bcf + adf + bde) - x(e^2+f^2) - y(c^2+d^2) - z(a^2+b^2)$. **68.** 0. **69.** -3. **70.** $3i\sqrt{3}$.

72. 4. Указание. Все шесть членов определителя не могут равняться $+1$, так как тогда произведение трех членов: $a_{11}a_{22}a_{33}$, $a_{12}a_{23}a_{31}$, $a_{13}a_{21}a_{32}$ было бы равно произведению трех остальных членов, в то время как первое из этих произведений равно произведению всех девяти элементов определителя, а второе — тому же произведению девяти элементов с противоположным знаком. Далее, убедиться, что определитель отличен от 5 и что

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4.$$

73. Указание. Показать, что все три положительных члена входящих в определитель, не могут равняться 1, и учесть, что

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2.$$

74. $x = 3$, $y = -2$, $z = 2$. **75.** $x = y = z = 1$. **76.** $x = 1$, $y = 2$, $z = -1$.
77. $x = 2$, $y = -3$, $z = -2$.
78. $x = -a$, $y = b$, $z = c$. Указание. Положить $\dfrac{x}{a} = x'$; $\dfrac{y}{b} = y'$; $\dfrac{z}{c} = z'$.
79. $x = bc$, $y = ac$, $z = ab$.
80. $x = a$, $y = 2b$, $z = 3c$. Указание. Каждое из уравнений разделить на abc и положить $\dfrac{x}{a} = x'$, $\dfrac{y}{b} = y'$, $\dfrac{z}{c} = z'$.
81. $x = \dfrac{a+b+c}{3}$; $y = \dfrac{a+b\varepsilon^2+c\varepsilon}{3}$; $z = \dfrac{a+b\varepsilon+c\varepsilon^2}{3}$.

Указание. Эту систему можно решать по формулам Крамера. Проще сначала сложить все уравнения, затем сложить после умножения второго уравнения на ε^2, а третьего на ε, и, наконец, сложить после умножения второго уравнения на ε, а третьего на ε^2. Использовать соотношение $1 + \varepsilon + \varepsilon^2 = 0$.

82. Система неопределенна, так как третье уравнение есть сумма двух остальных и, значит, любое решение двух первых уравнений удовлетворяет и третьему. Первые два уравнения имеют бесконечно много решений, например x и y выражаются через z так: $x = 10z + 1$, $y = 7z$. Давая z произвольное значение, найдем значения x и y.

83. Система неопределенна.

84. Система противоречива, так как, если бы при некоторых числовых значениях неизвестных все уравнения системы обращались в равенство, то, вычитая первое равенство из суммы двух остальных, мы получили бы снова равенство. Но получается $0 = 4$.

85. Система противоречива.

86. При $a^3 \neq 27$ система определенна, при $a^3 = 27$ противоречива.

87. При $4a^3 - 45a + 58 \neq 0$ система определенна, при $4a^3 - 45a + 58 = 0$ противоречива.

88. При $ab \neq 15$ система определенна, при $a = 3$, $b = 5$ неопределенна, при $ab = 15$, но $a \neq 3$, $b \neq 5$ противоречива.

89. При $ab \neq 12$ система определенна, при $a = 3$, $b = 4$ неопределенна, при $ab = 12$, но $a \neq 3$, $b \neq 4$ противоречива.

99. Указание. Рассмотреть определитель, в котором первые две строки не пропорциональны (в частности, ни одна из этих строк не должна содержать только нули), а третья строка равна сумме первых двух, т. е. каждый ее элемент равен сумме соответствующих элементов первых двух строк.

100. 0. **101.** 0. **102.** 0. **103.** 0. **104.** 0. **105.** 0. **106.** 0. **107.** 0. **108.** 0.

109. 0. Две точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) плоскости лежат на одной прямой с точкой, делящей отрезок между ними в данном отношении λ.

110. 0. Указание. К первой строке прибавить вторую и третью и воспользоваться формулой Виета.

120. Указание. К третьему столбцу определителя, стоящего в левой части равенства, прибавить второй, умноженный на $a + b + c$, и вычесть первый, умноженный на $ab + bc + ca$.

123. 5. **124.** 8. **125.** 13. **126.** 18. **127.** $\frac{n(n-1)}{2}$. **128.** $\frac{n(n+1)}{2}$.

129. $\frac{3n(n-1)}{2}$ инверсий. Перестановка четна при n, равном $4k, 4k+1$, и нечетна при n, равном $4k + 2$, $4k + 3$, где k — любое целое неотрицательное число.

130. $\frac{3n(n+1)}{2}$ инверсий. Перестановка четна при $n = 4k, 4k+3$ и нечетна при $n = 4k + 1, 4k + 2$, где k — любое целое неотрицательное число.

131. $\frac{n(3n+1)}{2}$ инверсий. Перестановка четна при $n = 4k, 4k+1$ и нечетна при $n = 4k + 2, 4k + 3$, где k — любое целое неотрицательное число.

132. $\frac{n(3n-1)}{2}$ инверсий. Перестановка четна при $n = 4k, 4k+3$ и нечетна при $n = 4k + 1, 4k + 2$, где k — любое целое неотрицательное число.

133. $3n(n - 1)$ инверсий. Перестановка четна при любом n.

134. $n(3n - 2)$ инверсий. Четность перестановки совпадает с четностью n.

135. $n(5n + 1)$ инверсий. Перестановка четна при любом n.

136. В перестановке $n, n-1, n-2, \ldots, 3, 2, 1$. Число инверсий в ней равно $C_n^2 = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

137. $k-1$. **138.** $n-k$. **139.** C_n^2.

140. Для $n = 4k, 4k+1$ одинакова, а для $n = 4k+2, 4k+3$ противоположна. Здесь k — любое целое неотрицательное число.

141. Решение. Берем два любых элемента a_i, a_j в данной перестановке $(i < j)$.

Если в данной перестановке эти элементы образуют порядок, то и в исходном расположении a_i стоит раньше a_j, и индексы i, j будут образовывать порядок. Если же в данной перестановке элементы a_i, a_j образуют инверсию, то в исходном расположении a_j стоит раньше a_i, поэтому их индексы j, i также образуют инверсию.

Поэтому инверсии данной перестановки взаимно однозначно соответствуют инверсиям перестановки индексов элементов при нормальном расположении этих элементов, и, значит, число тех и других инверсий одинаково.

142. Указание. В перестановке $a_1, a_2, \ldots, a_n$ элемент b_1 переводим на первое место, в полученной перестановке b_2 переводим на второе место и т. д.

143. Например: $2, 3, 4, \ldots, n, 1$ или $n, 1, 2, \ldots, n-1$. Указание. При доказательстве использовать то, что одна транспозиция может уменьшить число элементов, стоящих в перестановке правее (левее) их места в нормальном расположении, не более чем на единицу.

144. Указание. В перестановке $a_1, a_2, \ldots, a_n$ элемент b_1 смежными транспозициями перевести на первое место, в полученной перестановке элемент b_2 смежными транспозициями перевести на второе место и т. д.

145. $C_n^2 - k$.

146. $\frac{1}{2} n! C_n^2$. Указание. Воспользоваться предыдущей задачей.

147. Указание. Смежными транспозициями перевести 1 на первое место, затем 2 на второе место и т. д. Учесть, что одна смежная транспозиция изменяет число инверсий на единицу.

148. Указание. Рассмотреть ряд перестановок, начинающийся с перестановки $1, 2, \ldots, n$, полученный следующим рядом транспозиций: сначала единицу переводим на последнее место, переставляя ее с каждым числом справа, затем двойку тем же путем переставляем на предпоследнее место и т. д., пока не придем к перестановке $n, n-1, \ldots, 2, 1$.

Утверждение можно также доказать индукцией по числу k.

149. Решение. Для вывода рекуррентного соотношения заметим, что если в перестановке с k инверсиями число $n+1$ стоит на последнем месте, то все k инверсий образуются числами $1, 2, \ldots, n$, и таких перестановок будет (n, k); если $n+1$ стоит на предпоследнем месте, то оно образует одну инверсию, а числа $1, 2, \ldots, n$ образуют $k-1$ инверсий, и таких перестановок будет $(n, k-1)$, и т. д.; наконец, если $n+1$ стоит на первом месте, то оно образует n инверсий (это возможно лишь при $k \geqslant n$), а числа $1, 2, \ldots, n$ образуют $k-n$ инверсий, и таких перестановок будет $(n, k-n)$.

Располагая числа (n, k) в таблице по строкам с данным n и по столбцам с данным k, из рекуррентного соотношения видим, что каждое число $(n+1)$-й строки равно сумме $n+1$ чисел предыдущей строки, считая их влево от числа, стоящего над искомым числом (включая и числа, равные нулю). Выписывая для удобства отсчета мест также и нулевые значения (n, j) при $j > C_n^2$ и учитывая, что $(1,0) = 1$, $(1, j) = 0$ при $j \geqslant 1$, получаем таблицу значений (n, k):

n	k															
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	1	2	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	1	3	5	6	5	3	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	1	4	9	15	20	22	20	15	9	4	1	0	0	0	0	0
6	1	5	14	29	49	71	90	101	101	90	71	49	29	14	5	1

Например, число перестановок шести элементов с семью или восемью инверсиями равно 101.

150. Указание. Во всех перестановках заменить данное расположение на обратное.

151. (1 4 2) (3 5). Декремент равен 3. Подстановка нечетная.

152. (1 6 3) (2 5) (4). Подстановка нечетная.

153. (1 8 2) (3) (4 6 7) (5). Подстановка четная.

154. (1 5) (2 8 6 4) (3 9 7). Подстановка четная.

155. (1 2 3 4 5 6 7 8 9). Подстановка четная.

156. (1 4) (2 5) (3 6). Подстановка нечетная.

157. (1 2) (3 4) ... $(2n-1, 2n)$. Декремент равен n. Четность подстановки совпадает с четностью числа n.

158. (1 3) (2) (4 6) (5) ... $(3n-2, 3n)(3n-1)$. Декремент равен n. Четность подстановки совпадает с четностью числа n.

159. $(1, 3, 5, \ldots, 2n-1)(2, 4, 6 \ldots, 2n)$. Декремент равен $2n-2$. Подстановка четная.

160. (1 2 3) (4 5 6) ... $(3n-2, 3n-1, 3n)$. Декремент равен $2n$. Подстановка четная.

161. $(1, 4, 7, \ldots, 3n-2)$ $(2, 5, 8 \ldots, 3n-1)$ $(3, 6, 9, \ldots, 3n)$. Декремент равен $3n-3$. Четность подстановки противоположна четности числа n.

162. $(1, k+1, 2k+1, \ldots, nk-k+1)(2, k+2, 2k+2 \ldots, nk-k+2)$ $\ldots (k, 2k, 3k \ldots, nk)$. Декремент равен $nk-k$. Подстановка четная при четном k и при нечетных k и n. И нечетна при k нечетном и n четном.

163. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. **164.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

165. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 4 & 1 & 6 & 3 & 2 & 5 & 8 & 9 \end{pmatrix}$. **166.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & 2n-1 & 2n \\ 2 & 1 & 4 & 3 & \ldots & 2n & 2n-1 \end{pmatrix}$.

167. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & 2n-1 & 2n \\ 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots & 2n & 1 \end{pmatrix}$.

168. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots & 3n-2 & 3n-1 & 3n \\ 3 & 1 & 2 & 6 & 4 & 5 & \ldots & 3n & 3n-2 & 3n-1 \end{pmatrix}$.

169. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$. **170.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

171. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$. **172.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. **173.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

176. A. Указание. Воспользоваться предыдущей задачей.

177. Тождественная подстановка E.

178. $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

181. Указание. Расположить числа первой строки подстановки в возрастающем порядке и от тождественной подстановки перейти к данной путем ряда транспозиций во второй строке.

182. Указание. Для доказательства существования разложения на транспозиции в числе, равном декременту, умножить подстановку на транспозицию чисел, входящих в один цикл, и использовать задачу 180. Для доказательства минимальности числа транспозиций заметим, что при умножении на одну транспозицию декремент не может увеличиться больше чем на единицу.

183. Указание. Если $P = P_1P_2\ldots P_s$ — любое разложение подстановки P на транспозиции, то использовать равенство $P = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{pmatrix} \cdot P_1P_2\ldots P_s$ и задачи 179 и 182.

184. Решение. Если X — подстановка, перестановочная с S, то $SX = XS$, откуда $X^{-1}SX = S$. Разложим S на циклы $S = (1\ 2)(3\ 4) = X^{-1}(1\ 2)XX^{-1}(3\ 4)X$. Непосредственным вычислением убеждаемся, что $X^{-1}(1\ 2)X$ есть снова цикл длины 2, полученный из цикла $(1,2)$ заменой чисел 1 и 2 теми, которые им соответствуют в подстановке X. Это же верно и для цикла $(3\ 4)$. Таким образом, подстановка X должна переводить циклы из S в циклы той же длины, а в силу единственности разложения S на циклы, циклы либо переходят каждый в себя, либо один в другой. Так как каждый цикл длины два можно записать двумя способами: $(1\ 2) = (2\ 1)$, $(3\ 4) = (4\ 3)$, то все подстановки, перестановочные с S, будут:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

185. Искомые подстановки:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

186. Указание. Показать, что никакое из чисел $1, 2, \ldots, m-1$ не может перейти в нуль и разные числа переходят в разные.

187. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 1 & 6 & 2 & 7 & 3 & 8 & 4 \end{pmatrix}$.

188. Входит со знаком минус. **189.** Входит со знаком плюс.
190. Не является членом определителя. **191.** Входит со знаком минус.
192. Не является членом определителя. **193.** Со знаком $(-1)^{n-1}$.
194. Со знаком $(-1)^n$.
195. Со знаком $(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}$. **196.** Со знаком $(-1)^{3n} = (-1)^n$.
197. $i = 5$, $k = 1$. **198.** $i = 6$, $k = 2$.
199. $a_{11}a_{24}a_{32}a_{43} + a_{13}a_{21}a_{32}a_{44} + a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$. **200.** $10x^4 - 5x^3$.
201. Со знаком плюс. **202.** Со знаком $(-1)^{C_n^2}$. **203.** $a_{11}a_{22}a_{33}\ldots a_{nn}$.
204. $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot a_{1n}a_{2,n-1}\ldots a_{n1}$. **205.** 0.
207. Корнями будут числа $a_1, a_2, a_3 \ldots, a_n$. Указание. Использовать утверждение, что многочлен степени n не может иметь более чем n различных корней.
208. $x = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. **209.** $a_{n-k+1,n-i+1}$. **210.** $a_{n-i+1,n-k+1}$.
211. Если n четно, то число элементов на четных и нечетных местах одинаково и равно $\frac{1}{2}n^2$. Если n нечетно, то число элементов на четных местах равно $\frac{1}{2}(n^2+1)$, а на нечетных $-\frac{1}{2}(n^2-1)$.
212. Определитель умножится на $(-1)^{n-1}$.
213. Определитель умножится на $(-1)^{n(n-1)/2}$.
214. Определитель не изменится.
215. Определитель не изменится. Указание. Данное преобразование можно заменить двумя симметриями относительно горизонтальной и вертикальной средних линий и симметрией относительно главной диагонали.
216. Указание. Транспонировать определитель.
217. Указание. Транспонировать определитель.
218. $n = 4m$, где m — целое. **219.** $n = 4m + 2$, где m — целое.
221. Определитель умножится на $(-1)^n$.
222. Определитель не изменится. Указание. Рассмотреть общий член определителя.
223. Указание. Рассмотреть сумму индексов всех элементов, входящих в общий член определителя.
224. Указание. Воспользоваться предыдущей задачей.
229. Определитель обратится в нуль.
230. Определитель обратится в нуль, если он четного порядка, и удвоится, если нечетного. Указание. Разложить на сумму определителей по каждому столбцу.
231. Определитель умножится на $(-1)^{C_n^2}$.
232. Определитель равен нулю.
233. Число таких определителей равно $n!$. Их сумма равна нулю.
234. 0. **236.** $8a + 15b + 12c - 19d$. **237.** $2a - 8b + c + 5d$.

238. $abcd$. **239.** $abcd$. **240.** $xyzuv$. **243.** 0.

244. Указание. Умножить второй столбец определителя в левой части равенства на yz, третий столбец на xz и четвертый на xy.

245. Указание. Используя формулы Виета, преобразовать n-й столбец.

246. Указание. Используя формулы Виета, преобразовать n-й столбец и перенести его на $(i+1)$-е место.

247. Указание. Разложить по первому столбцу.

253. Указание. Разложить по третьей строке.

256. Указание. Свести к предыдущей задаче.

257. -8. **258.** -3. **259.** -9. **260.** 18. **261.** 18. **262.** 4. **263.** 90.

264. 27. **265.** 17. **266.** -6. **267.** -10. **268.** 100. **269.** 150. **270.** 52.

271. 5. **272.** 10. **273.** 1. **274.** 100. **275.** 1.

276. 1/35. Указание. Элементы каждой строки привести к общему знаменателю и вынести его за знак определителя.

277. 1. **278.** $9\sqrt{10}(\sqrt{3}-\sqrt{2})$. **279.** $n!$. **280.** $n(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

281. $x_1(x_2-a_{12})(x_3-a_{23})\ldots(x_n-a_{n-1,n})$. **282.** $(-1)^{n(n-1)/2}b_1b_2,\ldots,b_n$.

283. $2n+1$. **284.** $(a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n)x^n$.

285. $x_1x_2\ldots x_n\left(\frac{a_1}{x_1}+\frac{a_2}{x_2}+\cdots+\frac{a_n}{x_n}\right)$. Указание. Из i-го столбца вынести за знак определителя x_i и к каждому столбцу прибавить все следующие.

286. 1. **287.** $n(-1)^{n-1}$.

288. $(-1)^{n-1}(n-1)^{2n-2}$. Указание. Из каждой строки вычесть предыдущую, затем последний столбец прибавить к остальным.

289. $(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1)$. **290.** $(-1)^n(x-1)(x-2)\ldots(x-n)$.

291. $a_0(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)$.

292. $(x-a-b-c)(x-a+b+c)(x+a-b+c)(x+a+b-c)$.

293. $(x^2-1)(x^2-4)$.

294. x^2z^2. Указание. Переставив две первые строки и два первых столбца, доказать, что определитель не изменится при замене x на $-x$. Проверив, что при $x=0$ определитель обращается в нуль, доказать, что он делится на x^2. Те же рассуждения привести для z.

295. $a_1b_n\prod\limits_{i=1}^{n-1}(a_{i+1}b_i-a_ib_{i+1})$. Указание. Получить соотношение $D_n = \frac{b_b}{b_{n-1}}(a_nb_{n-1}-a_{n-1}b_n)D_{n-1}$.

296. $a_0x_1x_2x_3\ldots x_n+a_1y_1x_2x_3\ldots x_n+a_2y_1y_2x_3\ldots x_n+\cdots+a_ny_1y_2y_3\ldots y_n$. Указание. Получить соотношение $D_{n+1}=x_nD_n+a_ny_1y_2\ldots y_n$. Определитель можно вычислить иначе разложением по первой строке.

297. $-a_1a_2\ldots a_n\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)$.

298. $a_1a_2\ldots a_n-a_1a_2\ldots a_{n-1}+a_1a_2\ldots a_{n-2}-\cdots+(-1)^{n-1}a_1+(-1)^n$.

299. $n+1$. **300.** $2^{n+1}-1$. **301.** $\dfrac{5^{n+1}-2^{n+1}}{3}$. **302.** $9-2^{n+1}$. **303.** $5\cdot 2^{n-1}-4\cdot 3^{n-1}$.

304. $\dfrac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}$.

305. $x^n+(a_1+a_2+\dots+a_n)x^{n-1}$. Указание. Элементы, стоящие вне главной диагонали, представить в виде $a_i = 0 + a_i$.

306. $(x_1-a_1)(x_2-a_2)\dots(x_n-a_n)\left(1+\dfrac{a_1}{x_1-a_1}+\dfrac{a_2}{x_2-a_2}+\dots+\dfrac{a_n}{x_n-a_n}\right)$. Указание. Положить $x_i = (x_i - a_i) + a_i$.

307. $(a_1-x_1)(a_2-x_2)\dots(a_n-x_n)-a_1a_2\dots a_n$. Указание. Положить в левом верхнем углу $0 = 1 - 1$ и представить определитель в виде суммы двух определителей относительно первой строки.

308. $(x_i-a_1b_1)(x_2-a_2b_2)\dots(x_n-a_nb_n)\left(1+\dfrac{a_1b_1}{x_1}+\dfrac{a_2b_2}{x_2}+\dots+\dfrac{a_nb_n}{x_n}\right)$.

309. $(n-1)!$. **310.** $b_1b_2\dots b_n$. **311.** $(-1)^{\frac{n^2-n+2}{2}}2(n-2)!$. **312.** $(-1)^{n-1}n!$
313. $x^n+(-1)^{n+1}y^n$. **314.** 0. **315.** $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}(n+1)^{n-1}$. **316.** $(-1)^{n-1}(n-1)$.
317. $(2n-1)(n-1)^{n-1}$. **318.** $[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}$. **319.** 1. **320.** 1.
321. $(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)$. **322.** $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_n$.
323. $\dfrac{x^{n+1}-1}{(x-1)^2}-\dfrac{n+1}{x-1}$. **324.** $\dfrac{nx^n}{x-1}-\dfrac{x^n-1}{(x-1)^2}$. **325.** $\prod\limits_{k=1}^{n}(1-a_{kk}x)$.
326. $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}[a_0-a_1+a_2-\dots+(-1)^na_n]$. **327.** $(-1)^{n-1}(n-1)x^{n-2}$.

328. $1!2!3!\dots n! = 1^n2^{n-1}3^{n-2}\dots n$. **329.** $\prod\limits_{k=1}^{n}k!$. **330.** $\prod\limits_{n\geqslant i>k\geqslant 1}(x_i-x_k)$.

331. $\prod\limits_{1\leqslant i<k\leqslant n+1}(a_i-a_k)$. **332.** $2^{\frac{n(n-1)}{2}}\prod\limits_{n\geqslant i>k\geqslant 1}\cos\dfrac{\varphi_i+\varphi_k}{2}\sin\dfrac{\varphi_i-\varphi_k}{2}$.

333. $2^{\frac{n(n-1)}{2}}\prod\limits_{1\leqslant i<k\leqslant n}\sin\dfrac{\varphi_i+\varphi_k}{2}\sin\dfrac{\varphi_i-\varphi_k}{2}$. **334.** $\prod\limits_{n\geqslant i>k\geqslant 1}(x_i-x_k)$.

335. $2^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1,0}a_{2,0}\dots a_{n-1,0}\prod\limits_{1\leqslant i<k\leqslant n}\sin\dfrac{\varphi_i+\varphi_k}{2}\sin\dfrac{\varphi_i-\varphi_k}{2}$.

336. $\dfrac{1}{1!2!3!\dots(n-1)!}\prod\limits_{n\geqslant i>k\geqslant 1}(x_i-x_k)$. **337.** $(-1)^n1!2!\dots n!$

338. $\prod\limits_{i=1}^{n}\dfrac{x_i}{x_i-1}\prod\limits_{n\geqslant i>k\geqslant 1}(x_i-x_k)$. **339.** $1!3!5!\dots(2n-1)!$.

340. $\prod\limits_{1\leqslant i<k\leqslant n+1}(a_ib_k-a_kb_i)$. **341.** $\prod\limits_{1\leqslant i<k\leqslant n}\sin(a_i-a_k)$.

342. $a_1a_2\dots a_n \prod\limits_{1\leqslant i<k\leqslant n+1} (x_iy_k - x_ky_i)$, где a_i — коэффициент при x^i в многочлене $f_i(x,y)$.

343. $(-1)^{n-1}\prod\limits_{i=1}^{n} x_i \prod\limits_{n\geqslant i>k\geqslant 1} (x_i - x_k)\left[\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{a_i}{x_if'(x_i)}\right]$, где $f(x) = (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$. Указание. Разложить определитель по первому столбцу.

344. $(x_1+x_2+\dots+x_n) \prod\limits_{n\geqslant i>k\geqslant 1} (x_i - x_k)$. Указание. Определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \\ 1 & z & z^2 & \dots & z^n \end{vmatrix}$$

вычислить двумя способами: разложением по последней строке и как определитель Вандермонда. В обоих выражениях приравнять коэффициенты при z^{n-1}.

345. $x_1x_2\dots x_n\left(\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\dots\dfrac{1}{x_n}\right) \prod\limits_{n\geqslant i>k\geqslant 1} (x_i - x_k)$.

346. $\left(\sum x_{\alpha_1}x_{\alpha_2}\dots x_{\alpha_{n-s}}\right) \prod\limits_{n\geqslant i>k\geqslant 1} (x_i - x_k)$, где сумма берется по всем сочетаниям $n-s$ чисел $\alpha_1,\alpha_2\dots,\alpha_{n-s}$ из чисел $1,2,\dots,n$.

347. $[x_1x_2\dots x_n - (x_1-1)(x_2-1)\dots(x_n-1)] \prod\limits_{n\geqslant i>k\geqslant 1} (x_i - x_k)$. Указание. i-й элемент 1-го столбца представить в виде $1 = x_i - (x_1 - 1)$ и представить определитель в виде разности двух определителей.

348. $[2x_1x_2\dots x_n - (x_1-1)(x_2-1)\dots(x_n-1)] \prod\limits_{n\geqslant i>k\geqslant 1} (x_i - x_k)$. Указание. Приписать первую строку $1,0,0,\dots,0$ и первый столбец из единиц, первый столбец вычесть из остальных, единицу в левом верхнем углу представить в виде $2-1$ и представить определитель в виде разности двух определителей относительно первой строки.

349. $2^{(n-1)} \prod\limits_{1\leqslant i<k\leqslant n} \sin\dfrac{\varphi_i+\varphi_k}{2}\sin\dfrac{\varphi_i-\varphi_k}{2}$. Указание. Воспользоваться тем, что $\cos k\varphi$ выражается через $\cos\varphi$ в виде многочлена со старшим членом $2^{k-1}\cos^k\varphi$ (это можно вывести из формулы Муавра и равенства $1+C_k^2+C_k^4+\dots = 2^{k-1}$).

350. $2^{n(n-1)}\sin\varphi_1\sin\varphi_2\dots\sin\varphi_n \prod\limits_{1\leqslant i<k\leqslant n}\left(\sin\dfrac{\varphi_i+\varphi_k}{2}\cdot\sin\dfrac{\varphi_i-\varphi_k}{2}\right)$. Указание. Доказать, что $\sin k\varphi$ можно представить в виде произведения $\sin\varphi$ на многочлен от $\cos\varphi$ со старшим членом $2^{k-1}\cos^{k-1}\varphi$.

351. $(a+b+c+d)(a+b-c-d)(a-b+c-d)(a-b-c+d)$. Указание. Воспользоваться методом выделения линейных множителей.

352. $(a+b+c+d+e+f+g+h)(a+b+c+d-e-f-g-h)(a+b-c-d+e+f-g-h)\times(a+b-c-d-e-f+g+h)(a-b+c-d+e-f+g-h)(a-b+c-d-e+f-g+h)\times(a-b-c+d+e-f-g+h)(a-b-c+d-e+f+g-h)$.

353. $(x+a_1+a_2+\dots+a_n)(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)$. Указание. Применить выделение линейных множителей или из каждой строки вычесть предыдущую и затем к каждому столбцу прибавить все последующие.

354. 0 при $n>2$; $D_1=a_1-b_1$; $D_2=(a_1-a_2)(b_1-b_2)$.

355. 0 при $n>2$; $D_1=1+x_1y_1$; $D_2=(x_1-x_2)(y_1-y_2)$.

356. 0 при $n>1$. Указание. Разложить на сумму определителей относительно каждого столбца.

357. $1+\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)+\sum_{1\leqslant i<k\leqslant n}(a_i-a_k)(b_k-b_i)$.

358. $(-1)^n\left[1-n-\sum_{i=1}^{n}x_iy_i+\sum_{1\leqslant i<k\leqslant n}(x_i-x_k)(y_i-y_k)\right]$. Указание. Применить результат задачи 355.

359. $x^n+x^{n-1}\sum_{i=1}^{n}(a_i-b_i)+x^{n-2}\sum_{1\leqslant i<k\leqslant n}(a_i-a_k)(b_i-b_k)$. Указание. Разложить определитель на сумму двух определителей относительно каждого столбца и применить результат задачи 354.

360. $x_1x_2\dots x_n\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{a_ib_i}{x_i}\right)$.

361. $(a^2-b^2)^n$. Указание. Вывести рекуррентное соотношение $D_{2n}=(a^2-b^2)D_{2n-2}$.

362. $\prod_{i=1}^{n}(a_ia_{2n+1-i}-b_ib_{2n+1-i})$. **363.** $\frac{n+1}{x^n}$.

364. 0, если n при делении на 6 дает в остатке 2 или 5; 1, если n делится на 6 или дает в остатке единицу; -1, если n при делении на 6 дает в остатке 3 или 4. Ответ можно записать иначе так:

$$D_n=\frac{C_{n+1}^1-3C_{n+1}^3+9C_{n+1}^5-27C_{n+1}^7+\cdots}{2^n}.$$

Указание. Применить метод рекуррентных соотношений, разобранный во введении к настоящему параграфу.

365. Указание. Получить рекуррентное соотношение $D_n=D_{n-1}+D_{n-2}$.

366. $5^{n+1}-4^{n+1}$.

367. $\frac{i^n[1+(-1)^n]}{2}$, где $i=\sqrt{-1}$, т.е. если n нечетное, то $D_n=0$, если n четное, то $D_n=(-1)^{n/2}$.

368. $\frac{1}{2}[1+(-1)^n]$.

369.

$$D_n = \frac{1}{2^n}\left[C^1_{n+1}a^n + C^3_{n+1}a^{n-2}(a^2-4) + C^5_{n+1}a^{n-4}(a^2-4)^2 + C^7_{n+1}a^{n-6}(a^2-4)^3 + \cdots\right] =$$
$$= a^n - C^1_{n-1}a^{n-2} + C^2_{n-2}a^{n-4} + \cdots + (-1)^k C^k_{n-k}a^{n-2k} + \cdots .$$

Указание. Первое выражение получается непосредственно методом рекуррентных соотношений; второе легко доказать методом индукции, используя соотношение $C^p_n + C^{p+1}_n = C^{p+1}_{n+1}$.

370.

$$D_n = \frac{1}{2^n}\left[C^1_{n+1}a^n + C^3_{n+1}a^{n-2}(a^2+4) + \cdots + C^{2k+1}_{n+1}a^{n-2k}(a^2+4)^k + \cdots\right] =$$
$$= a^n + C^1_{n-1}a^{n-2} + C^2_{n-2}a^{n-4} + \cdots + C^k_{n-k}a^{n-2k} + \cdots .$$

371.

$$2\cos n\alpha = (2\cos\alpha)^n - n(2\cos\alpha)^{n-2} + \frac{n(n-3)}{2!}(2\cos\alpha)^{n-4} -$$
$$- \frac{n(n-4)(n-5)}{3!}(2\cos\alpha)^{n-6} + \cdots = \sum_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k \frac{n}{n-k}C^k_{n-k}(2\cos\alpha)^{n-2k},$$

где через $[n/2]$ обозначена целая часть числа $n/2$. Указание. Равенство $\cos n\alpha$ данному определителю доказать индукцией по n.

Далее, если D_n — определитель данной задачи, а D^0_n — определитель задачи 369 с заменой a на $2\cos\alpha$, то $D_n = D^0_n - \cos\alpha D^0_{n-1}$. То, что коэффициенты в полученном выражении $\cos n\alpha$ через $\cos\alpha$ будут целыми, следует из легко проверяемого равенства $\frac{n}{n-k}C^k_{n-k} = C^k_{n-k} - C^{k-1}_{n-k-1}$ и из того, что все члены, кроме последнего, содержат множитель 2, а последний член не содержит $2\cos\alpha$ лишь при четном n, но тогда $k = n/2$ и этот член равен 2.

372. $\sin n\alpha = \sin\alpha\left[(2\cos\alpha)^{n-1} - C^1_{n-2}(2\cos\alpha)^{n-3} + C^2_{n-3}(2\cos\alpha)^{n-5} - \cdots\right] = \sin\alpha \sum\limits_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} C^k_{n-k-1}(2\cos\alpha)^{n-2k-1}$, где $\left[\dfrac{n-1}{2}\right]$ есть целая часть числа $\dfrac{n-1}{2}$.

373. Указание. Применить метод рекуррентных соотношений.

374. $1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n}$. **375.** $(-1)^{n(n-1)/2}\dfrac{n+1}{2}n^{n-1}$.

376. $(-nx)^{n-1}\left[a + \dfrac{(n-1)x}{2}\right]$. Указание. Из каждой строки вычесть следующую, все столбцы прибавить к последующему, к предпоследней строке прибавить все предыдущие и эту строку прибавить ко всем предыдущим.

377. $(1-x^n)^{n-1}$.

378. Эти циркулянты различаются лишь множителем $(-1)^{(n-2)(n-1)/2}$.

379. 1. Указание. Пользуясь равенством $\dbinom{n}{k} = \dbinom{n-k}{k} + \dbinom{n-1}{k-1}$, вычесть из каждого столбца предыдущий, а затем из каждой строки предыдущую.

380. 1. Указание. Воспользоваться указанием к предыдущей задаче.

381. 1. Указание. Из каждой строки вычесть предыдущую.

382. 1. Указание. Из каждой строки, начиная со второй, вычесть предыдущую, затем из каждой строки, начиная с третьей, вычесть предыдущую и т. д.

383. $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$. Указание. Из каждого столбца, начиная со второго, вычесть предыдущий, затем из каждого столбца, начиная с третьего, вычесть предыдущий и т. д. В полученном определителе то же самое проделать для строк.

384. 1. Указание. Воспользоваться указанием к задаче 382.

385. $\dfrac{\binom{m+n}{n+1}\binom{m+n-1}{n+1}\cdots\binom{m+n-p+1}{n+1}}{\binom{p+n}{n+1}\binom{p+n-1}{n+1}\cdots\binom{n+1}{n+1}}$. Указание. Пользуясь соотношением $\dbinom{n}{k}=\dfrac{n}{k}\dbinom{n-1}{k-1}$, вынести за знак определителя из первой строки m, из второй $m+1$ и т. д., из последней $m+n$; из первого столбца $\dfrac{1}{p}$, из второго $\dfrac{1}{p+1}$ и т. д., из последнего $\dfrac{1}{p+n}$. С полученным определителем проделать аналогичные преобразования и т. д., пока не придем к определителю того же типа, что и в предыдущей задаче.

386. n. Указание. Из каждой строки вычесть предыдущую, разложить по элементам первого столбца, в полученном определителе из первого столбца вычесть второй, прибавить третий, вычесть четвертый и т. д. Представить определитель в виде суммы двух определителей и показать, что $D_n = D_{n-1} + 1$.

387. n. Указание. Из каждого столбца вычесть предыдущий, затем из каждой строки вычесть предыдущую. Элемент 2 в левом верхнем углу представить как $1+1$ и получить соотношение $D_{n-1} = D_{n-2} + D'_{n-1}$, где D'_{n-1} — определитель того же вида, что и в задаче 379, но порядка $n-1$.

388. $(x-1)^n$. Указание. Из каждой строки вычесть предыдущую и показать, что $D_{n+1} = (x-1)D_n$.

389. $1!2!3!\dots(n-1)!(x-1)^n$. Указание. Свести к предыдущей задаче.

390. $x_n - \dbinom{n}{1}x_{n-1} + \dbinom{n}{2}x_{n-2} - \dbinom{n}{3}x_{n-3} + \dots + (-1)^n x_0$. Указание. Из каждой строки вычесть предыдущую, показать, что $D_{n+1}(x_0, x_1, \dots, x_n) = D_n(x_1 - x_0, x_2 - x_1, \dots, x_n - x_{n-1})$, и применить метод математической индукции.

391. $(-1)^{n-1}xy\dfrac{x^{n-1} - y^{n-1}}{x-y}$. Указание. Положить в правом нижнем углу $0 = x - x$, разложить на два определителя и либо применить метод рекуррентных соотношений, либо найти D_n из двух равенств:

$$D_n = -xD_{n-1} + x(-y)^{n-1}, \quad D_n = -yD_{n-1} + y(-x)^{n-1}.$$

392. $\dfrac{x(a-y)^n - y(a-x)^n}{x-y}$.

393. $\dfrac{xf(y) - yf(x)}{x-y}$, где $f(z) = (a_1 - z)(a_2 - z)\dots(a_n - z)$.

394. $\dfrac{f(x) - f(y)}{x-y}$, где $f(z) = (a_1 - z)(a_2 - z)\dots(a_n - z)$.

395. $\alpha^n + \beta^n$. **396.** $a^n + a^{n-1} + \dots + a + 1$.

397. $n!(a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n)$. **398.** $\dfrac{\operatorname{tg}^n \frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}^n \frac{\alpha}{2}}{2}$.

399. $\prod\limits_{k=1}^{n}(x+n-2k+1)$ или $(x^2-1^2)(x^2-3^2)\dots[x^2-(n-1)^2]$, если n четное, и $x(x^2-2^2)(x^2-4^2)\dots[x^2-(n-1)^2]$, если n нечетное. Указание. К каждой строке прибавить все следующие, из каждого столбца вычесть предыдущий и показать, что если $D_n(x)$ — данный определитель, то $D_n(x) = (x+n-1)D_{n-1}(x-1)$.

400. 0, если $n > 2$, $D_1 = a^p - x$; $D_2 = xa^p(a^2-1)(1-a)$.

401. $(-1)^n\left[x^n - x^{n-1}\dfrac{a^{2n}-1}{a^2-1}\right]$.

402. $a_1a_2\dots a_n\left(a_0 - \dfrac{1}{a_1} - \dfrac{1}{a_2} - \dots - \dfrac{1}{a_n}\right)$.

403. $abc_1c_2\dots c_n\left(\dfrac{c_0}{ab} - \dfrac{1}{c_1} - \dfrac{1}{c_2} - \dots - \dfrac{1}{c_n}\right)$.

404. $a(a+b)(a+2b)\dots[a+(n-1)b]\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{a+b} + \dfrac{1}{a+2b} + \dots + \dfrac{1}{a+(n-1)b}\right)$.
Указание. Из каждой строки, начиная со второй, вычесть следующую, из первой строки вычесть последнюю и получить определитель того же типа, что и в предыдущей задаче.

405. $\left[1 + \sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{a_i^2}{x_i^2 - 2a_ix_i}\right]\prod\limits_{i=1}^{n}(x_i^2 - 2a_ix_i)$. Указание. Использовать результат задачи 306.

406. $\left[1 + \sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{a_i^2}{x_i^2 - 2a_ix_i}\right]\prod\limits_{i=1}^{n}(x_i^2 - 2a_ix_i)$.

407. $1 - b_1 + b_1b_2 - b_1b_2b_3 + \dots + (-1)^nb_1b_2\dots b_n$. Указание. Получить соотношение $D_n = 1 - b_1D_{n-1}$.

408. $(-1)^{n-1}(b_1a_2a_3\dots a_n + b_1b_2a_3\dots a_n + \dots + b_1b_2\dots b_{n-1}a_n)$.

409. $(-1)^{n-1}x^{n-2}$. Указание. Из каждой строки вычесть следующую.

410. $(-1)^n[(x-1)^n - x^n]$. Указание. Из каждой строки вычесть предыдущую, в правом нижнем углу положить $1 = x + (1-x)$ и представить в виде суммы двух определителей.

411. $a_0x^n\prod\limits_{i=1}^{n}(b_i - a_i)$. Указание. Умножить вторую строку на x^{n-1}, третью — на x^{n-2} и т. д., n-ю — на x. Вынести из первого столбца x^n, из второго x^{n-1}, из третьего x^{n-2} и т. д., из n-го x.

412. $n!\left(1 + x + \dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{3} + \dots + \dfrac{x}{n}\right)$.

413. $2^{\frac{n(n+1)}{2}}\left[1 + x\left(2 - \dfrac{1}{2^n}\right)\right]$.

414. $\dfrac{1}{n!}\left[1 + \dfrac{n(n+1)}{2}x\right]$.

415. $a^{\frac{n(n+1)}{2}}\left[1+x\dfrac{a^{n+1}-1}{a^n(a-1)}\right]$.

416. $\dfrac{\prod\limits_{1\leqslant i<k\leqslant n}[(a_i-a_k)(b_i-b_k)]}{\prod\limits_{i,k=1}^{n}(a_i+b_k)}$, где произведение в знаменателе берется по всем i, k, пробегающим независимо друг от друга все значения от 1 до n. Указание. Из каждой строки вынести за знак определителя общий знаменатель элементов этой строки. Показать, что полученный определитель D' делится на все разности виде a_i-a_k и b_i-b_k $(i\neq k)$. Показать, что частное от деления D' на $\prod\limits_{1\leqslant i<k\leqslant n}[(a_i-a_k)(b_i-b_k)]$ есть константа, для определения которой положить в D'

$$a_1=-b_1,\ a_2=-b_2,\ \ldots,\ a_n=-b_n.$$

Можно решить иначе, а именно: из каждой строки вычесть первую, а затем из каждого столбца вычесть первый.

417. $\dfrac{\prod\limits_{1\leqslant i<k\leqslant n}[(x_i-x_k)(a_k-a_i)]}{\prod\limits_{i,k=1}^{n}(x_i-a_k)}$. Указание. Воспользоваться указанием к предыдущей задаче.

418. $\dfrac{[1!2!3!\ldots(n-1)!]^3}{n!(n+1)!(n+2)!\ldots(2n-1)!}$. Указание. Воспользоваться результатами задачи 416.

419. $a_0a_1a_2\ldots a_n\left(\dfrac{1}{a_0}+\dfrac{1}{a_1}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}\right)$. Указание. Получить рекуррентное соотношение $D_n=(a_{n-1}+a_n)D_{n-1}-a_{n-1}^2D_{n-2}$ и применить метод математической индукции.

420. Континуанта $(a_1a_2\ldots a_n)$ равна сумме всевозможных произведений элементов $a_1,a_2\ldots,a_n$, одно из которых содержит все эти элементы, а другие получаются из него выбрасыванием одной или нескольких пар сомножителей с соседними номерами. При этом член, получаемый выбрасыванием всех сомножителей (при четном n), считается равным 1:

$$(a_1a_2a_3a_4)=a_1a_2a_3a_4+a_3a_4+a_1a_4+a_1a_2+1,$$
$$(a_1a_2a_3a_4a_5)=a_1a_2a_3a_4a_5+a_3a_4a_5+a_1a_4a_5+a_1a_2a_5+a_1a_2a_3+a_1+a_3+a_5,$$
$$(a_1a_2a_3a_4a_5a_6)=a_1a_2a_3a_4a_5a_6+a_3a_4a_5a_6+a_1a_4a_5a_6+a_1a_2a_5a_6+a_1a_2a_3a_6+$$
$$+a_1a_2a_3a_4+a_5a_6+a_3a_6+a_1a_6+a_3a_4+a_1a_4+a_1a_2+1.$$

Указание. Проверить справедливость указанного закона для континуант 1-го и 2-го порядков и, предположив его справедливость для континуант $(n-1)$-го и $(n-2)$-го порядков, доказать справедливость его для континуант n-го порядка. Для этого вывести рекуррентное соотношение

$$(a_1a_2\ldots a_n)=a_n(a_1a_2\ldots a_{n-1})+(a_1a_2\ldots a_{n-2}).$$

421. $(C_n^k)^2$.

424. Указание. Показать, что число инверсий в обеих строках данной подстановки равно $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k + \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_k - 2(1 + 2 + \dots + k)$.

425. 10. **426.** 100. **427.** 60. **428.** 10. **429.** -4. **430.** -2.

431. 195. **432.** 90. **433.** 8. **434.** 4. **435.** 1000. **436.** 12.

437. $(x_2 - x_1)\sin(\gamma - \beta) + (y_2 - y_1)\sin(\alpha - \gamma) + (z_2 - z_1)\sin(\beta - \alpha)$.

438. $A^2x_1 + B^2x_2 + C^2x_3 + 2BCy_1 + 2CAy_2 + 2ABy_3$, где $A = bc' - b'c$, $B = ca' - c'a$, $C = ab' - a'b$.

439. $-(ayz + bxz + cxy)$. **440.** $-(aa' + bb' + cc')$. **441.** $abc - x(bc + ca + ab)$.

442. $(x_4 - x_3)[(x_3 - x_2)(x_4 - x_2) - 2(x_3 - x_1)(x_4 - x_1)]$.

443. $\prod\limits_{k=1}^{n}(a_{kk}a_{2n-k+1,2n-k+1} - a_{k,2n-k+1}a_{2n-k+1,k})$.

444. $(-1)^n \prod\limits_{n\geqslant i>k\geqslant 1}(x_i - x_k)^2$.

445. -84. Указание. Из второй строки вычесть удвоенную первую, к третьей строке прибавить удвоенную четвертую.

446. -84. **447.** 98. **448.** 43. **449.** 81. **450.** 14. **451.** $(-1)^n(nx + 1)x^n$.

452. $b_{1n}b_{2,n-1}\dots b_{n1}(a_{1n} - c_{1n})(a_{2,n-1} - c_{2,n-1})\dots(a_{n1} - c_{n1})$.

453. $x^{2n} - x^{2n-2}(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2$. **454.** а) $D = M_1M_4$; б) $D = (-1)^kM_2M_3$.

455. $D = (-1)^{k+\frac{k(k+1)l}{2}}M_1M_2\dots M_l$. Правило знаков иначе можно сформулировать так: при четном l берется знак $(-1)^k$, а при нечетном l — знак $(-1)^{\frac{k(k-1)}{2}}$.

459. $(2^{k+1}-1)(3^{l+2}-2^{l+1})-4(2^k-1)(3^l-2^l)$. Указание. Разложить по первым k строкам и применить метод рекуррентных соотношений.

460. $(a_1a_2\dots a_n) = (a_1a_2\dots a_k)(a_{k+1}a_{k+2}\dots a_n) + (a_1a_2\dots a_{k-1})(a_{k+2}a_{k+3}\dots a_n)$. Полагая здесь $n = 2k$, $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1$ и обозначая через u_n n-е число ряда Фибоначчи, получим $u_{2k} = u_k^2 + u_{k-1}^2$, т. е. сумма квадратов двух соседних чисел ряда Фибоначчи также является числом этого ряда.

462. Указание. Рассмотреть определитель порядка $2n$ матрицы, полученной из данной приписыванием снизу тех же n строк в том же порядке.

463. Указание. Разложив D по 1-й, 3-й и 5-й строкам, показать, что $D = A\Delta^2$, где A не зависит от элементов Δ. Для определения A положить элементы на главной диагонали Δ равными единице, а вне главной диагонали Δ равными нулю.

464. Указание. Определитель в левой части равенства разложить на сумму определителей относительно каждой строки и представить в виде

$$\sum_{i,j,k=0}^{4} a_ib_jc_kD_{ijk}, \text{ где } D_{ijk} = \begin{vmatrix} \alpha^i & \beta^i & \gamma^i \\ \alpha^j & \beta^j & \gamma^j \\ \alpha^k & \beta^k & \gamma^k \end{vmatrix}.$$

Показать, что последнюю сумму можно брать лишь по всем тройкам ijk, не содержащим равных чисел, разлагая определитель 5-го порядка в правой части равенства по первым трем строкам, представить правую часть в виде $\sum a_ib_jc_kC_{ijk}$, где сумма берется по всем тройкам различных чисел ijk, изменяющихся от 0 до 4. Наконец, показать, что имеет место $D_{ijk} = C_{ijk}$; для этого любую тройку чисел ijk свести к случаю $i < j < k$ перестановкой строк и столбцов определителей и рассмотреть все десять возможных случаев. Например: $D_{013} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha^3 & \beta^3 & \gamma^3 \end{vmatrix} = (\alpha+\beta+\gamma)(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)$. Но и $C_{013} = -\begin{vmatrix} p & 0 \\ q & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \beta & \beta^2 \\ 1 & \gamma & \gamma^2 \end{vmatrix} = (\alpha+\beta+\gamma)(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)$, так как $p = -(\alpha+\beta+\gamma)$.

466. Решение. Доказательство проходит по тому же плану, как и в теореме Лапласа. Покажем, что любой член произведения $\varepsilon M_1 M_2 \ldots M_p$ есть член определителя D. Пусть сначала M_1 лежит в первых k строках и первых k столбцах, M_2 — в следующих l строках и следующих l столбцах и т. д., M_p — в последних s строках и последних s столбцах. В этом случае подстановка (1) является тождественной и $\varepsilon = +1$.

Берем произведение любых членов миноров $M_1, M_2, \ldots, M_p$ в порядке возрастания первых индексов элементов. Оно содержит по одному элементу из каждой строки и каждого столбца и, значит, по составу элементов будет членом D. Если во вторых индексах элементов члена минора M_i есть σ_i инверсий, то знак этого произведения будет $(-1)^{\sigma_1+\cdots+\sigma_p}$. Но индексы элементов двух разных миноров M_i и M_j инверсий не образуют. Значит, $\sigma_1 + \cdots + \sigma_p$ есть общее число инверсий во вторых индексах элементов взятого произведения, и оно будет членом D также и по знаку. Пусть теперь миноры M_i расположены произвольно. Переведем их в рассмотренное выше положение на главной диагонали такими перестановками строк и столбцов D. Сначала первую строку минора M_1, имеющую номер α_1, переводим на первое место, переставляя со всеми вышележащими строками D. При этом мы совершим $\alpha_1 - 1$ транспозиций строк, т. е. столько, сколько инверсий образует число α_1 в верхней строке подстановки (1) со следующими за ним числами. Затем строку с номером α_2 тем же путем переводим на второе место, совершая столько транспозиций строк, сколько инверсий образует α_2 в верхней строке подстановки (1) с числами, следующими за ним, и т. д. Так же переставляем столбцы D. Если в первой строке подстановки (1) σ, а во второй τ инверсий, то $\varepsilon = (-1)^{\sigma+\tau}$ и всего мы совершим $\sigma + \tau$ транспозиций строк и столбцов D. Поэтому мы придем к новому определителю D', для которого

$$D = \varepsilon D'. \tag{2}$$

По доказанному ранее любой член произведения $M_1 M_2 \ldots M_p$ будет членом определителя D', в силу (2) любой член произведения $\varepsilon M_1 M_2 \ldots M_p$ будет членом определителя D.

Все члены одного и того же или двух разных произведений $\varepsilon M_1 M_2 \ldots M_p$ отличаются друг от друга по составу элементов и потому будут различными членами определителя D. Остается доказать, что общее число членов всех таких произведений равно $n!$. Число миноров M_1 равно C_n^k. Если M_1 уже выбран, то миноры M_2 могут лежать лишь в оставшихся $n-k$ строках и их число (для каждого выбора M_1) равно C_{n-k}^l. При выбранных M_1 и M_2 число миноров M_3 равно C_{n-k-1}^m и т. д.; наконец, при выбранных $M_1, M_2, \ldots, M_{p-1}$ число миноров M_p равно $C_s^s = 1$. Поэтому всех произведений вида $\varepsilon M_1 M_2 \dots M_p$ будет

$$C_n^k \cdot C_{n-k}^l C_{n-k-l}^m \dots C_s^s =$$
$$= \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{(n-k)!}{l!(n-k-l)!} \cdot \frac{(n-k-l)!}{m!(n-k-l-m)!} \cdots \frac{s!}{s!} = \frac{n!}{k!l!m! \dots s!}.$$

Но число членов определителя D в каждом произведении $\varepsilon M_1 M_2 \dots M_p$ равно $k!l!m! \dots s!$. Значит, число членов во всех произведениях $\varepsilon M_1 M_2 \dots M_p$ равно $\dfrac{n!}{k!l!m! \dots s!} k!l!m! \dots s! = n!$

467. Получим при умножении

$$\text{строки на строки:} \quad \begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ -4 & -7 & -13 \\ -3 & -4 & -13 \end{vmatrix},$$

$$\text{строки на столбцы:} \quad \begin{vmatrix} 7 & -26 & 13 \\ 12 & -35 & 19 \\ 17 & -52 & 27 \end{vmatrix},$$

$$\text{столбцы на строки:} \quad \begin{vmatrix} -3 & 1 & -6 \\ -3 & 1 & -8 \\ 4 & 7 & 1 \end{vmatrix},$$

$$\text{столбцы на столбцы:} \quad \begin{vmatrix} 9 & -35 & 18 \\ 13 & -47 & 24 \\ 12 & -37 & 17 \end{vmatrix},$$

Значения данных определителей -5 и 10, а значения всех полученных определителей равны -50.

468. $(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$. **469.** $(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2+g^2+h^2)^4$.

470. 0 при $n > 2$; $(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)$ при $n = 2$. Указание. Представить в виде произведения определителей:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{vmatrix} 1 & y_1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & y_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & y_n & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

471. 0, если $n > 2$, $\sin(\alpha_1 - \alpha_2)\sin(\beta_1 - \beta_2)$, если $n = 2$.

472. 0, если $n > 2$, $\sin^2(\alpha_1 - \alpha_2)$, если $n = 2$.

473. 0, если $n > 2$, $-\sin^2(\alpha_1 - \alpha_2)$, если $n = 2$.

474. $\prod\limits_{n \geqslant i > k \geqslant 1} (a_i - a_k)(b_i - b_k)$.

475. $C_n^1 C_n^2 \dots C_n^n \prod\limits_{n \geqslant i > k \geqslant 1} (a_k - a_i)(b_i - b_k)$.

476. $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}[(n-1)!]^n$. Указание. Элемент в i-й строке и k-м столбце записать в виде $[i + (k-1)]^{n-1}$ и разложить по формуле степени бинома или прямо воспользоваться результатом предыдущей задачи.

477. $\prod\limits_{n\geqslant i>k\geqslant 1}(x_i-x_k)^2$.

478. $\prod\limits_{i=1}^{n}(x-x_i)\prod\limits_{n\geqslant i>k\geqslant 1}(x_i-x_k)^2$. Указание. Представить в виде произведения определителей:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n & x \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 & x^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} & x^{n-1} \\ x_1^n & x_2^n & \dots & x_n^n & x^n \end{vmatrix} \text{ и } \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n & 0 \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

причем произведение составляется по строкам.

479. Указание. Данный определитель помножить на определитель Вандермонда

$$v=\begin{vmatrix} 1 & \varepsilon_1 & \varepsilon_1^2 & \dots & \varepsilon_1^{n-1} \\ 1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_2^2 & \dots & \varepsilon_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \varepsilon_n & \varepsilon_n^2 & \dots & \varepsilon_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

481. $(1-\alpha^n)^{n-1}$. Указание. Использовать результат задачи 479 и равенство $(1-\alpha\varepsilon_1)(1-\alpha\varepsilon_2)\dots(1-\alpha\varepsilon_n)=1-\alpha^n$, $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_n$ — корни n-й степени из единицы. Проще, однако, вычислить этот определитель как частный случай определителя задачи 325.

483. $(a+b+c+d)(a-b+c-d)(a+bi-c-di)(a-bi-c+di)=a^4-b^4+c^4-d^4-2a^2c^2+2b^2d^2-4a^2bd+4b^2ac-4c^2bd+4d^2ac$.

484. $[1+(-1)^n]^n=\begin{cases} 0 & \text{при } n \text{ нечетном,} \\ 2^n & \text{при } n \text{ четном.} \end{cases}$

485. $(-1)^n\dfrac{[(n+1)a^n-1]^n-n^na^{n(n+1)}}{(1-a^n)^2}$.

486. Указание. Вычислить первый определитель, используя результат задачи 479.

487. $(-2)^{n-1}(n-2p)$, если n и p взаимно просты; 0, если n и p не взаимно просты. Указание. Использовать результат задачи 479 и свойства корней n-й степени из единицы, в частности, то, что при p, взаимно простом с n, числа $\varepsilon_1^p,\varepsilon_2^p,\dots,\varepsilon_n^p$ снова являются всеми значениями $\sqrt[n]{1}$, а при p, не взаимно простом с n, найдется $\varepsilon_k\neq 1$, для которого $\varepsilon_k^p=1$.

488. $[3+(n-p)b](a-b)^{n-1}$, если n и p взаимно просты; 0, если n и p не взаимно просты. Указание. Воспользоваться указанием к предыдущей задаче.

489. $2^{n-2}\left(\cos^n\dfrac{\pi}{n}-1\right)$. Указание. Положить $\cos\dfrac{j\pi}{n}=\dfrac{\varepsilon_1^j+\varepsilon_1^{-j}}{2}$, где $\varepsilon_1=\cos\dfrac{\pi}{n}+i\sin\dfrac{\pi}{n}$, использовать результат задачи 479 и то, что для любого a имеем $\prod\limits_{k=0}^{n-1}(a-\varepsilon_1^{2k})=a^n-1$ и $\varepsilon_1^n=-1$.

490. $$\frac{[\cos\theta-\cos(n+1)\theta]^n-(1-\cos n\theta)^n}{2(1-\cos\theta)}=$$
$$=2^{n-2}\sin^{n-2}\frac{n\theta}{2}\left[\sin^n\frac{(n+2)\theta}{2}-\sin^n\frac{n\theta}{2}\right].$$

Указание. Положить $\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$, $\eta=\cos\theta+i\sin\theta$ и воспользоваться результатом задачи 479.

491. $(-1)^n2^{n-2}\sin^{n-2}\frac{nh}{2}\left[\cos^n\left(a+\frac{nh}{2}\right)-\cos^n\left(a+\frac{(n-2)h}{2}\right)\right].$

492. $(-1)^{n-1}\frac{(n+1)(2n+1)n^{n-2}}{12}[(n+2)^n-n^n]$. Указание. Использовать результат задачи 479 и соотношения $1^2+2^2+3^2+\dots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ и $1+4\varepsilon+9\varepsilon^2+\dots+n^2\varepsilon^{n-1}=-\frac{n^2(1-\varepsilon)+2n}{(1-\varepsilon)^2}$, где ε — корень n-й степени из 1, отличный от 1. Для получения последнего равенства умножить и разделить левую часть на $1-\varepsilon$.

493. $f(\eta_1)f(\eta_2)\dots f(\eta_n)$, где $f(x)=a_1+a_2x+a_3x^2+\dots+a_nx^{n-1}$ и $\eta_1,\eta_2,\dots,\eta_n$ — все значения корня $\sqrt[n]{-1}$, например, $\eta_k=\cos\frac{(2k-1)\pi}{n}+i\sin\frac{(2k-1)\pi}{n}$. Указание. Данный определитель умножить на определитель Вандермонда, составленный из чисел $\eta_1,\eta_2,\dots,\eta_n$.

494. $f(\alpha_1)f(\alpha_2)\dots f(\alpha_n)$, где $f(x)=a_1+a_2x+a_3x^2+\dots+a_nx^{n-1}$ и $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ — все значения корня n-й степени из z.

495. Указание. Обозначив корни степени $2n$ из 1 через $\varepsilon_k=\cos\frac{k\pi}{n}+i\sin\frac{k\pi}{n}$, $k=0,1,2,\dots,2n-1$, показать, что числа ε_k с четными индексами k дают все корни n-й степени из единицы, причем $a_1+a_2\varepsilon_k+a_3\varepsilon_k^2+\dots+a_{2n}\varepsilon_k^{2n-1}=(a_1+a_{n+1})+(a_2+a_{n+2})\varepsilon_k+(a_3+a_{n+3})\varepsilon_k^2+\dots+(a_n+a_{2n})\varepsilon_k^{n-1}$, а числа ε_k с нечетными индексами k дают все корни n-й степени из -1, причем $a_1+a_2\varepsilon_k+a_3\varepsilon_k^2+\dots+a_{2n}\varepsilon_k^{2n-1}=(a_1-a_{n+1})+(a_2-a_{n+2})\varepsilon_k+(a_3-a_{n+3})\varepsilon_k^2+\dots+(a_n-a_{2n})\varepsilon_k^{n-1}$.

496. Произведение двух чисел, каждое из которых есть сумма квадратов четырех целых чисел, само будет суммой квадратов четырех целых чисел. Указание. Каждый из определителей возвести в квадрат.

497. Произведение двух чисел, каждое из которых равно значению формы $x^3+y^3+z^3-3xyz$, при целых значениях x, y, z само будет числом того же рода. Указание. Вычислить произведение определителей

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a' & b' & c' \\ c' & a' & b' \\ b' & c' & a' \end{vmatrix},$$

помножая строки первого на столбцы второго.

498. Указание. В произведении определителей

$$\begin{vmatrix} a & 1 & b \\ b & 1 & a \\ c & 1 & b \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a' & b' & 1 \\ c' & a' & 1 \\ b' & c' & 1 \end{vmatrix},$$

составленном путем умножения столбцов на столбцы, третий столбец помножить на $s' = a' + b' + c'$ и множитель s' вынести из второй строки за знак определителя. Затем из третьего столбца вычесть первый и второй.

499. Указание. Записав определитель D в виде

$$D = \begin{vmatrix} \sum a_{1,k_1} b_{1,k_1} & \sum a_{1,k_2} b_{2,k_2} & \dots & \sum a_{1,k_m} b_{m,k_m} \\ \sum a_{2,k_1} b_{1,k_1} & \sum a_{2,k_2} b_{2,k_2} & \dots & \sum a_{2,k_m} b_{m,k_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum a_{m,k_1} b_{1,k_1} & \sum a_{m,k_2} b_{2,k_2} & \dots & \sum a_{m,k_m} b_{m,k_m} \end{vmatrix},$$

где все суммы j-го столбца берутся по одному и тому же индексу $k_j = 1, 2, \dots, n$, разложить D в сумму n^m определителей относительно столбцов, в каждом слагаемом из j-го столбца вынести b_{j,k_j} за знак определителя и показать, что

$$D = \sum_{k_1, k_2, \dots, k_m = 1}^{n} b_{1,k_1} b_{2,k_2} \dots b_{m,k_m} A_{k_1,k_2,\dots,k_m}, \tag{3}$$

где индексы суммирования меняются от единицы до n независимо друг от друга. Заметить, что $A_{k_1,k_2,\dots,k_m} = 0$, если среди индексов $k_1, k_2, \dots, k_m$ есть равные. Вывести отсюда утверждение (2), а при $m \leqslant n$ доказать, что для любых индексов $i_1, i_2, \dots, i_m$, где $1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_m \leqslant n$, все слагаемые суммы (3), в которых индексы $k_1, k_2, \dots, k_m$ образуют любые перестановки чисел $i_1, i_2, \dots, i_m$, имеют сумму, равную $A_{i_1,i_2,\dots,i_m} \cdot B_{i_1,i_2,\dots,i_m}$, и отсюда получить утверждение (1).

500. Указание. Матрицы A и B дополнить до квадратных при помощи $m-n$ столбцов, состоящих из одних нулей.

501. Указание. Применить теорему задачи 499 к матрицам

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ d_1 & d_2 & \dots & d_n \end{pmatrix}.$$

503. Указание. Воспользоваться тождеством предыдущей задачи.

504. Указание. Применить теорему задачи 499 к матрицам

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} \overline{a}_1 & \overline{a}_2 & \dots & \overline{a}_n \\ \overline{b}_1 & \overline{b}_2 & \dots & \overline{b}_n \end{pmatrix}.$$

505. Указание. Воспользоваться тождеством предыдущей задачи.

506. Указание. Перемножая D и D' по строкам, показать что $DD' = D^n$, откуда при $D \neq 0$ и следует (1). При $D = 0$ рассмотреть случай, когда все элементы D равны нулю. Если $D = 0$, но хотя бы один элемент $a_{ij} \neq 0$, то к i-й строке D', помноженной на a_{ij}, прибавить первую строку, помноженную на a_{1j}, 2-ю, помноженную на $a_{2j}, \dots$, n-ю, помноженную на a_{nj}, и показать, что $a_{ij} D' = 0$.

Случай $D = 0$ можно обойти, если считать элементы D не числами, а независимыми переменными. Тогда определитель будет многочленом, отличным от нуля, и мы докажем, что (1) есть тождество, значит, оно верно при любых числовых значениях переменных a_{ij} независимо от обращения D в нуль.

507. Указание. Сначала рассмотреть случай, когда M лежит в левом верхнем углу. Помножая по строкам D на минор M', записанный в виде

$$\begin{vmatrix} A_{11} & \ldots & A_{1m} & A_{1,m+1} & \ldots & A_{1n} \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ A_{m1} & \ldots & A_{mm} & A_{m,m+1} & \ldots & A_{mn} \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix},$$

показать, что $DM' = D^m A$ и $M' = D^{m-1}A$ (случай $D = 0$ можно обойти аналогично тому, как указано в предыдущей задаче, т. е. считать D многочленом от n^2 неизвестных a_{ij}). Затем общее расположение M свести к рассмотренному перестановками строк и столбцов, для чего показать, что при перестановке двух соседних строк (или столбцов) во взаимном определителе D' происходит такая же перестановка строк (или столбцов) и, кроме того, все элементы D' меняют знак.

508. Указание. Использовать предыдущую задачу.

509. Указание. Использовать предыдущую задачу.

510. Указание. Применить равенство задачи 507 при $m = n - 1$.

511. Указание. Применить равенство задачи 507 с заменой m на $n - m$.

512. Указание. По значению взаимного определителя D' найти значение определителя D и применить равенство задачи 510. Показать, что задача имеет $n - 1$ решений.

513. Указание. Первый определитель представить как квадрат определителя Вандермонда, составленного из чисел $0, x_1, x_2, \ldots, x_n$.

514. $A_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}a_{kj}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$.

515. Указание. Рассмотреть произведения $D\Delta$ и ΔD, где D — данный определитель, а Δ — определитель того же порядка, что и D, полученный перестановкой i-й и j-й строк из определителя, имеющего единицы на главной диагонали и нули вне ее.

516. Указание. Рассмотреть произведения $D\Delta$ и ΔD, где D — данный определитель, а в Δ элементы главной диагонали равны 1, элемент в i-й строке и j-м столбце равен c, а остальные элементы равны нулю.

517. Указание. Положить $\varphi_1 = \alpha_2 - \alpha_3$, $\varphi_2 = \alpha_3 - \alpha_1$, $\varphi_3 = \alpha_1 - \alpha_2$.

518. Указание. Применить тождество задачи 502.

520. Определитель равен удвоенной площади треугольника $M_1M_2M_3$, если направление наименьшего поворота луча M_3M_1 до совпадения с M_3M_2 совпадает с направлением наименьшего поворота от положительного направления Ox до положительного направления Oy. В противном случае он равен удвоенной площади треугольника $M_1M_2M_3$ со знаком минус.

Решение. Указанные преобразования координат выражаются формулами

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha + x_0, \quad y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha + y_0.$$

Отсюда, умножая по строкам, находим

$$\begin{vmatrix} x_1' & y_1' & 1 \\ x_2' & y_2' & 1 \\ x_3' & y_3' & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & x_0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Но второй определитель в левой части равенства равен 1. Этим неизменность данного в задаче определителя при указанных преобразованиях доказана. Перенесем начало координат в точку M_3 и повернем оси так, чтобы новая ось абсцисс пошла по M_3M_1. Новые координаты точек M_1, M_2, M_3 будут $x_1' = M_3M_1$, $y_2' = \pm h$, где h — высота треугольника $M_1M_2M_3$, опущенная из вершины M_1, причем выбор знака плюс или минус связан с ориентацией треугольника указанным выше правилом, $y_1' = x_3' = y_3' = 0$. Поэтому определитель принимает вид $\begin{vmatrix} x_1' & 0 & 1 \\ x_2' & y_2' & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \pm M_3M_1 \cdot h = \pm 2S$, где S — площадь треугольника $M_1M_2M_3$.

521. Определитель равен площади параллелограмма, построенного на отрезках, соединяющих начало координат с точками M_1 и M_2, взятой со знаком плюс, если направления кратчайшего поворота от OM_1 к OM_2 и от Ox к Oy совпадают, и со знаком минус, если эти направления противоположны. Определитель не меняется при повороте осей, но может меняться при переносе начала. Указание. Применить результат предыдущей задачи, приняв за третью точку начало координат.

522. $R = \dfrac{abc}{4s}$. Указание. Центр описанного круга принять за начало координат, воспользоваться соотношениями

$$R^2 - x_ix_j - y_iy_j = \frac{1}{2}[(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2] \quad (i, j, = 1, 2, 3),$$

а также результатом задачи 520.

523. Указание. Показать, что квадрат определителя равен 1. Для определения знака, пользуясь непрерывностью определителя по совокупности всех переменных $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ $(i = 1, 2, 3)$, показать, что при вращении фигуры $OABC$ он не изменяется.

524. Определитель равен объему параллелепипеда, построенного на отрезках, соединяющих начало координат O с точками M_1, M_2, M_3, или шести объемам тетраэдра $OM_1M_2M_3$, взятым со знаком плюс, если ориентации триэдров $OM_1M_2M_3$ и $Oxyz$ одинаковы, и со знаком минус, если эти ориентации противоположны (при этом ориентации считаются одинаковыми, если после совмещения путем вращения триэдра $Oxyz$ оси Ox с OM_1 и плоскости xOy с OM_1M_2 так, чтобы Oy и OM_2 лежали по одну сторону от Ox, лучи Oz и OM_3 окажутся по одну сторону от плоскости xOy, и противоположными, если по разные стороны). Указание. Если $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ — соответственно косинусы новых осей Ox', Oy', Oz' со старыми, то старые и новые координаты связаны соотношениями

$$x = \alpha_1 x' + \beta_1 y' + \gamma_1 z', \quad y = \alpha_2 x' + \beta_2 y' + \gamma_2 z', \quad z = \alpha_3 x' + \beta_3 y' + \gamma_3 z'.$$

Пользуясь этим и результатами предыдущей задачи, доказать неизменность определителя настоящей задачи. Для выяснения геометрического смысла определителя повернуть систему координат $Oxyz$ так, как указано выше при определении одинаковой и противоположной ориентации триэдров.

525. $V = abc\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}$. Указание. Вычислить V^2, пользуясь результатом предыдущей задачи.

526. Указание. Взять на лучах OA, OB, OC точки M_1, M_2, M_3 на расстоянии 1 от начала координат и применить результат задачи 524.

527. Определитель равен шести объемам тетраэдра с вершинами M_1, M_2, M_3, M_4, взятым со знаком плюс, если триэдр лучей из M_4 в каждую из точек M_1, M_2, M_3 имеет одинаковую ориентацию с триэдром $Oxyz$, и со знаком минус — в противном случае. Указание. Перенести начало координат в точку M_4 и применить результат задачи 524. Иначе можно поступить аналогично решению задачи 520, пользуясь задачей 523. Тогда задача 524 получится как частный случай данной (аналогично тому, как было на плоскости в задаче 521).

528. $R=\frac{1}{24V}\sqrt{2l_{13}^2l_{14}^2l_{23}^2l_{24}^2+2l_{12}^2l_{14}^2l_{32}^2l_{34}^2+2l_{12}^2l_{13}^2l_{42}^2l_{43}^2-l_{12}^4l_{34}^4-l_{13}^4l_{24}^4-l_{14}^4l_{23}^4}$, где V — объем тетраэдра и $l_{ij}=l_{ji}$ $(i,j=1,2,3,4,\ i\neq j)$ — длина ребра, соединяющего вершины (x_i,y_i,z_i) и (x_j,y_j,z_j). В случае правильного тетраэдра с ребром длины a получим $R=\frac{a\sqrt{6}}{4}$. Указание. Применить результат предыдущей задачи и соотношение

$$R^2-x_ix_j-y_iy_j-z_iz_j=\frac{1}{2}[(x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2+(z_i-z_j)^2],$$

верное в предположении, что начало координат перенесено в центр описанного шара.

529. Указание. При доказательстве утверждения 2) показать, что вектор $\boldsymbol{a}_i=(a_{i1},a_{i2},\ldots,a_{in})$ можно представить в виде $\boldsymbol{a}_{ii}=a_{i1}\boldsymbol{e}_1+a_{i2}\boldsymbol{e}_2+\cdots+a_{in}\boldsymbol{e}_n$. Далее показать, что при перестановке двух векторов функция $f(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_n)$ меняет знак. При доказательстве этого, например, для векторов $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$, рассмотреть $f(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\ldots,\boldsymbol{a}_n)$.

530. Указание. Доказать, что функция $f(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_n)=|AB|$ от строк матрицы A обладает свойствами (α) и (β) и что $f(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\ldots,\boldsymbol{e}_n)=|B|$.

531. Положим $f(\boldsymbol{e}_{i_1},\boldsymbol{e}_{i_2},\ldots,\boldsymbol{e}_{i_n})=1$ при любых $i_1,i_2,\ldots,i_n=1,2,\ldots,n$ (одинаковых или различных). В силу (α), полагая $\boldsymbol{a}_i=\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}\boldsymbol{e}_j$, получим

$$f(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_n)=\sum_{i_1,i_2,\ldots i_n=1}^{n}a_{1,i_1}a_{2,i_2}\ldots a_{n,i_n}.$$

Этим функция $f(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_n)$ определена. Очевидно, она при перестановке векторов не меняется, т. е. в случае поля характеристики 2 меняет знак. Поэтому (β') выполнено, а (β), очевидно, не выполняется.

532. $(-1)^{C_n^2 C_{n-1}^2} n^{\frac{n}{2}} = i^{\frac{(n-1)(3n-2)}{2}} n^{\frac{n}{2}}$. Решение. Умножая данный определитель D сам на себя и замечая, что $\varepsilon^k = 1$ тогда и только тогда, когда k делится на n, получим

$$D^2 = \begin{vmatrix} n & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & n \\ 0 & 0 & \ldots & n & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & n & \ldots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{C_{n-1}^2} n^n,$$

откуда $D = \pm i^{C_{n-1}^2} n^{\frac{n}{2}}$ и для модуля D находим: $|D| = n^{\frac{n}{2}}$. Остается определить аргумент. Вычисляя D как определитель Вандермонда чисел $1, \varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^{n-1}$ и полагая затем $\varepsilon = \alpha^2$, где $\alpha = \cos\frac{\pi}{n} + i\sin\frac{\pi}{n}$, получим

$$\begin{aligned} D &= \prod_{0 \leqslant j < k \leqslant n-1} (\varepsilon^k - \varepsilon^j) = \prod_{0 \leqslant j < k \leqslant n-1} (\alpha^{2k} - \alpha^{2j}) = \\ &= \prod_{0 \leqslant j < k \leqslant n-1} \alpha^{k+j} (\alpha^{k-j} - \alpha^{-(k-j)}) = \\ &= \prod_{0 \leqslant j < k \leqslant n-1} \alpha^{j+k} \prod_{0 \leqslant j < k \leqslant n-1} 2i \sin\frac{(k-j)\pi}{n}. \end{aligned}$$

Для рассматриваемых значений j и k всегда $0 < k - j < n$ и, значит, $\sin\frac{(k-j)\pi}{n} > 0$. Поэтому $|D| = \prod\limits_{0 \leqslant j < k \leqslant n-1} 2\sin\frac{(k-j)\pi}{n} = n^{\frac{n}{2}}$. $D = |D|\beta$, где $\beta = i^{C_n^2} \prod\limits_{0 \leqslant j < k \leqslant n-1} \alpha^{j+k}$. В показатель степени при α каждое целое число $p (0 \leqslant p \leqslant n-1)$ войдет ровно $n-1$ раз; либо под видом j для $k = p+1, p+2, \ldots, n-1$, либо под видом k для $j = 0, 1, 2, \ldots, p-1$. Замечая, что $\alpha^{n/2} = i$ (при нечетном n будет $\alpha^{n/2} = \pm i$, однако выбор знака не играет роли ввиду четности числа $n-1$, что ясно из приведенных ниже вычислений), находим

$$\beta = i^{\frac{n(n-1)}{2}} \alpha^{\frac{n(n-1)^2}{2}} = i^{\frac{n(n-1)}{2} + (n-1)^2} = i^{\frac{(n-1)(3n-2)}{2}}.$$

Полагая $3n = 2n + n$ и используя данное выше выражение для $|D|$, получаем требуемое выражение для D.

533. Определитель будет помножен на $(2-k)2^{k-1}$. Указание. Случай любых строк свести к первым. Если же выделены первые k строк, то указанное преобразование может быть получено путем умножения данного определителя слева на определитель того же порядка, в котором все элементы главной диагонали равны 1, элементы все главной диагонали, стоящие в первых k строках и первых k столбцах, равны -1, а остальные элементы равны нулю.

534. $D = D_0 + Sx$, где D_0 — значение определителя D при $x = 0$ и S — сумма алгебраических дополнений всех элементов D_0.

535. Указание. Воспользоваться результатом предыдущей задачи.

536. Указание. Воспользоваться предыдущей задачей.

537. Указание. В определителе задачи 534 положить $x = -1$.

539. Указание. Применить метод математической индукции.

540. Указание. Все np строк определителя D разбить на n систем по p строк в каждой, отнеся к первой системе строки с номерами $1, n+1, 2n+1, \ldots, (p-1)n+1$, ко второй — строки с номерами $2, n+2, 2n+2, \ldots, (p-1)n+2\ldots$, к n-й — строки с номерами $n, 2n, 3n, \ldots, pn$. К этим системам применить обобщенную теорему Лапласа задачи 466. Показать, что миноры порядка p любой из указанных систем равны нулю, если хотя бы два вторых индекса элементов b_{ij} одинаковы и что $D = f(a_{11}, \ldots, a_{nn})B^n$, где $f(a_{11}, \ldots, a_{nn})$ не зависит от элементов b_{ij}. Для определения $f(a_{11}, \ldots, a_{nn})$ положить $b_{ii} = 1$ для $i = 1, 2, \ldots, n$ и $b_{ij} = 0$ для $i, j = 1, 2, \ldots, n$, $i \neq j$.

542. Решение. Если все $A_{ij} = 0$, то можно положить

$$A_i = B_i = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Пусть, например, алгебраические дополнения элементов последнего столбца не все равны нулю (в случае другого столбца рассуждения аналогичны). Так как $D = 0$, то алгебраические дополнения элементов двух столбцов пропорциональны (см. задачу 509)

$$\frac{A_{1j}}{A_{1n}} = \frac{A_{2j}}{A_{2n}} = \cdots = \frac{A_{nj}}{A_{nn}} = \frac{B'_j}{C_j} \quad (j = 1, 2, \ldots, n-1),$$

где дробь $\dfrac{B'_j}{C_j}$ будем считать несократимой. Отсюда

$$A_{ij} = \frac{A_{in}B'_j}{C_j} \quad (i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{1}$$

Но A_{ij} — многочлен от $x_1, x_2, \ldots, x_s$ и дробь $\dfrac{B'_j}{C_j}$ несократима. Поэтому A_{in} должно делиться на C_j $(j = 1, 2, \ldots, n-1)$, а значит, и на общее наименьшее кратное всех C_j $(j = 1, 2, \ldots, n-1)$. Обозначив это общее наименьшее кратное через B_n, получим

$$A_{in} = A_iB_n \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{2}$$

где все A_i — многочлены от $x_1, x_2, \ldots, x_s$. Положим $B_j = \dfrac{B_n}{C_j} \cdot B'_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n-1)$. Все B_j — многочлены от $x_1, x_2, \ldots, x_s$, причем из (1) находим

$$A_{ij} = A_iB_j \quad (i = 1, 2, \ldots, n,\ j = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{3}$$

Равенства (2) и (3) и доказывают теорему. В частности, для определителя Δ можно положить: $A_1 = B_1 = c$, $A_2 = B_2 = -b$, $A_3 = B_3 = a$.

543. Решение. Пусть D_{2n} — кососимметрический определитель порядка $2n$. Применим индукцию по n. Для $n = 1$ теорема верна, ибо $D_2 = a_{12}^2$. Предположим, что теорема верна для числа n и докажем ее для числа $n+1$. Вычеркнув из данного определителя D_{2n+2} последнюю строку и последний столбец, получим кососимметрический определитель D_{2n+1}, равный нулю. Его элементы можно рассматривать как многочлены от элементов, стоящих выше главной диагонали с целыми коэффициентами. По теореме предыдущей задачи алгебраические дополнения элементов D_{2n+1} имеют вид $A_{ij} = A_iB_j$ $(i, j = 1, 2, \ldots, 2n+1)$, где A_i и B_j — многочлены от тех же неизвестных. Миноры M_{ij} и M_{ji} в D_{2n+1} получаются один из другого транспонированием и изменением знаков элементов, а так как она четного порядка $2n$, то $A_{ij} = A_{ji}$. Или $A_iB_j = A_jB_i$.

$$\frac{B_i}{A_i} = \frac{B_j}{A_j} = \lambda;\ B_i = \lambda \cdot A_i \quad (i = 1, 2, \ldots, 2n+1).$$

λ — рациональная функция тех же неизвестных. Далее, $A_{ii} = A_iB_i = \lambda A_i^2$ и, по предположению, A_{ii} есть полный квадрат. Значит, $\lambda = \mu^2$, где μ — рациональная функция. Итак, $A_{ii} = (\mu A_i)^2$. Здесь слева стоит многочлен. Но квадрат несократимой дроби не может быть многочленом. Значит, $\mu A_i = c_i$ — многочлен. Применяя разложение, данное в задаче 541, находим

$$\begin{aligned} D_{2n+2} &= -\sum_{i,j=1}^{2n+1} A_{ij}a_{i,2n+2}a_{2n+2,j} = \sum_{i,j=1}^{2n+1} A_iB_ja_{i,2n+2}a_{j,2n+2} = \\ &= \left(\sum_{i=1}^{2n+1} A_ia_{i,2n+2}\right)\left(\sum_{j=1}^{2n+1} B_ja_{j,2n+2}\right) = \\ &= \lambda\left(\sum_{i=1}^{2n+1} A_ia_{i,2n+2}\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{2n+1} C_ia_{i,2n+2}\right)^2. \end{aligned}$$

Этим утверждение задачи доказано. Это доказательство не дает удобного приема для фактического вычисления многочлена, квадрату которого равен данный кососимметрический определитель четного порядка. Такие правила даны в задачах 545 и 546.

544. Указание. Рассмотреть два члена, в одном из которых подстановка индексов имеет цикл $(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_h)$ (h — нечетно и больше единицы), а в другом — цикл $(\alpha_h\alpha_{h-1}\ldots\alpha_2\alpha_1)$. Случай $h = 1$ рассмотреть отдельно.

545. Указание. При доказательстве 1) по данной паре N_1, N_2 приведенных пфаффовых произведений восстановить запись (1) подстановки искомого члена, имея в виду, что если записать этот член в виде

$$\pm a_{\alpha_1,\alpha_2}a_{\alpha_2,\alpha_3}\ldots a_{\alpha_h,\alpha_1}a_{\beta_1,\beta_2}\ldots a_{\mu_k,\mu_1},$$

то N_1' состоит из элементов, занимающих в этом произведении нечетные места, а N_2' — четные места. Например, в N_1 берем элемент с первым индексом $\alpha_1 = 1$. Второй его индекс α_2 даст второй элемент первого цикла. В N_2 берем элемент, один из индексов которого есть α_2. Если другой индекс $-\alpha_1$, то цикл замыкается, если α_3, то это третий член цикла, и т. д. Показать, что в полученной подстановке все циклы четной длины. При доказательстве 2) заметить, что $N_1 = N_1'$ и $N_2 = N_2'$. Знак члена определить как $(-1)^s$, где s — число циклов соответствующей подстановки. Утверждение 3) вывести из 1), 2) и теоремы предыдущей задачи.

546. Указание. Показать, что в каждое слагаемое агрегата p_n входит один и только один элемент n-го столбца D_n; в каждом слагаемом p_n расположить элементы в порядке возрастания вторых индексов и показать, что если вынести за скобки элемент a_{in} из всех слагаемых, его содержащих, то в скобках останется p_{in} со знаком $(-1)^{n-1-i} = (-1)^{i-1}$.

547. $p_2 = a_{12}$; $p_4 = a_{23}a_{14} - a_{13}a_{24} + a_{12}a_{34}$;

$$\begin{aligned} p_6 = a_{34}a_{25}a_{16} - a_{24}a_{35}a_{16} + a_{23}a_{45}a_{16} - a_{34}a_{15}a_{26} + a_{14}a_{35}a_{26} - a_{13}a_{45}a_{26} + \\ + a_{24}a_{15}a_{36} - a_{14}a_{25}a_{36} + a_{12}a_{45}a_{36} - a_{23}a_{15}a_{46} + a_{13}a_{25}a_{46} - a_{12}a_{35}a_{46} + \\ + a_{23}a_{14}a_{56} - a_{13}a_{24}a_{56} + a_{12}a_{34}a_{56}. \end{aligned}$$

548. $1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (n-1)$.

549. Указание. Определитель

$$D' = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} & x_1 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ -a_{1n} & \ldots & a_{nn} & x_n \\ -x_1 & \ldots & -x_n & 0 \end{vmatrix},$$

полученный окаймлением D, разложить по формуле задачи 541 и приравнять к квадрату пфаффова агрегата для D', применив к нему формулу задачи 546. В полученном равенстве положить $x_i = x_j = 1$, $x_k = 0$ при $i \neq k \neq j$.

550. Указание. Используя то, что произведение двух многочленов, отличных от нуля, само отлично от нуля, показать, что если $D = AB$ — предполагаемое разложение и какой-нибудь член многочлена A содержит a_{11}, то никакой член B не содержит элементов первой строки (столбца). Вывести отсюда, что, каковы бы ни были $i, j = 1, 2, \ldots, n$, найдется член в A, содержащий a_{1i}, но никакой член B не содержит a_{ij}.

551. Указание. При доказательстве 2) определить $\overline{\Delta}_{n-k}$, исходя из нумерации $t_1, t_2, \ldots, t_{\binom{n}{n-k}}$ сочетаний из n чисел $1, 2, \ldots, n$ по $n-k$, которая связана с нумерацией $s_1, s_2, \ldots, s_{\binom{n}{k}}$, определяющей Δ_k так, что t_i содержит те $n-k$ чисел, которые не входят в s_i. Если σ_i — сумма чисел из сочетания s_i, то вынести из i-й строки и i-го столбца $\left(i = 1, 2, \ldots, \binom{n}{n-k}\right)$ определителя $\overline{\Delta}_{n-k}$ множитель $(-1)^{\sigma}i$. При доказательстве пункта 4), используя равенства пункта 3) и неприводимость D, установленную в предыдущей задаче, а также степень D и Δ_k относительно элементов a_{ij}, показать, что $\Delta_k = cD^{\binom{n-1}{k-1}}$, где c не зависит от элементов a_{ij}. Для определения c показать, что как Δ_k, так и $D^{\binom{n-1}{k-1}}$ содержат член $(a_{11}a_{22}\ldots a_{nn})^{\binom{n-1}{k-1}}$ с коэффициентом, равным единице.

552. $P_n = Q_n = 1$. Указание. Показать, что $Q_n = P_n^2$.

553. Указание. Показать, что $d_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} p_{ki}p_{kj}\varphi(k)$, где p_{ij} — те же, что и в предыдущей задаче.

Отдел 2. Системы линейных уравнений

554. $x_1 = x_2 = 1,\ x_3 = x_4 = -1.$

555. $x_1 = -2,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1,\ x_4 = -1.$

556. $x_1 = 1,\ x_2 = x_3 = 2,\ x_4 = 0.$

557. $x_1 = 2,\ x_2 = -2,\ x_3 = 1,\ x_4 = -1.$

558. $x_1 = -0{,}4,\ x_2 = -1{,}2,\ x_3 = 3{,}4,\ x_4 = 1.$

559. $x = 2/3,\ y = -1,\ z = 3/2,\ t = 0.$

560. $x = -3,\ y = 0,\ z = -1/2,\ t = 2/3.$

561. $x = 2,\ y = -3,\ z = -3/2,\ t = 1/2.$

562. Система решений не имеет.

563. Система решений не имеет.

564. Изменение нумерации неизвестных вообще не переводит систему в эквивалентную, но при решении системы оно допустимо при условии, что после решения системы мы возвращаемся к исходной нумерации. Указание. Показать, что после преобразований типа а), б), в) любое уравнение новой системы линейно выражается через уравнения старой системы и обратно.

567. $x_1 = -1,\ x_2 = 3,\ x_3 = -2,\ x_4 = 2.$

568. $x_1 = 2,\ x_2 = 1,\ x_3 = -3,\ x_4 = 1.$

569. $x_1 = -2,\ x_2 = 1,\ x_3 = 4,\ x_4 = 3.$

570. $x_1 = 0,\ x_2 = 2,\ x_3 = 1/3,\ x_4 = -3/2.$

571. $x_1 = 1/2,\ x_2 = -2/3,\ x_3 = 2,\ x_4 = -3.$

572. $x_1 = 104\frac{6}{7},\ x_2 = 7\frac{4}{7},\ x_3 = -10,\ x_4 = 1.$

573. $x_1 = 5,\ x_2 = 4,\ x_3 = 3,\ x_4 = 2,\ x_5 = 1.$

574. $x_1 = 3,\ x_2 = -5,\ x_3 = 4,\ x_4 = -2,\ x_5 = 1.$

575. $x_1 = 1/2,\ x_2 = -2,\ x_3 = 3,\ x_4 = 2/3,\ x_5 = -1/5.$ Указание. Принять за новые неизвестные $2x_1, 3x_4, 5x_5$.

576. $x_1 = 5,\ x_2 = 4,\ x_3 = -3,\ x_4 = 3,\ x_5 = -2.$

577. $x_1 = 2,\ x_2 = -3/2,\ x_3 = 4,\ x_4 = 3,\ x_5 = 5/2.$

578. Система неопределенна, т.е. имеет бесконечно много решений; x_1 и x_2 можно выразить через x_3 и x_4 так: $x_1 = 6 - 26x_3 + 17x_4$, $x_2 = -1 + 7x_3 - 5x_4$, причем x_3 и x_4 могут принимать любые значения.

579. Система неопределенна. Общее решение: $x_1 = \frac{1}{10}(6 - 15x_2 - x_4)$, $x_3 = \frac{1}{5}(1 + 4x_4)$, где x_2 и x_4 принимают любые значения.

580. Система противоречива, т.е. не имеет решений.

581. Система решений не имеет.

584. Если $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — все элементы поля, то многочлен $f(x) = (x - a_1) \times (x - a_2) \ldots (x - a_n)$ равен нулю как функция, но имеет коэффициент единицу при x^n.

585. $f(x) = x^4 - 5x + 3.$ **586.** $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 7.$

587. При заданном асимптотическом направлении через любые $n+1$ различные точки плоскости, из которых никакие две не лежат на прямой асимптотического направления, можно провести параболу не выше n-й степени и притом только одну.

588. $y = 3x^3 - 5x^2 + 1.$ **589.** $x = y^4 - 3y^3 - 5y + 5.$

590. $x = \frac{1}{4}(-a+b+c+d),\ y = \frac{1}{4}(a-b+c+d),\ z = \frac{1}{4}(a+b-c+d),\ t = \frac{1}{4}(a+b+c-d).$

591. $$x=\frac{1}{2}\left(-\frac{c-ad}{b-a}+\frac{c'-a'b}{b'-a'}+\frac{c''-a''d}{b''-a''}\right),$$
$$y=\frac{1}{2}\left(\frac{c-ad}{b-a}-\frac{c'-a'd}{b'-a'}+\frac{c''-a''d}{b''-a''}\right),$$
$$z=\frac{1}{2}\left(\frac{c-ad}{b-a}+\frac{c'-a'd}{b'-a'}-\frac{c''-a''d}{b''-a''}\right),$$
$$t=d-\frac{1}{2}\left(\frac{c-ad}{b-a}+\frac{c'-a'd}{b'-a'}+\frac{c''-a''d}{b''-a''}\right).$$

Указание. Для доказательства единственности решения показать, что определитель системы равен $2(b-a)(b'-a')(b''-a'')\neq 0$. Для нахождения решения из первого, второго и третьего уравнений вычесть четвертое, умноженное соответственно на a, a' и a''.

592. $$x=\frac{1}{A}(ap-bq-cr-ds),\quad y=\frac{1}{A}(bp+aq-dr+cs),$$
$$z=\frac{1}{A}(cp+dq+ar-bs),\quad t=\frac{1}{A}(dp-cq+br+as),$$

где $A=a^2+b^2+c^2+d^2$. Указание. Воспользоваться задачей 468.

593. $x_k=(-1)^kP_k$, где P_k — сумма всевозможных произведений по k чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Указание. Воспользоваться задачей 346.

594. $$x_k=\frac{\prod\limits_{i\neq k}(b-a_i)}{\prod\limits_{i\neq k}(a_k-a_i)}=\frac{f(b)}{(b-a_k)f'(a_k)},$$ где $f(x)=(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)$.

595. $$x_k=(-1)^{n+k}\sum_{i=1}^{n}\frac{b_if_{ik}}{(a_i-a_1)\ldots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\ldots(a_i-a_n)},$$ где f_{ik} есть сумма всевозможных произведений по $n-k$ из $n-1$ чисел $a_1,\ldots, a_{i-1}, a_{i+1},\ldots,a_n$.

596. $$x_k=\frac{1}{(a_k-a_1)\ldots(a_k-a_{k-1})(a_k-a_{k+1})\ldots(a_k-a_n)}\sum_{i=1}^{n}b_if_{ki},$$ где f_{ki} есть сумма всевозможных произведений по $n-i$ из $n-1$ чисел $a_1,\ldots,a_{k-1},a_{k+1},\ldots,a_n$.

597. $x_k=\dfrac{(-1)^kP_{n-k}}{n!}$, где P_i $(i=1,2,\ldots,n-1)$ есть сумма всевозможных произведений по i из n чисел $1,2,\ldots,n$ и $P_0=1$.

598. $$x_k=\frac{c_k}{a-b}-\frac{b\sum\limits_{i=1}^{n}c_i}{(a-b)[a+(n-1)b]}.$$

599. $x_k=\prod\limits_{i\neq k}\dfrac{b-a_i}{a_k-a_i}$. Указание. Определитель системы представить в виде произведения двух определителей.

600. Решение. $\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\cdots$. Поэтому $1=(1+h_1x+h_2x^2+\cdots)\left(1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{4}x^3+\cdots\right)$, откуда $h_1=\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}h_1-h_2=\frac{1}{3}$,

$\frac{1}{3}h_1 - \frac{1}{2}h_2 + h_3 = \frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}h_1 - \frac{1}{3}h_2 + \frac{1}{2}h_3 - h_4 = \frac{1}{5}$, ... Из первых n уравнений по правилу Крамера получим требуемое выражение для h_n.

602. Указание. Исходя из тождества

$$1 = (1 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \cdots)\left(1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \cdots\right),$$

получим систему уравнений для определения $b_1, b_2, b_3, \ldots$ Для доказательства того, что $b_{2n-1} = 0$ при $n > 1$, заметить, что $b_1 = -1/2$ и что функция

$$\frac{x}{e^x - 1} - 1 + \frac{1}{2}x = \frac{\frac{1}{2}x(e^{x/2} + e^{-x/2}) - (e^{x/2} - e^{-x/2})}{e^{x/2} - e^{-x/2}}$$

четная.

603. Указание. Используя равенства $b_1 = -\frac{1}{2}$, $b_{2n-1} = 0$ при $n > 1$, полученные в предыдущей задаче, положить $b_{2n} = c_n$ и в тождестве

$$1 = \left(1 - \frac{1}{2}x + c_1x^2 + c_2x^4 + c_3x^6 + \cdots\right)\left(1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \cdots\right)$$

приравнять коэффициенты отдельно при четных и при нечетных степенях x.

604. Указание. Для установления требуемого равенства в тождестве

$$(x+1)^n = x^n + C_n^{n-1}x^{n-1} + C_n^{n-2}x^{n-2} + \cdots + C_n^1 x + x^0$$

положить $x = 1, 2, 3, \ldots, k-1$ и полученные равенства сложить. В установленном равенстве заменить n на $n-1, n-2, \ldots, 2, 1$ и из полученной системы n линейных уравнений относительно $s_0(k), s_1(k), \ldots, s_{n-1}(k)$ найти $s_{n-1}(k)$.

605. $$l_n = \begin{vmatrix} \frac{2}{3!} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \frac{4}{5!} & \frac{1}{2!} & 1 & \ldots & 0 \\ \frac{6}{7!} & \frac{1}{4!} & \frac{1}{2!} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{2n}{(2n+1)!} & \frac{1}{(2n-2)!} & \frac{1}{(2n-4)!} & \ldots & \frac{1}{2!} \end{vmatrix}.$$

Указание. Получить тождество

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = x\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\right)(1 + l_1x^2 + l_2x^4 + \cdots).$$

606. $f_n = \begin{vmatrix} \dfrac{2}{3!} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dfrac{4}{5!} & \dfrac{1}{3!} & 1 & \dots & 0 \\ \dfrac{6}{7!} & \dfrac{1}{5!} & \dfrac{1}{3!} & \dots & 0 \\ \hdotsfor{5} \\ \dfrac{2n}{(2n+1)!} & \dfrac{1}{(2n-1)!} & \dfrac{1}{(2n-3)!} & \dots & \dfrac{1}{3!} \end{vmatrix}.$

607. $a_n = \dfrac{1}{n!} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{1!} & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dfrac{1}{2!} & \dfrac{1}{1!} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dfrac{1}{3!} & \dfrac{1}{2!} & \dfrac{1}{1!} & 1 & \dots & 0 \\ \hdotsfor{6} \\ \dfrac{1}{n!} & \dfrac{1}{(n-1)!} & \dfrac{1}{(n-2)!} & \dfrac{1}{(n-3)!} & \dots & \dfrac{1}{1!} \end{vmatrix}.$

Указание. Получить тождество

$$1 = (1 - a_1x + a_2x^2 - a_3x^3 + \cdots)\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right),$$

получить уравнения для определения $a_1, a_2, \dots, a_n$.

608. 2. **609.** 3. **610.** 3. **611.** 2.

612. При $\lambda = 0$ ранг матрицы равен 2, при $\lambda \neq 0$ он равен 3.

613. При $\lambda = 3$ ранг равен 2, при $\lambda \neq 3$ ранг равен 3.

619. 3. **620.** 2. **621.** 3. **622.** 2.

629. Указание. Используя линейное выражение всех столбцов матрицы A через столбцы, проходящие через минор d, показать, что если $d = 0$, то строки матрицы A, проходящие через d, линейно зависимы.

630. Если $0 \leqslant r \leqslant n-2$, то $\hat{r} = 0$. Если $r = n-1$, то $\hat{r} = 1$. Если $r = n$, то $\hat{r} = n$. Указание. Использовать задачу 509 или задачу 747.

631. Решение. Докажем 1). При $r = 0$ все главные миноры первого и второго порядков равны нулю. Если $A = (a_{ij})_n$, то $a_{11} = a_{22} = \dots = a_{nn} = 0$ и

$$\begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{vmatrix} = a_{ii}a_{jj} - a_{ij}^2 = -a_{ij}^2 = 0$$

для любых $i, j = 1, 2, \dots, n$; $i < j$. Отсюда $a_{ij} = 0$, $i, j = 1, 2, \dots, n$; $A = 0$; ранг A равен нулю, что и нужно доказать. При $r = n-1$ имеем $M_{n-1} \neq 0$, $M_n = |A| = 0$, ранг A равен $n-1$.

Пусть $0 < r \leqslant n-2$. Главный минор $M_r \neq 0$. Переставляя соответственно строки и столбцы матрицы A (что не нарушит симметрии матрицы A и не изменит ее ранга), мы можем перевести минор M_r в левый верхний угол матрицы A.

Для доказательства 1) достаточно показать, что все миноры $(r+1)$-го порядка, окаймляющие M_r, равны нулю.

Пусть M_{ij} — минор, полученный из M_r окаймлением i-й строкой и j-м столбцом $(i, j > r)$. По условию $M_{ij} = 0$ при $i = j$. Пусть $i \neq j$ и D — определитель, полученный из M_r окаймлением i-й и j-й строками и i-м и j-м столбцами. По условию $D = 0$. Пусть C — матрица определителя D. Предположим, что $M_{ij} \neq 0$. Тогда ранг C равен $r+1$ и строки матрицы C с номерами $1, 2, \ldots, r, i$ линейно независимы. По симметрии C столбцы с теми же номерами также линейно независимы. По задаче 629 минор M_{ii}, стоящий на пересечении этих строк и столбцов, отличен от нуля, что противоречит условию. Утверждение 2) следует из 1) или прямо из задачи 629.

632. Указание. Использовать предыдущую задачу.

633. Указание. Использовать решение задачи 631.

634. Указание. Воспользоваться предыдущей задачей.

636. $(1, 4, -7, 7)$. **637.** $x = (0, 1, 2, -2)$. **638.** $x = (1, 2, 3, 4)$.

639. Линейно независима. **640.** Линейно зависима.

641. Линейно независима. **642.** Линейно зависима.

643. Линейно зависима. **644.** Линейно независима.

651. Указание. Предположив, что $\sum_{i=1}^{s} \lambda_i a_i = 0$, где не все λ_i равны нулю, и выбрав среди λ_i наибольший по модулю коэффициент λ_j, показать, что j-я координата взятой линейной комбинации отлична от нуля.

656. Указание. Предположив, что два вектора $\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j (i > j)$ линейно выражаются через предыдущие, найти выражение вектора $\boldsymbol{b}$ из выражения $\boldsymbol{a}_i$ и подставить найденное выражение в выражение $\boldsymbol{a}_i$.

657. Указание. К системе $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ приписать впереди $\boldsymbol{b}_1$ и вычеркнуть векторы, линейно выражающиеся через предыдущие; к полученной системе приписать впереди $\boldsymbol{b}_2$ и снова вычеркнуть векторы, линейно выражающиеся через предыдущие, и т. д.

Воспользоваться предыдущей задачей.

658. Указание. Использовать задачи 653 и 657.

659. Указание. Считая данную подсистему упорядоченной, приписать после нее все векторы системы и вычеркнуть все векторы, линейно выражающиеся через предыдущие.

662. Таких чисел подобрать нельзя.

664. Указание. При доказательстве 3) использовать задачу 663, а также задачу 658, пункт в).

665. $\lambda = 15$. **666.** λ — любое число.

667. λ — любое число. **668.** λ не равно 12.

669. Такого значения λ не существует.

670. В задаче 665 векторы $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ компланарны (т. е. лежат в одной плоскости), но не коллинеарны (т. е. не лежат на одной прямой). При $\lambda = 15$ вектор $\boldsymbol{b}$ попадает в ту же плоскость и выражается через $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$, а при $\lambda \neq 15$ он не лежит в этой плоскости и не выражается через эти векторы. В задаче 666 векторы $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ не компланарны и любой вектор трехмерного пространства через них линейно выражается. В задаче 667 векторы $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ не коллинеарны и лежат в плоскости $4x_1 - 3x_2 = 0$.

При любом значении λ вектор $\boldsymbol{b}$ лежит в той же плоскости и линейно выражается через $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$.

В задаче 668 векторы $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ не коллинеарны, а вектор $\boldsymbol{b}$ не компланарен $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$. При $\lambda = 12$ вектор $\boldsymbol{a}_3$ компланарен $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ и вектор $\boldsymbol{b}$ через $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ не выражается. При $\lambda \neq 12$ векторы $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ не компланарны и $\boldsymbol{b}$ через них выражается.

В задаче 669 векторы $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ лежат в плоскости $3x_2 - x_3 = 0$. С изменением λ от $-\infty$ до $+\infty$ конец вектора $\boldsymbol{b}$ описывает прямую $x_2 = 2$, $x_3 = 5$, параллельную этой плоскости. Вектор $\boldsymbol{b}$ ни при каком значении λ не лежит в указанной плоскости и не выражается через $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$.

672. Таких систем четыре: 1) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3$; 2) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_4$; 3) $\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$; 4) $\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_4$.

673. 1) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$; 2) $\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$.

674. Любые два вектора образуют базу.

675. 1) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_4$; 2) $\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_4$; 3) $\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$.

676. Любые три вектора, кроме $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_5$ и $\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{a}_5$, образуют базу.

677. Единственная база будет в том и только в том случае, когда либо вся система совпадает со своей базой, либо все векторы системы, не входящие в ее базу, равны нулю.

678. Две базы.

679. Базу образуют, например, векторы $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_4$; $\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2$.

680. Одну из баз образуют векторы $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$; $\boldsymbol{a}_4 = 2\boldsymbol{a}_1 - 3\boldsymbol{a}_2 + 4\boldsymbol{a}_3$.

681. Одну из баз образуют векторы $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_5$; $\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_5$, $\boldsymbol{a}_4 = 3\boldsymbol{a}_1 + 4\boldsymbol{a}_2 - 2\boldsymbol{a}_5$.

682. Указание. При доказательстве 1) в равенство $\sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j x_j = 0$ подставить выражения $x_i = \sum\limits_{j=1}^{r} \lambda_{ij} x_j$ $(i = r+1, r+2, \ldots, n)$ и показать, что $\alpha_j = -\sum\limits_{i=r+1}^{n} \alpha_i \lambda_{i,j}$, $j = 1, 2, \ldots, r$.

Пользуясь этим, показать, что если $\boldsymbol{a}_i = (-\lambda_{i,1}, -\lambda_{i,2}, \ldots, -\lambda_{i,r}, 0, \ldots, 1, \ldots, 0)$, $i = r+1, r+2, \ldots, n$, где равная единице координата занимает $(r+i)$-е место, и $\boldsymbol{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, то $\boldsymbol{a} = \sum\limits_{i=r+1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{a}_i$.

При доказательстве 2)–4) использовать задачу 664.

683. $2f_1 - 3f_2 - f_3 = 0$, $f_1 - 3f_2 + f_4 = 0$.

684. $f_1 - 2f_2 - f_3 = 0$, $f_1 - 3f_2 + f_4 = 0$, $3f_1 - 8f_2 - f_5 = 0$.

685. Формы линейно независимы. Основной системы линейных соотношений не существует.

686. $2f_1 - f_2 - f_3 = 0$,
$2f_1 - 2f_2 + f_4 - f_5 = 0$.

687. $2f_1 - f_2 = 0$,
$f_1 - f_3 - f_4 + f_5 = 0$.

688. Указание. Использовать задачу 661 или 657.

689. Например, общее решение $x_1 = \dfrac{x_3 - 9x_4 - 2}{11}$, $x_2 = -\dfrac{-5x_3 + x_4 + 10}{11}$; частное решение $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$.

690. Например, общее решение $x_3 = 22x_1 - 33x_2 - 11$, $x_4 = -16x_1 + 24x_2 + 8$; частное решение: $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = x_4 = 0$.

691. Общее решение: $x_3 = 1 - 3x_1 - 4x_2$, $x_4 = 1$; частное решение: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$.

692. Система несовместна.

693. Система имеет единственное решение $x_1 = 3$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$.

694. Общее решение: $x_3 = 6 - 15x_1 + 10x_2$, $x_4 = -7 + 18x_1 - 12x_2$; частное решение: $x_1 = x_2 = x_3 = 1$, $x_4 = -1$.

695. Общее решение: $x_3 = \dfrac{34x_1 - 17x_2 - 29}{5}$, $x_4 = \dfrac{16x_1 - 8x_2 - 16}{5}$; частное решение: $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 22/5$, $x_4 = 8/5$.

696. Общее решение: $x_3 = 2 - \dfrac{27}{13}x_1 + \dfrac{9}{13}x_2$, $x_4 = -1 + \dfrac{3}{13}x_1 - \dfrac{1}{13}x_2$; частное решение: $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = 8/13$, $x_4 = -11/13$.

697. Общее решение: $x_1 = \dfrac{-6 + 8x_4}{7}$, $x_2 = \dfrac{1 - 13x_4}{7}$, $x_3 = \dfrac{15 - 6x_4}{7}$; частное решение: $x_1 = -2$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = -1$.

698. Система несовместна.

699. Общее решение: $x_3 = -1 - 8x_1 + 4x_2$, $x_4 = 0$, $x_5 = 1 + 2x_1 - x_2$; частное решение: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -1$, $x_4 = 0$, $x_5 = 1$.

700. Общее решение: $x_3 = 13$, $x_4 = 19 - 3x_1 - 2x_2$, $x_5 = -34$; частное решение: $x_1 = 1$, $x_2 = 8$, $x_3 = 13$, $x_4 = 0$, $x_5 = -34$.

701. Общее решение: $x_3 = -\dfrac{9}{2} - x_1 - 2x_2$, $x_4 = -\dfrac{25}{2} - 2x_1 - 4x_2$, $x_5 = -\dfrac{15}{2} - 2x_1 - 4x_2$; частное решение: $x_1 = 1$, $x_2 = -3$, $x_3 = \dfrac{1}{2}$, $x_4 = -\dfrac{5}{2}$, $x_5 = \dfrac{5}{2}$.

702. Общее решение: $x_3 = \dfrac{4}{3}x_1 + \dfrac{2}{3}x_2$, $x_4 = -\dfrac{14}{3}x_1 - \dfrac{7}{3}x_2 - 1$, $x_5 = \dfrac{4}{3}x_1 + \dfrac{2}{3}x_2 + 2$; частное решение: $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = -8$, $x_5 = 4$.

703. Система имеет единственное решение: $x_1 = 3$, $x_2 = 0$, $x_3 = -5$, $x_4 = 11$.

704. Система несовместна.

705. Указание. При доказательстве минимальности числа $n - r$ свободных неизвестных воспользоваться связью решений неоднородной и соответствующей однородной систем уравнений и тем, что число неизвестных однородной системы, могущих принимать произвольные, не зависящие друг от друга значения, равно максимальному числу линейно независимых решений и, значит, не зависит от выбора этих неизвестных.

706. $x_1 = \dfrac{1}{2}x_4 + \dfrac{31}{6}$, $x_2 = \dfrac{2}{3}$, $x_3 = -\dfrac{1}{2}x_4 - \dfrac{7}{6}$.

707. $x_1 = x_4 - \dfrac{53}{18}x_5 + \dfrac{20}{9}$, $x_2 = -\dfrac{5}{2}x_4 + \dfrac{5}{6}x_5 - \dfrac{5}{3}$, $x_3 = \dfrac{2}{9}x_5 - \dfrac{1}{9}$.

708. Системы несовместны.

709. Система имеет единственное решение: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -4$, $x_4 = -3$.

710. $x_1 = -\dfrac{12}{205}$, $x_2 = \dfrac{176}{123} + \dfrac{4}{3}x_3$, $x_4 = \dfrac{97}{205}$. Здесь x_3 — свободное неизвестное.

711. $x_1 = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{7}{12}x_2 - \dfrac{5}{4}x_3 - \dfrac{7}{8}x_5$, $x_4 = 1 - \dfrac{1}{2}x_5$, где x_2, x_3, x_5 — свободные неизвестные.

712. При $\lambda \neq 0$ система несовместна. При $\lambda = 0$ она совместна и общее решение имеет вид

$$x_1 = \frac{-5x_3 - 13x_4 - 3}{2}, \quad x_2 = \frac{-7x_3 - 19x_4 - 7}{2}.$$

713. При $\lambda = 0$ система несовместна. При $\lambda \neq 0$ она совместна и общее решение имеет вид $x_1 = \dfrac{4-\lambda}{5\lambda} - \dfrac{3}{5}x_3$, $x_2 = \dfrac{9\lambda - 16}{5\lambda} - \dfrac{8}{5}x_3$, $x_4 = \dfrac{1}{\lambda}$.

714. При $\lambda = 1$ система несовместна. При $\lambda \neq 1$ она совместна и общее решение имеет вид $x_1 = \dfrac{43 - 8\lambda}{8 - 8\lambda} - \dfrac{9}{8}x_3$, $x_2 = \dfrac{5}{4 - 4\lambda} + \dfrac{1}{4}x_3$, $x_4 = \dfrac{5}{\lambda - 1}$.

715. Система совместна при любом значении λ. При $\lambda = 8$ общее решение имеет вид $x_2 = 4 + 2x_1 - 2x_4$, $x_3 = 3 - 2x_4$, где x_1, x_4 — свободные неизвестные. При $\lambda \neq 8$ общее решение имеет вид $x_1 = 0$, $x_2 = 4 - 2x_4$, $x_3 = 3 - 2x_4$, где x_4 — свободное неизвестное.

716. Система совместна при любых значениях λ. При $\lambda = 8$ общее решение имеет вид $x_3 = -1$, $x_4 = 2 - x_1 - \dfrac{3}{2}x_2$, где x_1, x_2 — свободные неизвестные. При $\lambda \neq 8$ общее решение имеет вид $x_2 = \dfrac{4}{3} - \dfrac{2}{3}x_1$, $x_3 = -1$, $x_4 = 0$, где x_1 — свободное неизвестное.

717. При $(\lambda - 1)(\lambda + 2) \neq 0$ система имеет единственное решение: $x_1 = x_2 = x_3 = \dfrac{1}{\lambda + 3}$. При $\lambda = 1$ общее решение имеет вид $x_1 = 1 - x_2 - x_3$, где x_2 и x_3 — свободные неизвестные. При $\lambda = -2$ система несовместна.

718. При $(\lambda - 1)(\lambda + 3) \neq 0$ система имеет единственное решение: $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1/(\lambda + 3)$. При $\lambda = 1$ общее решение имеет вид $x_1 = 1 - x_2 - x_3 - x_4$, где x_2, x_3, x_4 — свободные неизвестные. При $\lambda = -3$ система несовместна.

719. При $\lambda(\lambda + 3) \neq 0$ система имеет единственное решение: $x_1 = \dfrac{2 - \lambda^2}{\lambda(\lambda + 3)}$, $x_2 = \dfrac{2\lambda - 1}{\lambda(\lambda + 3)}$, $x_3 = \dfrac{\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda - 1}{\lambda(\lambda + 3)}$. При $\lambda = 0$ и при $\lambda = -3$ система несовместна.

720. При $\lambda(\lambda + 3) \neq 0$ система имеет единственное решение: $x_1 = 2 - \lambda^2$, $x_2 = 2\lambda - 1$, $x_3 = \lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda - 1$. При $\lambda = 0$ общее решение имеет вид $x_1 = -x_2 - x_3$, где x_2, x_3 — свободные неизвестные. При $\lambda = -3$ общее решение имеет вид $x_1 = x_2 = x_3$, где x_3 — свободное неизвестное.

721. Если a, b, c попарно различны, то система имеет единственное решение:

$$x = \frac{(b-d)(c-d)}{(b-a)(c-a)}, \quad y = \frac{(d-a)(d-c)}{(b-a)(b-c)}, \quad z = \frac{(d-a)(d-b)}{(c-a)(c-b)}.$$

Если среди чисел a, b, c, d имеется только два различных, причем $a \neq b$ или $a \neq c$ или $b \neq c$, то решение зависит от одного параметра. Например, в случае $d = a \neq b = c$ общее решение имеет вид $x = \dfrac{b-d}{b-a} = 1$, $y = \dfrac{a-c}{b-a}z$, где z — свободное неизвестное, играющее роль упомянутого параметра, определяющего решение.

Если $a = b = c = d$, то решение зависит от двух параметров, общее решение имеет, например, вид $x = 1 - y - z$, где y, z — свободные неизвестные. Если среди чисел a, b, c два различны и d не равно ни одному из них или если $a = b = c \neq d$, то система несовместна.

722. При $D = abc - a - b - c + 2 \neq 0$ система имеет единственное решение: $x = (b-1)(c-1)/D$, $y = (a-1)(c-1)/D$, $z = (a-1)(b-1)/D$. В этом случае нулевые значения могут иметь какие-либо два неизвестных одновременно, причем третье неизвестное и соответствующий параметр равны единице. Например, $x = y = 0$, $z = c = 1$. Если $D = 0$, причем одно и только одно из чисел a, b, c отлично от единицы, то решение зависит от одного параметра, например, при $a \neq b = c = 1$ общее решение имеет вид $x = 0$, $y = 1 - z$. В этом случае одно или два неизвестных обязательно равны нулю.

Если $a = b = c = 1$, то общее решение имеет вид $x = 1 - y - z$, причем одно или два из неизвестных могут равняться нулю. Если $D = 0$ и ни одно из чисел a, b, c не равно единице, то система несовместна. Случай $D = 0$, причем одно и только одно из чисел a, b, c равно единице, невозможен.

723. Если $D = abc - a - b - c + 2 \neq 0$, то система имеет единственное решение:

$$x = \frac{abc - 2bc + b + c - a}{D}, \quad y = \frac{abc - 2ac + a + c - b}{D},$$
$$z = \frac{abc - 2ab + a + b - c}{D}.$$

Если $D = 0$ и только одно из чисел a, b, c отлично от единицы, то решение зависит от одного параметра, например, при $a \neq b = c = 1$ общее решение имеет вид $x = 1$, $y = -z$, где z — свободное неизвестное. Если $a = b = c = 1$, то решение зависит от двух параметров и общее решение имеет вид $x = 1 - y - z$, где y, z — свободные неизвестные. Если $D = 0$, причем все числа a, b, c отличны от единицы, то система несовместна. Случай $D = 0$ и только одно из чисел a, b, c равно единице невозможен. Указание. Для доказательства несовместности системы в случае $D = 0$ при условии, что все числа a, b, c отличны от единицы, показать справедливость тождеств: $D - D_x = 2(b-1)(c-1)$, $D - D_y = 2(a-1)(c-1)$, $D - D_z = 2(a-1)(b-1)$, где D_x, D_y, D_z — соответственно числители в написанных выше выражениях для x, y, z.

724. Например, общее решение: $x_1 = 8x_3 - 7x_4$, $x_2 = -6x_3 + 5x_4$. Фундаментальная система решений:

x_1	x_2	x_3	x_4
8	−6	1	0
−7	5	0	1

725. Общее решение: $x_3 = -\frac{5}{2}x_1 + 5x_2$, $x_4 = \frac{7}{2}x_1 - 7x_2$. Фундаментальная система решений:

x_1	x_2	x_3	x_4
1	0	$-5/2$	$+7/2$
0	1	$+5$	-7

726. Общее решение: $x_4 = -\dfrac{9x_1 + 6x_2 + 8x_3}{4}$, $x_5 = \dfrac{3x_1 + 2x_2 + 4x_3}{4}$. Фундаментальная система решений:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	0	0	$-9/4$	$3/4$
0	1	0	$-3/2$	$1/2$
0	0	1	-2	1

727. Система имеет только нулевое решение. Фундаментальной системы решений не существует.

728. Общее решение: $x_4 = \dfrac{-9x_1 + 3x_2 - 10x_3}{11}$, $x_5 = \dfrac{-3x_1 + x_2 + 4x_3}{11}$. Фундаментальная система решений:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	0	0	$-9/11$	$-3/11$
0	1	0	$3/11$	$1/11$
0	0	1	$-10/11$	$4/11$

729. Система имеет только нулевое решение.

730. Общее решение: $x_1 = x_4 - x_5$, $x_2 = x_4 - x_6$, $x_3 = x_4$. Фундаментальная система решений:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
1	1	1	1	0	0
-1	0	0	0	1	0
0	-1	0	0	0	1

731. Общее решение: $x_1 = 0$, $x_2 = \dfrac{x_3 - 2x_5}{3}$, $x_4 = 0$, где x_3, x_5 — свободные неизвестные. Фундаментальная система решений:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	$1/3$	1	0	0
0	$-2/3$	0	0	1

732. Общее решение: $x_1 = -3x_3 - 5x_5$, $x_2 = 2x_3 + 3x_5$, $x_4 = 0$, где x_3, x_5 — свободные неизвестные. Фундаментальная система решений:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
-3	2	1	0	0
-5	3	0	0	1

735. $x_1 = 13c$, $x_2 = 2c$, $x_3 = 7c$.

736. $x_1 = 4c_1$, $x_2 = 8c_2$, $x_3 = -3c_1 + 3c_2$, $x_4 = c_1 - c_2$.

737. $x_1 = 2c_1$, $x_2 = c_2$, $x_3 = 3c_3$, $x_4 = -3c_1 - c_2 - 4c_3$, $x_5 = -c_3$.

738. $x_1 = 14c_1$, $x_2 = 42c_2$, $x_3 = 42c_3$, $x_4 = -3c_1 + 3c_2 - 9c_3$, $x_5 = -8c_1 + 8c_2 - 10c_3$.

739. $x_1 = c_1 - 7c_2$, $x_2 = 2c_1 + 6c_2$, $x_3 = c_1 + 3c_2$, $x_4 = -4c_1$, $x_5 = -5c_2$.

740. $x_1 = 11c_1$, $x_2 = 33c_2$, $x_3 = -24c_1 - 57c_2$, $x_4 = 5c_1 + 5c_2$, $x_5 = -c_1 - c_2$.

741. Строки матрицы A не образуют, строки матрицы B образуют.

742. Четвертая строка вместе с любыми двумя из первых трех строк образует фундаментальную систему, а остальные системы строк не образуют.

743. Указание. В первой части задачи применить результат задачи 734. Во второй части показать, что если значения свободных неизвестных в некоторой системе решений дают линейно зависимые строки, то и вся система решений линейно зависима.

748. Указание. Приписать к матрице системы сверху любую из ее строк и определитель полученной матрицы разложить по первой строке. Использовать задачу 746.

749. Частное решение: $x_1 = -2$, $x_2 = -6$, $x_3 = 7$. Общее решение: $x_1 = -2c$, $x_2 = -6c$, $x_3 = 7c$.

750. Частное решение: $x_1 = 3$, $x_2 = -2$, $x_3 = 0$. Общее решение: $x_1 = 3c$, $x_2 = -2c$, $x_3 = 0$.

751. Частное решение: $x_1 = -6$, $x_2 = 11$, $x_3 = -9$, $x_4 = 4$. Общее решение: $x_1 = 6c$, $x_2 = -11c$, $x_3 = 9c$, $x_4 = -4c$.

752. Частное решение: $x_1 = 3$, $x_2 = 0$, $x_3 = 4$, $x_4 = 0$. Общее решение: $x_1 = 3c$, $x_2 = 0$, $x_3 = 4c$, $x_4 = 0$.

754. а) $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 2b_i \ (i = 1, 2, \ldots, s)$; б) $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = \lambda b_i \ (i = 1, 2, \ldots, s)$.

755. В обоих случаях необходимым и достаточным условием является однородность данной системы.

756. При условии, что сумма коэффициентов данной линейной комбинации равна единице.

757. Первое неизвестное в любом решении принимает значение, равное нулю. Если коэффициенты при всех неизвестных, кроме первого и, например, второго, равны нулю, то второе неизвестное принимает определенное значение, которое находится из уравнения, содержащего ненулевой коэффициент при втором неизвестном, если отбросить там все члены с другими неизвестными; в этом случае все неизвестные, начиная с третьего, могут принимать любые значения. Если же по крайней мере три неизвестных (например, x_1, x_2 и x_3) встречаются с ненулевыми коэффициентами, то все неизвестные, кроме первого, могут принимать любые значения, причем их значения в каждом решении связаны одним соотношением, полученным из любого уравнения системы, содержащего ненулевой коэффициент при втором неизвестном, если выбросить член с первым неизвестным.

Равенство нулю всех коэффициентов при первом неизвестном или при всех неизвестных, начиная со второго, при условиях задачи невозможно.

758. Необходимым и достаточным условием для этого является то, чтобы ранг матрицы из коэффициентов при неизвестных уменьшался на единицу при вычеркивании k-го столбца, иными словами, чтобы k-й столбец не был линейной комбинацией остальных столбцов этой матрицы.

759. Ранг расширенной матрицы (из коэффициентов при неизвестных и свободных членов) должен при вычеркивании k-го столбца уменьшаться на единицу.

760. $e = ad - bc = 0$.

761. Одно условие, выражающее неравенство нулю определителя D порядка r, и $(s-r)(n-r+1)$ условий, выражающих равенство нулю определителей $(r+1)$-го порядка, окаймляющих D.

Последние условия независимы, так как каждое содержит элемент, не входящий в другие условия, стоящий на пересечении окаймляющих строки и столбца и имеющий множитель $D \neq 0$.

762. Либо по крайней мере два из чисел, a, b, c, d, e равны -1, либо ни одно из них не равно -1, но тогда

$$\frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} + \frac{c}{c+1} + \frac{d}{d+1} + \frac{e}{e+1} = 1.$$

763. $\lambda = af + bg + ch = 0$. Указание. Сложить все уравнения, предварительно помножив их соответственно на $\lambda x, \lambda y, \lambda z, \lambda t$. Получив условие $\lambda = 0$, определитель системы можно вычислить как кососимметрический по задаче 547.

764. $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$ **765.** $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

766. $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$

Это условие является достаточным, если в случае трех параллельных прямых считать их общей точкой несобственную (бесконечно удаленную) точку данного направления. Если не допускать несобственных точек, необходимым и достаточным условием будет равенство рангов двух матриц

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}.$$

767. Ранг матрицы $\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ \dots & \dots & \dots \\ x_n & y_n & 1 \end{pmatrix}$ должен быть менее трех.

768. При допущении несобственных точек ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_n & b_n & c_n \end{pmatrix}$$

должен быть менее трех. При недопущении несобственных точек ранг приведенной матрицы должен совпадать с рангом матрицы

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ \multicolumn{2}{c}{\dots\dots} \\ a_n & b_n \end{pmatrix}.$$

769. $\begin{vmatrix} x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2+y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$ **770.** $\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

771. $x^2+y^2-4x-1=0$. Центр в точке $(2,0)$. Радиус равен $\sqrt{5}$.

772. Указание. Использовать ответ задачи 770.

773. $\begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 & x_4y_4 & y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \\ x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 & x_5 & y_5 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

774. Гипербола $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{25} = 1$.

775. $2x^2+7y^2+y-8=0$. Это — эллипс с центром в точке $(0,-1/14)$ и полуосями длины $\dfrac{15}{28}\sqrt{14}$ и $\dfrac{15}{14}$, причем бóльшая ось параллельна оси абсцисс, а малая лежит на оси ординат.

776. $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

777. $\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, или $4x+y+3z-8=0$.

778. Если допускать несобственные (бесконечно удаленные) точки, то

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Если же не допускать несобственных точек, то ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{pmatrix}$$

не должен изменяться при вычеркивании последнего столбца.

779. Ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & b_n & c_n & d_n \end{pmatrix}$$

равен двум и не изменяется при вычеркивании последнего столбца.

780. $$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & x & y & z & 1 \\ x_1^2+y_1^2+z_1^2 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2+z_2^2 & x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2+z_3^2 & x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4^2+y_4^2+z_4^2 & x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

781. $x^2 + y^2 + z^2 - x - 2 = 0$. Центр находится в точке $(1/2, 0, 0)$. Радиус равен $3/2$.

782. Система трех линейных уравнений с двумя неизвестными, в которой расширенная матрица и три матрицы коэффициентов при неизвестных для любой пары уравнений все имеют ранг 2.

783. Система трех линейных уравнений с двумя неизвестными, в которой ранги матриц из коэффициентов при неизвестных в любой паре уравнений равны двум, а ранг расширенной матрицы равен трем.

784. Система трех уравнений с тремя неизвестными, в которой ранги всех матриц из коэффициентов при неизвестных любых двух, а также всех трех уравнений равны двум, а ранг расширенной матрицы равен трем.

785. Система четырех линейных уравнений с тремя неизвестными, в которой ранги матриц из коэффициентов при неизвестных любых трех уравнений равны трем, а ранг расширенной матрицы равен 4.

786. Четыре плоскости проходят через одну точку, причем никакие три из них не проходят через одну прямую.

787. Если не рассматривать несобственные (бесконечно удаленные) прямые и плоскости, то уравнения вида $0x + 0y = a$ и $0x + 0y + 0z = a$ при a, не равном нулю, не имеют геометрического смысла, а при $a = 0$ удовлетворяются координатами любой точки плоскости или пространства. Исключая уравнения такого вида и обозначая ранг матрицы из коэффициентов при неизвестных через r, а ранг расширенной матрицы через r_1, имеем:

Для систем с двумя неизвестными:

1. $r = 2$, $r_1 = 3$. Система не имеет решений. Прямые не проходят через одну точку, причем хотя бы две прямые различны и пересекаются.

2. $r = r_1 = 2$. Система имеет единственное решение. Прямые проходят через одну точку, причем хотя бы две прямые различны.

3. $r = 1$, $r_1 = 2$. Система не имеет решений. Прямые параллельны или совпадают, причем хотя бы две прямые различны.

4. $r = r_1 = 1$. Решение зависит от одного параметра. Все прямые совпадают.

Для систем с тремя неизвестными:

1. $r = 3$, $r_1 = 4$. Система не имеет решений. Плоскости не проходят через одну точку, причем хотя бы три из них различны и проходят через одну точку.

2. $r = r_1 = 3$. Система имеет единственное решение. Плоскости проходят через одну точку, причем хотя бы три из них не проходят через одну прямую.

3. $r = 2$, $r_1 = 3$. Система не имеет решений. Плоскости не проходят через одну точку, причем хотя бы три плоскости различны и любые три различные плоскости либо не имеют общей точки, либо проходят через одну прямую.

4. $r = r_1 = 2$. Решение зависит от одного параметра. Все плоскости проходят через одну прямую, причем хотя бы две из них различны.

5. $r = 1$, $r_1 = 2$. Система не имеет решений. Плоскости параллельны или совпадают, причем хотя бы две из них различны.

6. $r = r_1 = 1$. Решение зависит от двух параметров. Все плоскости совпадают.

Отдел 3. Матрицы и квадратичные формы

788. $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$. **789.** $\begin{pmatrix} a\alpha + b\gamma & a\beta + b\delta \\ c\alpha + d\gamma & c\beta + d\delta \end{pmatrix}$. **790.** $\begin{pmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 3 & 10 & 0 \\ 2 & 9 & -7 \end{pmatrix}$.

791. $\begin{pmatrix} 11 & -22 & 29 \\ 9 & -27 & 32 \\ 13 & -17 & 26 \end{pmatrix}$. **792.** $\begin{pmatrix} 10 & 17 & 19 & 23 \\ 17 & 23 & 27 & 35 \\ 16 & 12 & 9 & 20 \\ 7 & 1 & 3 & 10 \end{pmatrix}$.

793. $\begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & -5 & -10 \\ 7 & 7 & 7 & 7 \\ 10 & 9 & 8 & 7 \end{pmatrix}$. **794.** $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. **795.** $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

796. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. **797.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

798. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. **799.** $\begin{pmatrix} 13 & -14 \\ 21 & -22 \end{pmatrix}$. **800.** $\begin{pmatrix} 304 & -61 \\ 305 & -62 \end{pmatrix}$.

801. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ при n четном, $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ при n нечетном.

802. $\begin{pmatrix} \cos n\alpha & -\sin n\alpha \\ \sin n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix}$. **803.** $\begin{pmatrix} \lambda_1^k & & & 0 \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$.

804. $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. **805.** $\begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$.

806. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 & \ldots & \dfrac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & 3 & \ldots & \dfrac{(n-1)n}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & \dfrac{(n-2)(n-1)}{2} \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$, где n — порядок данной матрицы.

807. $\begin{pmatrix} 1 & C_{n-1}^1 & C_{n-1}^2 & C_{n-1}^3 & \ldots & C_{n-1}^{n-1} \\ 0 & 1 & C_{n-1}^1 & C_{n-1}^2 & \ldots & C_{n-1}^{n-2} \\ 0 & 0 & 1 & C_{n-1}^1 & \ldots & C_{n-1}^{n-3} \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$.

808. $\begin{pmatrix} 3197 & -1266 \\ 7385 & -922 \end{pmatrix}$. **809.** $\begin{pmatrix} 190 & 189 & -189 \\ 126 & 127 & -126 \\ 252 & 252 & -251 \end{pmatrix}$.

811. а) i-я и j-я строки произведения поменяются местами; б) к i-й строке произведения прибавится j-я строка, умноженная на c; в) i-й и j-й столбцы произведения поменяются местами; г) к i-му столбцу произведения прибавится j-й столбец, умноженный на c.

822. $\begin{pmatrix} a & 2b \\ 3b & a+3b \end{pmatrix}$, где a и b — любые числа.

823. $\begin{pmatrix} a & 3b \\ -5b & a+9b \end{pmatrix}$, где a и b — любые числа.

824. $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$. **825.** $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.

826. $c = \cos\dfrac{2k\pi}{n} + i\sin\dfrac{2k\pi}{n}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$, n — порядок матрицы A.

827. $f(A) = \begin{pmatrix} 21 & -23 & 15 \\ -13 & 4 & 10 \\ -9 & 22 & 25 \end{pmatrix}$. **828.** $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

830. Указание. Матрицы порядка n считать n^2-мерными векторами.

831. Указание. Применить задачу 814. Замечание. В задаче предполагается, что элементы матриц A и B — числа. Для поля характеристики $p \neq 0$ результат неверен. Так, для матриц порядка p

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \hdotsfor{5} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \text{ и } B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \hdotsfor{6} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p-1 & 0 \end{pmatrix}$$

имеем $AB - BA = E$.

832. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$, где a, b, c — любые числа, удовлетворяющие соотношению $a^2 + bc = 0$.

833. Указание. Используя задачу 829, доказать, что если $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, то $A^k = (a+d)^{k-1}A$.

834. $\pm E$ или $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$, где $a^2 + bc = 1$.

835. Если $|A| \neq 0$, то $X = 0$; если $|A| = 0$, но $A \neq 0$, причем отношение элементов первого столбца матрицы A к соответствующим элементам второго столбца $= \alpha$, то $X = \begin{pmatrix} x & y \\ -\alpha x & -\alpha y \end{pmatrix}$ при любых x, y; если оба элемента второго столбца матрицы A равны нулю, но хотя бы один элемент первого столбца отличен от нуля, то $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x & y \end{pmatrix}$ с любыми x, y; если $A = 0$, то X — любая матрица.

836. $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$. **837.** $\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$. **838.** $\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

839. $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$. **840.** $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}$.

841. $\begin{pmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$. **842.** $\begin{pmatrix} -7/3 & 2 & -1/3 \\ 5/3 & -1 & -1/3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

843. $\dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. **844.** $\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

845. $\begin{pmatrix} 22 & -6 & -26 & 17 \\ -17 & 5 & 20 & -13 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$. **846.** $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \hdotsfor{5} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

847. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & \dots & (-1)^{n-1} \\ 0 & 1 & -1 & 1 & \dots & (-1)^{n-2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \dots & (-1)^{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$, n — порядок данной матрицы.

848. $\begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

849. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a^2 & -a & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -a^3 & a^2 & -a & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (-a)^n & (-a)^{n-1} & (-a)^{n-2} & (-a)^{n-3} & \dots & a & 1 \end{pmatrix}$.

850. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

851. $\dfrac{1}{n+1}\begin{pmatrix} n & n-1 & n-2 & n-3 & \dots & 1 \\ n-1 & 2(n-1) & 2(n-2) & 2(n-3) & \dots & 2 \\ n-2 & 2(n-2) & 3(n-2) & 3(n-3) & \dots & 3 \\ n-3 & 2(n-3) & 3(n-3) & 4(n-3) & \dots & 4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \end{pmatrix}$.

852. $\begin{pmatrix} 2-n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix}$.

853. $\dfrac{1}{n-1}\begin{pmatrix} 2-n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2-n & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2-n & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 2-n \end{pmatrix}$.

854. $-\dfrac{1}{a(n+a)}\begin{pmatrix} 1-n-a & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-n-a & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1-n-a & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1-n-a \end{pmatrix}$.

855. $-\dfrac{1}{s}\begin{pmatrix} \dfrac{1-a_1s}{a_1^2} & \dfrac{1}{a_1a_2} & \dfrac{1}{a_1a_3} & \dots & \dfrac{1}{a_1a_n} \\ \dfrac{1}{a_2a_1} & \dfrac{1-a_2s}{a_2^2} & \dfrac{1}{a_2a_3} & \dots & \dfrac{1}{a_2a_n} \\ \dfrac{1}{a_3a_1} & \dfrac{1}{a_3a_2} & \dfrac{1-a_3s}{a_3^2} & \dots & \dfrac{1}{a_3a_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{1}{a_na_1} & \dfrac{1}{a_na_2} & \dfrac{1}{a_na_3} & \dots & \dfrac{1-a_ns}{a_n^2} \end{pmatrix}$,

где $s = 1 + \dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \dots + \dfrac{1}{a_n}$.

857. $\begin{pmatrix} -7 & 5 & 12 & -19 \\ 3 & -2 & -5 & 8 \\ 41 & -30 & -69 & 111 \\ -59 & 43 & 99 & -159 \end{pmatrix}$.

858. $\dfrac{1}{ns}\begin{pmatrix} 1-s & 1+s & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1-s & 1+s & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1-s & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1+s & 1 & 1 & \dots & 1 & 1-s \end{pmatrix}$, где $s = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Указание. В системе уравнений для элементов k-го столбца обратной матрицы из каждого уравнения от первого до $(n-1)$-го вычесть следующее и полученные $n-1$ уравнений сложить. Все неизвестные выразить через k-е.

859. $\dfrac{1}{nhs}\begin{pmatrix} h-s & h+s & h & \dots & h & h \\ h & h-s & h+s & \dots & h & h \\ h & h & h-s & \dots & h & h \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ h+s & h & h & \dots & h & h-s \end{pmatrix}$,

где $s = na + h \cdot \dfrac{n(n-1)}{2}$ — сумма элементов какой-нибудь строки (или столбца) данной матрицы.

860. $\dfrac{1}{n}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \varepsilon^{-1} & \varepsilon^{-2} & \varepsilon^{-3} & \dots & \varepsilon^{-(n-1)} \\ 1 & \varepsilon^{-2} & \varepsilon^{-4} & \varepsilon^{-6} & \dots & \varepsilon^{-2(n-1)} \\ 1 & \varepsilon^{-3} & \varepsilon^{-6} & \varepsilon^{-9} & \dots & \varepsilon^{-3(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \varepsilon^{-(n-1)} & \varepsilon^{-2(n-1)} & \varepsilon^{-3(n-1)} & \dots & \varepsilon^{-(n-1)^2} \end{pmatrix}$.

Указание. Написать уравнения с неизвестными $x_1, x_2, \dots, x_n$ для определения элементов k-го столбца обратной матрицы. Каждое уравнение помножить на такую степень ε, чтобы коэффициент при определенном неизвестном x_j обратился в единицу. Полученные уравнения сложить.

861. $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. **862.** $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$. **863.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

864. $\begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$. **865.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$. **866.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

867. Общий вид решения: $\begin{pmatrix} \dfrac{2+3c_1}{2} & \dfrac{3+3c_2}{2} \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix}$, c_1 и c_2 — любые числа.

868. Общий вид решения: $\begin{pmatrix} c_1 & \dfrac{2-3c_1}{4} \\ c_2 & \dfrac{9-3c_2}{4} \end{pmatrix}$, c_1 и c_2 — произвольные числа.

869. Решения не существует.

870. Общий вид решения: $\begin{pmatrix} 7-3c_1 & 5-3c_2 & 7-3c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ 5c_1-9 & 5c_2-3 & 5c_3-7 \end{pmatrix}$, c_1, c_2, c_3 — произвольные числа.

871. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

872. В матрице A^{-1} соответственно: а) поменяются местами i-й и j-й столбцы; б) i-й умножится на $1/c$; в) из j-го столбца вычтется i-й, умноженный на c.

При преобразовании столбцов матрицы A аналогично указанному меняются строки матрицы A^{-1}.

879. $A^{-1} = \begin{pmatrix} E_k & -U \\ 0 & E_l \end{pmatrix}$.

881. При умножении A слева на H_1 все строки A сдвигаются на одну позицию вверх, причем первая строка исчезает, а последняя заменяется нулевой.

При умножении A справа на H_1 аналогичное изменение происходит со сдвигом столбцов вправо. При умножении на H_{-1} слева (справа) происходит такой же сдвиг строк вниз (соответственно столбцов влево).

890. Условие $AB = -BA$ удовлетворяется, например, для матриц

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Указание. При построении матриц A и B воспользоваться указанием к задаче 1747.

897. Указание. Использовать значение взаимного определителя (задача 506) и свести задачу к предыдущей.

898. Указание. Использовать указание к предыдущей задаче.

899. Указание. Использовать тождество задачи 502 или формулу Бинэ—Коши в задаче 499.

900. Указание. Использовать тождество задачи 504.

901. Указание. Использовать формулу Бинэ—Коши в задаче 499.

902. Указание. Использовать формулу Бинэ—Коши в задаче 499.

903. Указание. Использовать задачи 896 и 507.

904. Указание. Использовать задачу 507.

905. Диагональные элементы равны ± 1.

906. Диагональные элементы по модулю равны единице.

913. Указание. Использовать формулу Бинэ—Коши, данную в задаче 499, или указание к той же задаче.

915. Указание. Воспользоваться предыдущей задачей.

920. Указание. Воспользоваться задачей 913.

921. Указание. Применить теорему Лапласа, неравенство Коши—Буняковского и формулу Бинэ—Коши (см. задачи 503 и 499).

922. Указание. Пусть n — число строк A, B, C; k — число столбцов B; l — число столбцов C. Проверить выполнение неравенства в случаях $k + l > n$ и ранг $A < k + l \leqslant n$.

Показать, что при $k + l = n$ задача совпадает с предыдущей. Проверить, что неравенство обращается в равенство при $k + l \leqslant n$ и дополнительном условии $B' \cdot C = 0$. Наконец, в случае, когда ранг $A = k + l < n$, дополнить A до квадратной матрицы $(A, D) = P = (B, Q)$, где $Q = (C, D)$, при помощи $n - k - l$ линейно независимых столбцов так, чтобы $A'D = 0$ (это можно сделать путем построения фундаментальной системы решений однородной системы уравнений с матрицей A'), применить предыдущий случай к матрицам $P = (A, D)$ и $Q = (C, D)$ и принять во внимание, что $P = (B, Q)$ и $|D'D| > 0$.

923. Указание. Несколько раз применить неравенство предыдущей задачи.

924. Указание. Применить повторно неравенства задачи 922.

925. Указание. Применить рассуждения, аналогичные приведенным в указании к задаче 922.

926. Указание. Повторно применить неравенство предыдущей задачи и использовать ответ задачи 532.

927. Перестановка i-й и j-й строк или i-го и j-го столбцов получается при умножении на матрицу, элементы которой $p_{kk} = 1$ для k, не равного i, j, $p_{ij} = p_{ji} = 1$, а все остальные нули.

Умножение i-й строки (столбца) на число $c \neq 0$ получается при умножении на матрицу, отличающуюся от единичной лишь тем, что i-й элемент главной диагонали a_{ii} равен c. Прибавление к i-й строке j-й строки, умноженной на c, получается при умножении слева на матрицу, отличающуюся от единичной лишь тем, что элемент $p_{ij} = c$.

Для аналогичного преобразования столбцов надо умножить на аналогичную матрицу, у которой $p_{ij} = c$.

Указание. Для определения вида искомых матриц проделать данное элементарное преобразование над единичной матрицей, порядок которой равен числу строк матрицы A в случае преобразования строк и числу столбцов A в случае преобразования столбцов. Проверить, что полученные матрицы удовлетворяют требованиям задачи.

928. Указание. Использовать задачу 927 и показать, что преобразование типа а) можно заменить несколькими преобразованиями типов б) и в).

929. Указание. Воспользоваться задачами 617 и 927.

930. Указание. Использовать задачу 623.

931. Указание. Применить к матрице A задачу 929 и воспользоваться задачами 915, 930 и 914.

933. Указание. Использовать задачу 927.

934. $\begin{pmatrix} 24 & 3 & -4 & -8 \\ -23/2 & -1 & 2 & 7/2 \\ 10 & 1 & -2 & -3 \\ -5 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. **935.** $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1/4 & -9/4 & 3/2 \\ 1/4 & 3/4 & -1/2 \end{pmatrix}$.

936. $\begin{pmatrix} -1/6 & 1/2 & -7/6 & 10/3 \\ -7/6 & -1/2 & 5/6 & -5/3 \\ 3/2 & 1/2 & -1/2 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$.

938. Указание. Для доказательства необходимости принять за B любой ненулевой столбец матрицы A.

939. Указание. При доказательстве необходимости принять за B матрицу из любых r линейно независимых столбцов матрицы A; i-й столбец матрицы C составить из коэффициентов в выражении i-го столбца A через столбцы B. Использовать задачу 914.

941. Указание. Использовать задачи 626 и 931.

943. Указание. Целочисленными элементарными преобразованиями привести данную матрицу A к нормальной матрице. Для этого, выбрав наименьший по абсолютной величине из не равных нулю элементов, путем целочисленных элементарных преобразований заменить элементы строки и столбца, в которых стоит этот элемент, их остатками при делении на него. Повторять так, пока все элементы i-й строки и j-го столбца, кроме a_{ij}, не обратятся в нуль. Если какой-то элемент a_{kl} в новой матрице не делится на a_{ij}, то к i-й строке прибавить k-ю и вновь перейти к остатку. Повторять так, пока все элементы некоторых p-й строки и q-го столбца, кроме a_{pq}, будут нулями и все другие элементы будут делиться на a_{pq}. Затем перевести a_{pq} в левый верхний угол и начать аналогичные преобразования с уменьшенной матрицей, полученной вычеркиванием первой строки и первого столбца, и т. д. Для доказательства единственности нормальной формы обозначим через d_k наибольший общий делитель всех элементов матрицы A, ранга r с m строками и n столбцами при $k = 1, 2, \ldots, r$ и положим $d_k = 0$ при $r < k \leqslant m, n$. Показать, что делители миноров d_k не изменяются при целочисленных элементарных преобразованиях и что элементы $e_1, e_2, \ldots$ на главной диагонали нормальной матрицы, эквивалентной A, связаны с делителями миноров равенствами $d_k = e_1, e_2, \ldots, e_k$ $(k \leqslant m, n)$, откуда

$$e_k = \frac{d_k}{d_{k-1}} \ (k = 1, 2, \ldots, r) \text{ и } e_k = 0 \text{ для } r < k \leqslant m, n.$$

944. Указание. При доказательстве возможности требуемого представления использовать задачу 927. При доказательстве единственности из двух представлений $A = P_1R_1 = P_2R_2$ вывести, что матрица $C = P_2^{-1}P_1 = R_2R_1^{-1}$ является целочисленной, унимодулярной и треугольной, элементы которой на главной диагонали положительны и, значит, равны единице. Затем, приравнивая в равенстве $CR_1 = R_2$ $(k+1)$-й, $(k+2)$-й и т.д. элементы k-й строки, показать, что все элементы матрицы C справа от главной диагонали равны нулю, т.е. $C = E$.

945. Указание. Использовать задачу 927.

949. Решение. Приведем матрицу A к верхней треугольной матрице C следующими элементарными преобразованиями строк: $a_{11} = d_1 \neq 0$. Вычитая первую строку, умноженную на подходящие числа, из остальных строк, приведем матрицу A к виду

$$A^1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^1 & a_{23}^1 & \dots & a_{2n}^1 \\ \hdotsfor{5} \\ 0 & a_{n2}^1 & a_{n3}^1 & \dots & a_{nn}^1 \end{pmatrix};$$

так как при этом миноры, содержащие первую строку, не изменились, то $d_2 = a_{11}a_{22}^1 \neq 0$, откуда $a_{22}^1 \neq 0$. Вычитая вторую строку матрицы A^1 с подходящими множителями из нижележащих строк, обратим в нуль вторые элементы этих строк и т.д. После r шагов обратятся в нуль все элементы первых r столбцов, стоящие ниже диагонали. Так как ранг полученной матрицы $A^{(r)} = C$ равен рангу A, т.е. равен r, то все элементы последних $n-r$ строк матрицы C равны нулю и, следовательно, C — верхняя треугольная матрица. В силу задачи 927 $C = PA$, где P — произведение ряда нижних треугольных матриц, т.е. снова нижняя треугольная матрица $A = P^{-1}C = BC$, где $B = P^{-1}$ — нижняя треугольная матрица. Этим существование разложения вида (2) доказано.

Пусть дано любое представление вида (2). По формуле для миноров произведения матриц (задача 913) имеем

$$A\begin{pmatrix} 1,2,\dots,k-1,i \\ 1,2,\dots,k-1,k \end{pmatrix} = \\ = \sum_{j_1<j_2<\dots<j_k} B\begin{pmatrix} 1,2,\dots,k-1,i \\ j_1,j_2,\dots,j_{k-1},j_k \end{pmatrix} C\begin{pmatrix} j_1,j_2,\dots,j_{k-1},j_k \\ 1,2,\dots,k-1,k \end{pmatrix}.$$

Но первые k столбцов матрицы C содержат лишь один минор k-го порядка, отличный от нуля, поэтому

$$A\begin{pmatrix} 1,2,\dots,k-1,i \\ 1,2,\dots,k-1,k \end{pmatrix} = B\begin{pmatrix} 1,2,\dots,k-1,i \\ 1,2,\dots,k-1,k \end{pmatrix} C\begin{pmatrix} 1,2,\dots,k \\ 1,2,\dots,k \end{pmatrix} = \\ = b_{11}b_{22}\dots b_{k-1,k-1}b_{ik}c_{11}c_{22}\dots c_{kk} \quad (i = k, k+1, \dots, n;\ k = 1,2,\dots,r). \text{(а)}$$

Полагая здесь $i = k$, найдем

$$d_k = b_{11}b_{22}\dots b_{kk}c_{11}c_{22}\dots c_{kk} \quad (k = 1,2,\dots,r). \qquad \text{(б)}$$

Деля (б) на аналогичное равенство с заменой k на $k-1$, получим (3). Деля (а) на (б), получим первую из формул (4). Вторая формула получается аналогично.

Пусть D — любая неособенная диагональная матрица с элементами $d_1, d_2, \dots, d_n$ на главной диагонали. Тогда $A = BC = (BD)(D^{-1}C)$. Матрица BD получается из B умножением столбцов на $d_1, d_2, d_3, \dots, d_n$. Матрица $D^{-1}C$ получается из C умножением строк на $D_1^{-1}, D_2^{-1}, \dots, D_n^{-1}$. Поэтому диагональные элементы B и C

можно брать любыми при условиях (3). В произведении BC элементы последних $n-r$ столбцов B умножаются на элементы последних $n-r$ строк C. Поэтому, если одни из этих элементов положить равными нулю, то другие можно взять любыми.

951. Указание. Применить решение задачи 949 и показать, что при условиях $b_{kk} = c_{kk} = \sqrt{\dfrac{d_k}{d_{k-1}}}$ условия (3) удовлетворяются и условия (4) дают: $b_{ik} = c_{ki}$ $(i = k+1, k+2, \ldots, n,\ k = 1, 2, \ldots, r)$.

952. $AB = C = (C_{ij})$, где $C_{11} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}$, $C_{12} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}$, $C_{21} = (8)$, $C_{22} = (9, 1)$,
$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 4 \\ 9 & 9 & 6 \\ 8 & 9 & 1 \end{pmatrix}.$$

954. Указание. Рассмотреть произведение i-й клеточной строки на i-й клеточный столбец.

957. P — квадратная клеточная матрица с квадратными единичными клетками порядков $m_1, m_2, \ldots, m_s$ по главной диагонали, причем клетка, стоящая на пересечении i-й клеточной строки и j-го клеточного столбца, совпадает с матрицей X, а все остальные внедиагональные клетки равны нулю. Аналогично Q — клеточная матрица с квадратными единичными клетками порядков $n_1, n_2, \ldots, n_t$ на главной диагонали, матрицей Y на пересечении j-й клеточной строки i-го клеточного столбца и нулевыми клетками на других местах.

958. Указание. Из второй клеточной строки вычесть первую, умноженную слева на матрицу CA^{-1}, и, пользуясь предыдущей задачей, показать, что при этом ранг не изменится.

959. Решение. Тот же ряд элементарных преобразований, который переводит матрицу R в R_1, переводит матрицу $T = \begin{pmatrix} A & B \\ -C & -CA^{-1}B \end{pmatrix}$ в матрицу $T_1 = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ 0 & X - CA^{-1}B \end{pmatrix}$. По предыдущей задаче ранг T равен n. Так как элементарные преобразования не изменяют ранга матрицы, то ранг $T_1 =$ рангу $T = n$ и ранг $A_1 =$ рангу $A = n$. Поэтому $X - CA^{-1}B = 0$; $X = CA^{-1}B$.

960. $A^{-1} = \begin{pmatrix} -20 & 8 & 11 \\ 17 & -7 & -9 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. **961.** $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$.

962. $X = \begin{pmatrix} 9 & 8 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

963. Решение. Свойства а) и б) легко следуют из определения кронекеровского произведения. Для доказательства в) будем писать в качестве индексов при элементах кронекеровского произведения не номера пар, а сами пары (причем числа одной пары будем писать рядом и без скобок). Положим $AB = F$, $CD = G$,

$F \times G = H$, $A \times C = P$, $B \times D = Q$. Тогда

$$\begin{aligned} h_{i_1 i_2, j_1 j_2} = f_{i_1 j_1} g_{i_2 j_2} &= \sum_{s=1}^{m} a_{i_1 s} b_{s j_1} \sum_{i=1}^{n} c_{i_2 t} d_{t j_2} = \\ &= \sum_{s,t} a_{i_1 s} c_{i_2 t} b_{s j_1} d_{t j_2} = \sum_{s,t} p_{i_1 i_2, st} q_{st, j_1 j_2}, \end{aligned}$$

откуда $H = PQ$.

964. а) Для правого прямого произведения надо взять лексикографическое расположение пар: $(1,1),(1,2),\ldots,(1,n),(2,1),(2,2)\ldots,(2,n),\ldots,(m,n)$. Для левого — расположение $(1,1),(2,1),\ldots,(m,1),(1,2),(2,2),\ldots,(m,2),\ldots,(m,n)$, получающееся путем лексикографической записи тех же пар, читаемых справа налево. Свойства б), в), г) непосредственно вытекают из определения. Свойство д) следует из соотношений в) предыдущей и г) настоящей задачи. Свойства левого произведения вытекают из соответствующих свойств правого при помощи соотношений б).

965. Указание. Показать, что изменение нумерации пар не меняет определителя $|A \times B|$, и, пользуясь свойством в) задачи 963, представить его в виде $|A \times B| = |(AE_m) \times (E_n B)| = |A \times E_n| \cdot |E_m \times B| = |A \cdot\!\times E_n| \cdot |E_m \times\!\cdot B|$.

966. Указание. Использовать положение, что из $|A| = 0$ следует ранг $\widehat{A} \leqslant 1$, доказанное в задаче 630.

967. Решение. Положим $AB = C$ и обозначим соответственно через A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} алгебраические дополнения, а через M_{ij}, N_{ij}, P_{ij} — миноры элементов в i-й строке и j-м столбце *матриц* A, B, C.

Тогда, применяя выражение минора произведения двух матриц через миноры этих матриц (задача 913), находим

$$\begin{aligned} \widehat{c}_{ij} = C_{ji} &= (-1)^{j+i} P_{ji} = (-1)^{j+i} \sum_{k=1}^{n} M_{jk} N_{ki} = \\ &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k} M_{jk} (-1)^{k+i} N_{ki} = \sum_{k=1}^{n} A_{jk} B_{ki} = \sum_{k=1}^{n} \widehat{B}_{ik} \widehat{A}_{kj}, \end{aligned}$$

откуда $\widehat{C} = \widehat{B} \cdot \widehat{A}$.

Для неособенных матриц A и B тот же результат получается короче так: по предыдущей задаче $\widehat{A} = |A| \cdot A^{-1}$, отсюда $(\widehat{AB}) = |AB|(AB)^{-1} = |A| \cdot |B| B^{-1} A^{-1} = \widehat{B}\widehat{A}$. Для матриц с числовыми элементами случай вырожденных матриц получается предельным переходом. Многочлен от λ, равный определителю $|A + \lambda E|$, имеет степень n и не более n корней. Поэтому можно взять последовательность чисел: $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lim\limits_{k \to \infty} \lambda_k = 0$ такую, что матрицы $A + \lambda_k E$ и $B + \lambda_k E$ будут неособенными. По доказанному $[(A + \lambda_k E)(B + \lambda_k E)]^{\widehat{}} = (B + \lambda_k E)^{\widehat{}} \cdot (A + \lambda_k E)$. Переходя к пределу при $k \to \infty$, получим $(\widehat{AB}) = \widehat{B}\widehat{A}$.

968. Указание. а) Следует из задачи 913, б) доказать для случая, когда $|A| = 0$, пользуясь задачей 747, а для $|A| \neq 0$ — соотношением $\widetilde{A} = |A| \cdot CA'^{-1}C$, где C — диагональная матрица с элементами $1, -1, 1, -1, \ldots$ на главной диагонали.

969. Указание. Применить задачу 913.

970. Например, нумерация сочетаний в лексикографическом порядке, при котором сочетание $i_1 < i_2 < \cdots < i_p$ предшествует сочетанию $j_1 < j_2 < \cdots < j_p$, если первая отличная от нуля разность $j_1 - i_1, j_2 - i_2, \ldots, j_p - i_p$ положительна.

971. Указание. Доказать предложенное равенство сначала для треугольной матрицы A, пользуясь тем, что изменение порядка нумерации сочетаний не меняет определителя ассоциированной матрицы A_p, и применяя предыдущую задачу. Общий случай свести к треугольным матрицам при помощи задач 928 и 969.

972. Решение. В силу задачи 956 из $AB = E_n$ следует $A_pB_p = E_N$, где $N = C_n^p$; отсюда

$$\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_p\leqslant n} A\begin{pmatrix} j_1, & j_2, & \ldots, & j_p \\ i_1, & i_2, & \ldots, & i_p \end{pmatrix} B\begin{pmatrix} i_1, & i_2, & \ldots, & i_p \\ k_1, & k_2, & \ldots, & k_p \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{cases} 1, & \text{если } \sum\limits_{s=1}^{p}(j_s - k_s)^2 = 0 \\ 0, & \text{если } \sum\limits_{s=1}^{p}(j_s - k_s)^2 > 0 \end{cases} \quad \left(1 \leqslant \begin{matrix} j_1 < j_2 < \cdots < j_p \\ k_1 < k_2 < \cdots < k_p \end{matrix} \leqslant n\right). \qquad (2)$$

С другой стороны, по теореме Лапласа находим

$$\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_p\leqslant n} A\begin{pmatrix} j_1, & j_2, & \ldots, & j_p \\ i_1, & i_2, & \ldots, & i_p \end{pmatrix} (-1)^{\sum\limits_{s=1}^{p}(i_s+k_s)} A\begin{pmatrix} k'_1, & k'_2, & \ldots, & k'_{n-p} \\ i'_1, & i'_2, & \ldots, & i'_{n-p} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{cases} |A|, & \text{если } \sum\limits_{s=1}^{p}(j_s - k_s)^2 = 0, \\ 0, & \text{если } \sum\limits_{s=1}^{p}(j_s - k_s)^2 > 0, \end{cases} \qquad (3)$$

где $i'_1 < i'_2 < \cdots < i'_{n-p}$ вместе с $i_1 < i_2 < \cdots < i_p$ и $k'_1 < k'_2 < \cdots < k'_{n-p}$ вместе с $k_1 < k_2 < \cdots < k_p$ составляют полную систему индексов $1, 2, \ldots, n$.

Так как система линейных уравнений с неособенной матрицей A_p при заданных свободных членах имеет единственное решение и так как правые части равенства (3) отличаются от правых частей соответствующих равенств (2) только множителем $|A|$, то таким же множителем должны отличаться и левые части, откуда и вытекают требуемые равенства (1).

973. Указание. Применить теорему Лапласа и задачу 903.

974. Указание. Применить теорему Лапласа и задачу 903.

975. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}$. **976.** $\begin{pmatrix} \lambda+1 & 0 \\ 0 & \lambda^3+\lambda^2-2\lambda-2 \end{pmatrix}$. **977.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda^2+5\lambda \end{pmatrix}$.

978. $\begin{pmatrix} \lambda-1 & 0 \\ 0 & (\lambda+1)(\lambda-1)^3 \end{pmatrix}$. **979.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

980. $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2+\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^3+\lambda^2 \end{pmatrix}$. **981.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-2)^3 \end{pmatrix}$.

982. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2+\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^3+2\lambda^2+\lambda \end{pmatrix}$. **983.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2+\lambda \end{pmatrix}$.

984. Указание. Доказать, что многочлены $D_k(\lambda)$ не изменяются при элементарных преобразованиях и что в случае нормальной диагональной формы $D_k(\lambda) = \prod_{i=1}^{k} E_i(\lambda)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

985. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda(\lambda-1)(\lambda-2) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda-1)(\lambda-2) \end{pmatrix}$.

986. $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3) \end{pmatrix}$.

987. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}$, где $p = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda-4)$.

988. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p^2 \end{pmatrix}$,

где p — произведение многочленов a, b, c, d, деленное на произведение старших коэффициентов этих многочленов.

989. $\begin{pmatrix} d(\lambda) & 0 \\ 0 & \dfrac{f(\lambda)g(\lambda)}{cd(\lambda)} \end{pmatrix}$,

где $d(\lambda)$ — наибольший общий делитель многочленов $f(\lambda)$ и $g(\lambda)$, имеющий старший коэффициент, равный единице, и c — произведение старших коэффициентов этих многочленов.

990. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & fgh & 0 \\ 0 & 0 & fgh \end{pmatrix}$.

991. $\begin{pmatrix} abc & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{fgh}{abc} & 0 \\ 0 & 0 & fgh \end{pmatrix}$,

где a, b, c соответственно наибольшие общие делители для g и h, f и h, f и g, взятые со старшими коэффициентами, равными единице.

992. $\begin{pmatrix} \frac{abc}{d} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d^2fgh}{abc} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{fgh}{d} \end{pmatrix}$,

где d — наибольший общий делитель f, g и h; a, b, c — соответственно наибольшие общие делители g и h, f и h, f и g, причем старшие коэффициенты всех многочленов a, b, c, d равны единице.

993. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^4 \end{pmatrix}$. **994.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}$.

995. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & f(\lambda) \end{pmatrix}$, где $f(\lambda) = \lambda^5 + 5\lambda^4 + 4\lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda + 1$.

996. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [(\lambda+\alpha)^2+\beta^2]^2 \end{pmatrix}$, если $\beta \neq 0$, или

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda+\alpha)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda+\alpha)^2 \end{pmatrix}$, если $\beta = 0$.

997. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-3 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-3)^2 \end{pmatrix}$. **998.** $\begin{pmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-1)^2 \end{pmatrix}$.

999. $\begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \lambda^n \end{pmatrix}$, где n — порядок данной матрицы.

1000. Эквивалентны. **1001.** Не эквивалентны.

1002. Матрицы A и C эквивалентны между собой и не эквивалентны матрице B.

1003. Единичная матрица.

1005. Указание. Воспользоваться тем, что элементарное преобразование строк матрицы A сводится к умножению A слева (а столбцов справа) на специальную унимодулярную λ-матрицу. Далее, если $B = P_sP_{s-1}\ldots P_1AQ_1Q_2\ldots Q_t$, где P_i, Q_j — специальные унимодулярные λ-матрицы, то положить $P =$

$P_sP_{s-1}\dots P_1E_m$ и $Q = E_nQ_1Q_2\dots Q_t$. При доказательстве достаточности использовать ответ задачи 1003.

1006. $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda^2-1 \end{pmatrix}$; $P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ -2 & \lambda+3 \end{pmatrix}$;

$$Q = \begin{pmatrix} \lambda & -\frac{1}{2}\lambda^2+\frac{1}{2}\lambda-1 \\ 1-\lambda & \frac{1}{2}\lambda^2-\lambda+\frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

1007. $B = \begin{pmatrix} \lambda+2 & 0 \\ 0 & \lambda^2+4\lambda+4 \end{pmatrix}$; $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$;

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda^2-2\lambda \\ -\lambda & \lambda^3+2\lambda^2+1 \end{pmatrix}.$$

1008. $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^3-\lambda^2 \end{pmatrix}$; $P = \begin{pmatrix} -2\lambda-3 & 0 & 2\lambda+4 \\ -3 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$;

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda^3+\lambda^2-\lambda+1 & 0 \\ \lambda & -\lambda^4+\lambda^3-\lambda^2+\lambda+1 & 0 \\ -\lambda-1 & \lambda^4-2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1009. Например, $P = \begin{pmatrix} -3\lambda^2+9\lambda+8 & 3\lambda^2-9\lambda+4 \\ -2\lambda^2+6\lambda+5 & 2\lambda^2-6\lambda+3 \end{pmatrix}$; $Q = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$.

1010. Например, $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $Q = \begin{pmatrix} -\lambda^2+\lambda+1 & -2\lambda^2+\lambda+2 \\ \lambda-1 & 2\lambda-1 \end{pmatrix}$.

1011. Например,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 11\lambda+8 & -11 & 0 \\ 2\lambda-1 & -2 & 0 \end{pmatrix};$$

$$Q = \begin{pmatrix} -2\lambda-1 & -\lambda-1 & -\lambda^2+\lambda \\ 2\lambda^2+\lambda+2 & \lambda^2+\lambda+1 & \lambda^3-\lambda^2-1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1012. Например,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3\lambda^2-2\lambda+1 & \lambda^2+\lambda & 1 \\ -6\lambda^2-4\lambda+4 & 2\lambda^2+2\lambda-1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda+1 & -\lambda & -\lambda^2 \\ -\lambda+2 & -\lambda+1 & -\lambda^2 \\ \lambda-1 & \lambda & \lambda^2+1 \end{pmatrix}.$$

1013. Например, $P = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $Q = \begin{pmatrix} -3 & -5 & 0 \\ 5 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1014. Например, $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $Q = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

1015. $E_1(\lambda) = 1$; $E_2(\lambda) = \lambda - 1$; $E_3(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 1)$.

1016. $E_1(\lambda) = \lambda + 1$; $E_2(\lambda) = \lambda^2 - 1$; $E_3(\lambda) = \lambda^3 - \lambda$.

1017. $E_1(\lambda) = \lambda^2 + 1$; $E_2(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1$; $E_3(\lambda) = E_4(\lambda) = 0$.

1018. $E_1(\lambda) = 1$; $E_2(\lambda) = \lambda^2 - \lambda + 1$; $E_3(\lambda) = \lambda^3 + 1$; $E_4(\lambda) = 0$.

1019. $E_1(\lambda) = \dots = E_n(\lambda) = 1$; $E_{n+1}(\lambda) = \lambda^{n+1}$.

1020. $E_1(\lambda) = \dots = E_{n-1}(\lambda) = 1$; $E_n(\lambda) = (\lambda - \alpha)^n$, если $\beta \neq 0$, $E_1(\lambda) = \dots = E_n(\lambda) = \lambda - \alpha$, если $\beta = 0$.

Указание. При $\beta \neq 0$ показать, что делитель миноров $D_{n-1}(\lambda) = 1$. Для этого убедиться, что минор, полученный вычеркиванием первого столбца и последней строки, не обращается в нуль при $\lambda = \alpha$.

1021. $\lambda + 1, (\lambda - 1)^2$. **1022.** $\lambda + 1, \lambda - 1, \lambda - 1$.

1023. Элементарных делителей не существует.

1024. $\lambda + 1, (\lambda - 1)^2, \lambda - 1, \lambda + 2, \lambda + 2, \lambda + 2$.

1025. Элементарных делителей не существует.

1026. В поле рациональных чисел: λ^2+1, λ^2-3; в поле действительных чисел: $\lambda^2 + 1,\ \lambda + \sqrt{3},\ \lambda - \sqrt{3}$; в поле комплексных чисел: $\lambda + i,\ \lambda - i,\ \lambda + \sqrt{3},\ \lambda - \sqrt{3}$.

1027. В поле рациональных чисел: λ^2-2, $(\lambda^2+4)^2$, λ^2+4; в поле действительных чисел: $\lambda + \sqrt{2}$, $\lambda - \sqrt{2}$, $(\lambda^2 + 4)^2$, $\lambda^2 + 4$; в поле комплексных чисел: $\lambda + \sqrt{2}$, $\lambda - \sqrt{2}$, $(\lambda + 2i)^2(\lambda - 2i)^2$, $\lambda + 2i$, $\lambda - 2i$.

1028. В поле рациональных и в поле действительных чисел: $(\lambda - 1)^2$, $(\lambda + 1)^2$, $\lambda + 1$, $(\lambda^2 - \lambda + 1)^2$, $\lambda^2 - \lambda + 1$; в поле комплексных чисел: $(\lambda-1)^2$, $(\lambda+1)^2$, $\lambda+1$,

$$\left(\lambda - \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^2, \left(\lambda - \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^2, \lambda - \frac{1+i\sqrt{3}}{2}, \lambda - \frac{1-i\sqrt{3}}{2}.$$

1029. $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda+1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^4-2\lambda^2+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1030. $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda+2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^3+2\lambda^2-4\lambda-8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^6-12\lambda^4+48\lambda^2-64 \end{pmatrix}.$$

1031. $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2+\lambda-2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^5+\lambda^4-5\lambda^3-\lambda^2+8\lambda-4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1032. Указание. Пусть $e(\lambda)$ — какой-нибудь неприводимый множитель, входящий в разложение хотя бы одного диагонального элемента, s — число диагональных элементов, отличных от нуля, и $0 \leqslant \alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \dots \leqslant \alpha_s$ — совокупность показателей степени, с которыми $e(\lambda)$ встречается в этих элементах. Показать, что при $k = 1, 2, \dots, s$ делитель миноров $D_k(\lambda)$ делится точно на $[e(\lambda)]^{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_k}$, а инвариантный множитель $E_k(\lambda)$ — точно на $[e(\lambda)]^{\alpha_k}$.

1033. Указание. Элементарными преобразованиями привести каждую диагональную клетку к диагональной (например, к нормальной) форме и воспользоваться предыдущей задачей.

1034. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda(\lambda+1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda+1)(\lambda-1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2(\lambda+1)^3(\lambda-1)^2 \end{pmatrix}$.

1035. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^3-4\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^3-4\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^4-4\lambda^2 \end{pmatrix}$.

1036. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f(\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [f(\lambda)]^2 \end{pmatrix}$, где $f(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 - 6\lambda$.

1037. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda^2-1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda^2-1)^3 \end{pmatrix}$. **1038.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1039. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2-4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. **1040.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2+\lambda-6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2+\lambda-6 \end{pmatrix}$.

1041. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^4-2\lambda^2+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1042. $D_1 = 1, D_2 = 2, D_3 = 4, D_4 = 320$.

1043. $D_1 = 3, D_2 = 18, D_3 = 324, D_4 = 11\,664$.

1045. Указание. При доказательстве существования представления данного вида воспользоваться предыдущей задачей. При доказательстве единственности из двух представлений данного вида $A = P_1R_1 = P_2R_2$ вывести, что матрица $C = P_2^{-1}P_1 = R_2R_1^{-1}$ является унимодулярной и треугольной λ-матрицей, элементы которой на главной диагонали имеют старший коэффициент, равный единице, и, значит, сами равны единице. Затем, приравнивая в равенстве $CR_1 = R_2$ элементы k-й строки и принимая во внимание условие для степеней элементов R_1 и R_2, показать, что все элементы матрицы C справа от главной диагонали равны нулю, т. е. C — единичная матрица. Получить отсюда равенства $P_1 = P_2$ и $R_1 = R_2$.

1047. Например, $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1048. Скалярные матрицы. Указание. Показать, что если $AT = TA$ для любой невырожденной матрицы T, то это верно для всех матриц T. Для этого вырожденную матрицу T представить в виде $T = (T - \alpha E) + \alpha E$, где $\alpha \neq 0$ и выбрано так, что $|T - \alpha E| \neq 0$. Затем применить задачу 818.

Замечание. Указанный метод решения может оказаться непригодным для матриц с элементами из конечного поля, где может не найтись элемента α с нужными свойствами. Метод, пригодный для матриц с элементами из любого поля и не использующий задачи 818, состоит в следующем: для $i \neq j$ обозначим через F_{ij} матрицу, отличающуюся от единичной лишь тем, что ее элемент в i-й строке и в j-м столбце равен единице. В равенстве $AF_{ij} = F_{ij}A$ приравняем элементы в i-й строке и j-м столбце, а затем в i-й строке и i-м же столбце.

1049. За матрицу T можно взять матрицу, полученную из единичной перестановкой i-й и j-й строк.

1050. Указание. Воспользоваться предыдущей задачей.

1058. $A = (B - \lambda E)\begin{pmatrix} 2\lambda+1 & \lambda & 1 \\ 3\lambda+2 & 3\lambda & 2 \\ \lambda+2 & 2\lambda & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

1059. $A = \begin{pmatrix} \lambda^2 & \lambda & 1 \\ 2\lambda^2 & 3\lambda & 2 \\ \lambda^2 & \lambda & -2 \end{pmatrix}(B - \lambda E) + \begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 6 & -3 & 2 \\ 7 & -5 & 4 \end{pmatrix}$.

1060. Указание. Использовать задачу 1005.

1061. Решение. Пусть $P = (B-\lambda E)P_1+P_0$ и $Q = Q_1(B-\lambda E)+Q_0$. Используя эти соотношения, равенство

$$B - \lambda E = P(A - \lambda E)Q \qquad (1)$$

можно привести к виду

$$B - \lambda E - P_0(A - \lambda E)Q_0 = P(A - \lambda E)Q_1(B - \lambda E) + \\ +(B - \lambda E)P_1(A - \lambda E)Q - (B - \lambda E)P_1(A - \lambda E)Q_1(B - \lambda E).$$

Подставляя сюда на основании равенства (1)

$$P(A - \lambda E) = (B - \lambda E)Q^{-1} \quad \text{и} \quad (A - \lambda E)Q = P^{-1}(B - \lambda E),$$

получим

$$B - \lambda E - P_0(A - \lambda E)Q_0 = (B - \lambda E)[P_1P^{-1} + Q^{-1}Q_1 - P_1(A - \lambda E)Q_1](B - \lambda E).$$

Выражение в квадратных скобках в правой части этого равенства должно равняться нулю, так как иначе правая часть имела бы степень относительно λ не ниже двух, тогда как степень левой части не выше единицы. Поэтому $B - \lambda E = P_0(A - \lambda E)Q_0$. Приравнивая в этом равенстве коэффициенты при λ и свободные члены, находим: $P_0Q = E$ и $B = P_0AQ_0$.

1063. Подобны. **1064.** Подобны.

1065. Матрицы A и C подобны между собой, но не подобны матрице B.

1066. Матрицы B и C подобны между собой, но не подобны матрице A.

1067. Например, $T = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Указание. Для получения по возможности простого ответа надо стремиться совершать наиболее простые элементарные преобразования столбцов матриц $A - \lambda E$ и $B - \lambda E$.

1068. Например, $T = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 10 \end{pmatrix}$. Указание. Для приведения матрицы $A - \lambda E$ к нормальной диагональной форме из второй строки, умноженной на 6, вычесть первую строку, умноженную на $\lambda+16$, а из первого столбца, умноженного на 6, вычесть второй столбец, умноженный на $\lambda - 17$. Аналогично преобразовать матрицу $B - \lambda E$.

1069. Например,

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1070. Указание. Получить c_k как сумму всех сомножителей, стоящих в определителе $|A - \lambda E|$ при произведениях по k элементов главной диагонали и взятых при $\lambda = 0$.

1071. $\lambda_1 = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2$, $\lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$. Указание. Применить предыдущую задачу.

1074. Указание. Применить задачу 1070 к матрице $B = A - \lambda_0 E$ и показать, что характеристический многочлен $|B - \mu E|$ матрицы B после замены $\mu = \lambda - \lambda_0$ переходит в характеристический многочлен $|A - \lambda E|$ матрицы A.

1075. Для треугольной матрицы вида

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & \lambda_0 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_0 \end{pmatrix},$$

где $a_{i,i+1} \neq 0$ $(i = 1, 2, \dots, n-1)$, будет $d = 1$. Для диагональной матрицы порядка n, в которой p элементов главной диагонали равны λ_0, будет $d = p$.

1076. Указание. Перемножить равенства

$$|A^{-1} - \lambda E| = (-\lambda)^n |A^{-1}| \cdot \left| A - \frac{1}{\lambda} E \right|.$$

1077. Указание. Перемножить равенства

$$|A - \lambda E| = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)\dots(\lambda_n - \lambda),$$
$$|A + \lambda E| = (\lambda_1 + \lambda)(\lambda_2 + \lambda)\dots(\lambda_n + \lambda)$$

и заменить λ^2 на λ.

1078. Указание. Равенство $|A - \lambda E| = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)\dots(\lambda_n - \lambda)$ перемножить со всеми равенствами, полученными из него заменой λ на $\lambda\varepsilon_1, \lambda\varepsilon_2, \dots, \lambda\varepsilon_{p-1}$, где $\varepsilon_k = \cos\dfrac{2\pi k}{p} + i\sin\dfrac{2\pi k}{p}$ $(k = 1, 2, \dots, p-1)$ и в полученном равенстве заменить λ^p на λ.

1079. Решение. Пусть $f(\lambda) = a_0 \prod\limits_{j=1}^{s}(\lambda - \mu_j)$, кроме того, $\varphi(\lambda) = \prod\limits_{i=1}^{n}(\lambda_i - \lambda)$. Полагая $\lambda = A$ в $f(\lambda)$, получим: $f(A) = a_0 \prod\limits_{j=1}^{s}(A - \mu_j E)$. Переходя от матриц к определителям, находим

$$\begin{aligned} |f(A)| &= a_0^n \prod_{j=1}^{s} |A - \mu_j E| = a_0^n \prod_{j=1}^{s} \varphi(\mu_j) = a_0^n \prod_{j=1}^{s}\prod_{i=1}^{n}(\lambda_i - \mu_j) = \\ &= \prod_{i=1}^{n}\left[a_0 \prod_{j=1}^{s}(\lambda_i - \mu_j)\right] = \prod_{i=1}^{n} f(\lambda_i). \end{aligned}$$

С другой стороны, $|f(A)| = a_0^n \prod\limits_{j=1}^{s} \varphi(\mu_j) = R(f, \varphi)$.

1080. Указание. Применить равенство предыдущей задачи к многочлену $g(x) = f(x) - \lambda$, где λ — произвольное число.

1081. Указание. Применить равенство $|f(A)| = \dfrac{|g(A)|}{|h(A)|}$ и использовать задачи 1079 и 1080.

1082. Указание. Если хотя бы одна из матриц A, B невырожденна, то утверждение вытекает из подобия матриц AB и BA (см. задачу 1047). В общем случае можно применить задачи 920 и 1070. Для матриц над полем с бесконечным (или достаточно большим) числом элементов из выполнения требуемого равенства для невырожденных матриц следует его тождественное выполнение. Наконец, для матриц с числовыми элементами равенство для вырожденной матрицы A можно получить путем предельного перехода. Например, если $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — характеристические числа вырожденной матрицы A, то берем последовательность чисел, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$, такую, что все они отличны от $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ и $\operatorname{Lim}\limits_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0$. Матрица $A_k = A - \varepsilon_k E$ невырожденна. Значит, $|A_k B - \lambda E| = |BA_k - \lambda E|$. Переходя к пределу при $k \to \infty$, получим нужное равенство.

1083. Характеристические числа (с учетом кратности) будут $\lambda_k = f(\varepsilon_k)$, где $f(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \cdots + a_n x^{n-1}$ и $\varepsilon_k = \cos\dfrac{2\pi k}{n} + i \sin\dfrac{2\pi k}{n}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$. Указание. Применить выражение для циркулянта из задачи 479 к циркулянту $|A - \lambda E|$, где λ — параметр.

1084. Решение. Применяя задачу 304 к определителю $|A - \lambda E|$, где λ — характеристическое число, положим $\alpha + \beta = -\lambda$, $\alpha\beta = -1$. Тогда $|A - \lambda E| = \alpha^n + \alpha^{n-1}\beta + \cdots + \beta^n$. Из $\alpha\beta = -1$ находим $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$. Далее $\alpha \neq \beta$, так как из $\alpha = \beta$ и $|A - \lambda E| = 0$ следовало бы $\alpha = \beta = 0$. Поэтому $|A - \lambda E| = \dfrac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} = 0$, откуда $\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{n+1} = 1$; $\dfrac{\alpha}{\beta} = \cos\dfrac{2\pi k}{n+1} + i \sin\dfrac{2\pi k}{n+1}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, $k \neq 0$, так как $\dfrac{\alpha}{\beta} \neq 1$. Решая это уравнение совместно с $\alpha\beta = -1$, находим:

$\alpha = \pm i\left(\cos\dfrac{\pi k}{n+1} + i\sin\dfrac{\pi k}{n+1}\right)$, $\beta = \pm i\left(\cos\dfrac{\pi k}{n+1} - i\sin\dfrac{\pi k}{n+1}\right)$. Здесь знаки $\pm$ надо брать для α и β совпадающими, так как $\alpha\beta = -1$. Отсюда $\lambda = -(\alpha+\beta) = \mp 2i\cos\dfrac{\pi k}{n+1}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Все эти числа должны быть характеристическими. Но среди них имеются равные, так как $\cos\dfrac{\pi k}{n+1} = -\cos\dfrac{(n+1-k)\pi}{n+1}$.

Все различные числа содержатся в системе

$$\lambda_k = 2i\cos\frac{\pi k}{n+1} \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Но степень характеристического многочлена равна n. Значит, последняя система содержит все характеристические числа, причем кратных корней нет.

1085. Указание. Доказать, что клетка Жордана порядка k с числом α на диагонали имеет единственный элементарный делитель $(\lambda - \alpha)^k$.

Построить жорданову матрицу A_j, клетки Жордана которой находятся в указанной связи с элементарными делителями матрицы $A - \lambda E$, и, пользуясь задачами 1033 и 1061, доказать, что матрицы A и A_j подобны. При доказательстве единственности, пользуясь задачей 1005, убедиться, что характеристические матрицы двух подобных жордановых матриц B и C эквивалентны, и из совпадения элементарных делителей матриц $B - \lambda E$ и $C - \lambda E$, снова применяя задачу 1033, убедиться, что матрицы B и C совпадают с точностью до порядка клеток.

1086. $\begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&-2&0\\ 0&0&0&0&0&-2 \end{pmatrix}$. **1087.** $\begin{pmatrix} -1&0&0&0&0&0\\ 0&-1&0&0&0&0\\ 0&0&-1&0&0&0\\ 0&0&0&-1&0&0\\ 0&0&0&0&-1&0\\ 0&0&0&0&0&5 \end{pmatrix}$.

1088. Задача поставлена неверно. Таких инвариантных множителей у матрицы $A - \lambda E$ четвертого порядка не может быть.

1090. $\begin{pmatrix} 2&0&0\\ 0&2&1\\ 0&0&2 \end{pmatrix}$. **1091.** $\begin{pmatrix} -1&0&0\\ 0&-1&1\\ 0&0&-1 \end{pmatrix}$. **1092.** $\begin{pmatrix} -3&0&0\\ 0&-3&1\\ 0&0&-3 \end{pmatrix}$.

1093. $\begin{pmatrix} 1&0&0\\ 0&1&1\\ 0&0&1 \end{pmatrix}$. **1094.** $\begin{pmatrix} -2&0&0\\ 0&-2&1\\ 0&0&-2 \end{pmatrix}$. **1095.** $\begin{pmatrix} 0&0&0\\ 0&0&1\\ 0&0&0 \end{pmatrix}$.

1096. $\begin{pmatrix} 1&0&0\\ 0&0&1\\ 0&0&0 \end{pmatrix}$. **1097.** $\begin{pmatrix} 1&0&0\\ 0&2&0\\ 0&0&3 \end{pmatrix}$. **1098.** $\begin{pmatrix} 1&1&0\\ 0&1&1\\ 0&0&1 \end{pmatrix}$.

1099. $\begin{pmatrix} 1&0&0\\ 0&1&0\\ 0&0&-1 \end{pmatrix}$. **1100.** $\begin{pmatrix} 3&0&0\\ 0&-1&1\\ 0&0&-1 \end{pmatrix}$. **1101.** $\begin{pmatrix} \alpha&0&0\\ 0&\alpha&1\\ 0&0&\alpha \end{pmatrix}$.

1102. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2+i & 0 \\ 0 & 0 & 2-i \end{pmatrix}$.

1103. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon^2 \end{pmatrix}$,

где $\varepsilon = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}i\sqrt{3}$ — одно из комплексных значений $\sqrt[3]{1}$.

1104. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2+3i & 0 \\ 0 & 0 & 2-3i \end{pmatrix}$. **1105.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1106. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. **1107.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1108. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. **1109.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \multicolumn{7}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1110. То же, что в задаче 1109. **1111.** То же, что в задаче 1109.

1112. $\begin{pmatrix} n & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & n & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \multicolumn{7}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n \end{pmatrix}$. **1113.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \dots & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{pmatrix}$.

1114. $\begin{pmatrix} \alpha_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2 & \dots & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_{n-1} \end{pmatrix}$,

где $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ — все значения $\sqrt[n]{\alpha^n}$, т.е. $\alpha_k = \alpha\left(\cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}\right)$ $(k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$.

1115. Одна клетка Жордана с числом α на главной диагонали.

1118. В поле рациональных чисел подобна матрице

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

1119. В поле вещественных чисел подобна матрице

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

1120. В поле комплексных чисел подобна матрице

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2+3i & 0 \\ 0 & 0 & 2-3i \end{pmatrix}.$$

1121. Не подобна диагональной матрице ни в каком поле.

1125. Диагональная матрица с элементами на главной диагонали, равными нулю или единице.

1126. Диагональная матрица с элементами ± 1 на главной диагонали.

Замечание. Утверждение не верно для матриц над полем характеристики 2. Например, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = E$ и матрица $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ не приводится к диагональной в силу единственности жордановой формы.

1127. Если n — период матрицы A, т. е. наименьшее из натуральных чисел k, для которых $A^k = E$, то диагональная матрица имеет на главной диагонали некоторые из n значений корня $\sqrt[n]{1}$. Замечание. Результат не верен; для матриц над полями конечной характеристики, например для матрицы порядка $\leqslant p$ над полем характеристики p:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

справедливо равенство $A^p = E$.

1128. а) $\lambda - 1$; б) λ.

1129. Для скалярных матриц $A = \alpha E$ и только для них. Для данного порядка n такая матрица только одна.

1130. $(\lambda - \alpha)^n$. **1134.** $\lambda^2 - 4\lambda + 4$. **1135.** $\lambda^2 - 5\lambda + 6$.

1136. Например, для матриц

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\varphi(\lambda) = (\lambda - 1)^4$, $\psi(\lambda) = (\lambda - 1)^2$, но эти матрицы не подобны в силу единственности жордановой формы любой матрицы.

1137. $$\begin{pmatrix} \alpha^k & C_k^1\alpha^{k-1} & C_k^2\alpha^{k-2} & C_k^3\alpha^{k-3} & \ldots & C_k^{n-1}\alpha^{k-n+1} \\ 0 & \alpha^k & C_k^1\alpha^{k-1} & C_k^2\alpha^{k-2} & \ldots & C_k^{n-2}\alpha^{k-n+2} \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \alpha^k \end{pmatrix},$$

при $k \leqslant n-1$ здесь следует положить $C_k^0 = 1$ и C_k^s для $k < s$.

1138. Указание. Положить $A = \alpha E + H$ и в равенстве

$$f(x) = f(\alpha) + \frac{f'(\alpha)}{1!}(x-\alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!}(x-\alpha)^2 + \cdots + \frac{f^{(s)}(\alpha)}{s!}(x-\alpha)^s$$

(s — степень многочлена $f(x)$) положить $x = A$.

1140. Одна клетка Жордана с числом α^2 на диагонали.

1141. Если $n > 1$ порядок клетки Жордана A с нулем на диагонали, то жорданова форма матрицы A^2 состоит из двух клеток с нулем на диагонали, имеющих порядки $n/2$ при четном n и $(n-1)/2$, $(n+1)/2$ при нечетном n.

Указание. Пользуясь задачей 1130, найти минимальные многочлены матриц A и A^2 и показать, что клетки жордановой формы матрицы A^2 имеют порядки не выше $n/2$ для четного n и $(n+1)/2$ для нечетного n. Проверить, что делитель миноров $D_{n-2}(\lambda)$ матрицы $A^2 - \lambda E$ равен единице, и далее показать, что жорданова форма матрицы A^2 содержит не более двух клеток.

1143. Искомая матрица содержит две клетки Жордана с числом α на диагонали, имеющих порядки $n/2$ при четном n или $(n-1)/2$ и $(n+1)/2$ при нечетном n. Указание. Применить две предыдущие задачи.

1144. Решение. Пусть $A = TBT^{-1}$, где A — данная матрица и

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & & & 0 \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & B_k \end{pmatrix}$$

— ее жорданова форма с клетками Жордана

$$B_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \ldots & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_i \end{pmatrix} \quad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

Тогда $A' = T'^{-1}B'T'$. Пусть

$$H_i = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & \ldots & 1 & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ 1 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

имеет тот же порядок, что B_i, и

$$H = \begin{pmatrix} H_1 & & & 0 \\ & H_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & H_k \end{pmatrix}.$$

Непосредственным перемножением находим: $B_i' = H_i^{-1}B_iH_i$ и, значит, $B' = H^{-1}BH$. Поэтому $A' = T'^{-1}H^{-1}BHT' = T'^{-1}H^{-1}T^{-1}ATHT' = C^{-1}AC$, где $C = THT'$ — симметрическая невырожденная матрица. Положим $D = C^{-1}A$. Тогда $D' = A'C'^{-1} = C^{-1}ACC^{-1} = D$. Таким образом, матрица D также симметрична и $A = CD$.

1145. Если $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — характеристические числа матрицы A (с учетом их кратности), то характеристические числа матрицы A_p (также с учетом их кратности) равны числам $\lambda_{i_1}, \lambda_{i_2} \ldots \lambda_{i_p}$ $(1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leqslant n)$, т. е. всевозможным произведениям по p из характеристических чисел матрицы A.

Указание. Выяснить, что при изменении нумерации сочетаний по p из чисел $1, 2, \ldots, n$ матрица A_p переходит в подобную ей матрицу, использовать задачу 970, перейти к жордановой форме A_j и применить свойства ассоциированных матриц из задачи 969.

1146. Если $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ — характеристические числа A и $\mu_1, \ldots, \mu_q$ — характеристические числа B, то характеристические числа $A \times B$ равны $\lambda_i\mu_j$ $(i = 1, 2, \ldots, p;\ j = 1, 2, \ldots, q)$.

Решение. Пусть кронекеровское произведение $A \times B$ определяется расположением $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{pq}$ пар чисел (i, j) $(i = 1, 2, \ldots, p;\ j = 1, 2, \ldots, q)$. Транспозиция α_i и α_j вызывает в матрице $A \times B$ перестановку i-й и j-й строк и i-го и j-го столбцов и, значит, переведет эту матрицу в подобную ей (задача 1049). Так как любая перестановка сводится к ряду транспозиций, то характеристические числа всех кронекеровских произведений $A \times B$ совпадают и можно рассматривать, например, правое прямое произведение $A \times^{\cdot} B$ (задача 964). Пусть A равняется $C^{-1}A_jC$ и $B = D^{-1}B_jD$, где A_j и B_j — жордановы матрицы. Применяя свойство в) задачи 963, находим $A \times^{\cdot} B = C^{-1}A_jC \times^{\cdot} D^{-1}B_jD = (C^{-1} \times^{\cdot} D^{-1})(A_j \times^{\cdot} B_j)(C \times^{\cdot} D)$. По свойству д) задачи 964 имеем: $C^{-1} \times^{\cdot} D^{-1} = (C \times^{\cdot} D)^{-1}$. Значит, матрицы $A \times^{\cdot} B$ и $A_j \times^{\cdot} B_j$ подобны и их характеристические числа совпадают. Но $A_j \times^{\cdot} B_j$ является треугольной матрицей с элементами $\lambda_i\mu_j$ $(i = 1, 2, \ldots, p;\ j = 1, 2, \ldots, q)$ на главной диагонали, что и доказывает наше утверждение.

1147. Указание. Показать, что $g(A) = h(A)$ тогда и только тогда, когда $g(\lambda) - h(\lambda)$ делится на $\psi(\lambda)$.

1149. В данном случае минимальный многочлен совпадает с характеристическим (с точностью до знака). $r(\lambda)$ есть обычный интерполяционный многочлен Лагранжа.

$$f(A) = \sum_{k=1}^{n} f(\lambda_k) \frac{(A - \lambda_1 E) \ldots (A - \lambda_{k-1}E)(A - \lambda_{k+1}E) \ldots (A - \lambda_n E)}{(\lambda_k - \lambda_1) \ldots (\lambda_k - \lambda_{k-1})(\lambda_k - \lambda_{k+1}) \ldots (\lambda_k - \lambda_n)},$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — характеристические числа матрицы A (по условию различные).

1150. $r(\lambda)$ есть обычный интерполяционный многочлен Лагранжа.

$$f(A) = \sum_{k=1}^{s} f(\lambda_k) \frac{(A - \lambda_1 E) \ldots (A - \lambda_{k-1}E)(A - \lambda_{k+1}E) \ldots (A - \lambda_s E)}{(\lambda_k - \lambda_1) \ldots (\lambda_k - \lambda_{k-1})(\lambda_k - \lambda_{k+1}) \ldots (\lambda_k - \lambda_s)}.$$

1151. Решение. Покажем, во-первых, что если интерполяционный многочлен Лагранжа—Сильвестера $r(\lambda)$ существует, то он определяется равенствами (1) и (2). Пусть

$$\frac{r(\lambda)}{\psi(\lambda)} = \sum_{k=1}^{s} \left[\frac{\alpha_{k,1}}{(\lambda-\lambda_k)^{r_k}} + \dots + \frac{\alpha_{k,r_k}}{(\lambda-\lambda_k)} \right] \tag{3}$$

— разложение дроби на простейшие. Умножая это равенство на $\psi(\lambda)$, получим равенство (1). Для установления равенств (2) умножим равенство (3) на $(\lambda-\lambda_k)^{r_k}$. Получим

$$\frac{r(\lambda)}{\psi_k(\lambda)} = \alpha_{k,1} + \alpha_{k,2}(\lambda-\lambda_k) + \dots + \alpha_{k,r_k}(\lambda-\lambda_k)^{r_k-1} + (\lambda-\lambda_k)^{r_k}\varphi(\lambda), \tag{4}$$

где $\varphi(\lambda)$ — рациональная функция, имеющая смысл при $\lambda = \lambda_k$ вместе со всеми своими производными. Беря от обеих частей равенства (4) $(j-1)$-ю производную при $\lambda = \lambda_k$ и пользуясь тем, что значения $r(\lambda)$ и $f(\lambda)$ на спектре матрицы совпадают, мы и получим равенства (2). Во-вторых, покажем, что многочлен $r(\lambda)$, определенный равенствами (1) и (2), является интерполяционным многочленом Лагранжа—Сильвестера для функции $f(\lambda)$ на спектре матрицы A. Из равенства (1) видно, что степень $r(\lambda)$ ниже степени $\psi(\lambda)$. Далее, положим

$$\varphi_k(\lambda) = \alpha_{k,1} + \alpha_{k,2}(\lambda-\lambda_k) + \dots + \alpha_{k,r_k}(\lambda-\lambda_k)^{r_k-1}.$$

Из равенств (2) следует, что при $\lambda = \lambda_k$ значения функции $\varphi_k(\lambda)$ и ее производных порядка $j < r_k$ совпадают соответственно со значениями функции $\dfrac{f(\lambda)}{\psi_k(\lambda)}$ и ее производных того же порядка. Поэтому, полагая $\lambda = \lambda_k$ в равенстве $r(\lambda) = \sum\limits_{k=1}^{s} \varphi_k(\lambda)\psi_k(\lambda)$ и равенствах, полученных из него j-кратным дифференцированием $(j < r_k)$, мы получим

$$r^{(j)}(\lambda_k) = f^{(j)}(\lambda_k) \quad (j = 0, 1, \dots, r_k - 1;\ k = 1, 2, \dots, s),$$

т. е. значения $r(\lambda)$ и $f(\lambda)$ на спектре матрицы совпадают.

1152. $f(A) = [aE + b(A-\lambda_1 E)](A-\lambda_2 E)^3 + [cE + d(A-\lambda_2 E) + e(A-\lambda_2 E)^2](A-\lambda_1 E)^2$, где

$$a = \frac{f(\lambda_1)}{(\lambda_1-\lambda_2)^3}, \quad b = -\frac{3}{(\lambda_1-\lambda_2)^4}f(\lambda_1) + \frac{1}{(\lambda_1-\lambda_2)^3}f'(\lambda_1),$$

$$c = \frac{f(\lambda_2)}{(\lambda_2-\lambda_1)^2}, \quad d = -\frac{2}{(\lambda_2-\lambda_1)^3}f(\lambda_2) + \frac{1}{(\lambda_2-\lambda_1)^2}f'(\lambda_2),$$

$$e = \frac{3}{(\lambda_2-\lambda_1)^4}f(\lambda_2) - \frac{2}{(\lambda_2-\lambda_1)^3}f'(\lambda_2) + \frac{1}{2!}\frac{1}{(\lambda_2-\lambda_1)^2}f''(\lambda_2).$$

1154. Указание. Показать, что значения интерполяционного многочлена Лагранжа—Сильвестера $r(\lambda)$ для $f(\lambda)$ на спектре матрицы A совпадают со значениями $f(\lambda)$ на спектре каждой клетки A_k, и применить задачу 1147.

1155. $r(\lambda) = f(0) + f'(0)\lambda + \dfrac{f''(0)}{2!}\lambda^2 + \dots + \dfrac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}\lambda^{n-1}$.

$$f(A) = \begin{pmatrix} f(0) & f'(0) & \dfrac{f''(0)}{2!} & \dots & \dfrac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} \\ 0 & f(0) & f'(0) & \dots & \dfrac{f^{(n-2)}(0)}{(n-2)!} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & f(0) \end{pmatrix}.$$

$f(A)$ имеет смысл для любой функции $f(\lambda)$, для которой определены значения $f(0), f'(0), \dots, f^{(n-1)}(0)$.

1156. $r(\lambda) = f(\alpha) + f'(\alpha)(\lambda-\alpha) + \dfrac{f''(\alpha)}{2!}(\lambda-\alpha)^2 + \dots + \dfrac{f^{(n-1)}(\alpha)}{(n-1)!}(\lambda-\alpha)^{n-1}$.

$$f(A) = \begin{pmatrix} f(\alpha) & f'(\alpha) & \dfrac{f''(\alpha)}{2!} & \dots & \dfrac{f^{(n-1)}(\alpha)}{(n-1)!} \\ 0 & f(\alpha) & f'(\alpha) & \dots & \dfrac{f^{(n-2)}(\alpha)}{(n-2)!} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & f(\alpha) \end{pmatrix}.$$

$f(A)$ имеет смысл для любой функции $f(\lambda)$, для которой существуют значения $f(\alpha), f'(\alpha), \dots, f^{(n-1)}(\alpha)$.

1160. Указание. Применить предыдущую задачу.

1162. $\begin{pmatrix} 3\cdot 2^{100} - 2\cdot 3^{100} & 2(3^{100} - 2^{100}) \\ -3(3^{100} - 2^{100}) & 3^{101} - 2^{101} \end{pmatrix}$. **1163.** $2^{50}\begin{pmatrix} -24 & 25 \\ -25 & 26 \end{pmatrix}$.

1164. $\pm\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -1 & 9 \end{pmatrix}$.

1165. $\pm\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 12 & 2 \\ 3 & 13 \end{pmatrix}$, $\pm\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$; всего четыре матрицы.

1166. $\begin{pmatrix} 4e-3 & 2-2e \\ 6e-6 & 4-3e \end{pmatrix}$. **1167.** $\begin{pmatrix} 2e^2 & -e^2 \\ e^2 & 0 \end{pmatrix}$.

1168. $\begin{pmatrix} 3e-1 & e & -3e+1 \\ 3e & e+3 & -3e-3 \\ 3e-1 & e+1 & -3e \end{pmatrix} = (e-2)A^2 + A + E$.

1169. $\begin{pmatrix} 3 & -15 & 6 \\ 1 & -5 & 2 \\ 1 & -5 & 2 \end{pmatrix}$, если брать вещественное значение логарифма.

Общее решение имеет вид

$$\begin{pmatrix} 3+2\pi in & -15 & 6 \\ 1 & -5+2\pi in & 2 \\ 1 & -5 & 2+2\pi in \end{pmatrix},$$

где $i = \sqrt{-1}$ и n — любое число.

1170. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1171. Указание. Использовать задачу 1159.

1172. Указание. Использовать задачу 1159.

1173. $|e^A| = e^s$, где $s = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$ — след матрицы A.

1174. Указание. Использовать задачу 1161.

1175. $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$. **1176.** $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$. **1177.** $y_1^2 - y_2^2$.

1178. $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 - y_4^2$. **1179.** $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$.

1180. $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$; $x_1 = y_1 - \frac{1}{2}y_2 + \frac{5}{6}y_3$, $x_2 = \frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{6}y_3$, $x_3 = \frac{1}{3}y_3$.

1181. $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$; $x_1 = \frac{1}{2}y_1 + y_2$, $x_2 = y_2 + y_3$, $x_3 = -y_2 + y_3$.

1182. $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$; $x_1 = y_1 - y_2 - y_3$, $x_2 = y_1 + y_2 - y_3$, $x_3 = y_3$.

1183. $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$; $x_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2}y_1 - \frac{5}{3}\sqrt{3}y_2 + \frac{1}{3}\sqrt{3}y_3$, $x_2 = -\frac{1}{3}\sqrt{3}y_2 + \frac{1}{3}\sqrt{3}y_3$, $x_3 = \frac{1}{3}\sqrt{3}y_2 + \frac{1}{3}\sqrt{3}y_3$.

1184. $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$; $x_1 = -\frac{3}{4}y_1 - \frac{1}{4}y_2 + \frac{1}{6}\sqrt{3}y_3$, $x_2 = -\frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2$, $x_3 = \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2$.

1185. $y_1^2 - y_2^2$; $x_1 = y_1 - y_2 - y_3$, $x_2 = y_1 + y_2 - y_4$, $x_3 = y_3$, $x_4 = y_4$.

1186. $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 - y_4^2$; $x_1 = \frac{1}{3}\sqrt{3}y_1 - \frac{1}{15}\sqrt{15}y_2 + \frac{2}{85}\sqrt{85}y_3 - \frac{1}{629}\sqrt{629}y_4$, $x_2 = \frac{1}{5}\sqrt{15}y_2 - \frac{6}{85}\sqrt{85}y_3 + \frac{3}{629}\sqrt{629}y_4$, $x_3 = \frac{1}{17}\sqrt{85}y_3 + \frac{6}{629}\sqrt{629}y_4$, $x_4 = \frac{1}{37}\sqrt{629}y_4$.

1187. $2y_1^2 + 10y_2^2 + 190y_3^2$, $y_1 = x_1 - \frac{1}{2}x_2 + x_3$, $y_2 = \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{10}x_3$, $y_3 = \frac{1}{10}x_3$.

1188. $3y_1^2 - 30y_2^2 + 530y_3^2$; $y_1 = x_1 + \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{2}x_3$, $y_2 = \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{20}x_3$, $y_3 = \frac{1}{20}x_3$.

1189. $2y_1^2 + 6y_2^2 - 6y_3^2 + 2y_4^2$; $y_1 = \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2$, $y_2 = \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{6}x_3$, $y_3 = \frac{1}{6}x_3 + \frac{1}{2}x_4$, $y_4 = \frac{3}{2}x_4$.

1190. $x_1 = y_1 - 3y_2 - 6y_3$; $x_2 = y_2 + 3y_3$; $x_3 = y_3$.

1191. $x_1 = 2\sqrt{2}y_1 + \sqrt{2}y_2 + 5y_3$; $x_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2}y_1 + y_3$; $x_3 = y_3$.

1192. $x_1 = y_3$, $x_2 = \sqrt{2}y_2 + y_3$, $x_3 = \sqrt{2}y_1 - \frac{3}{2}\sqrt{2}y_2 - \left(3 + \frac{3}{2}\sqrt{2}\right)y_3$.

1193. y_1^2; $y_1 = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$; $y_2 = x_2$; $y_3 = x_3$; $\dots$; $y_{i-1} = x_{i-1}$; $y_i = x_i$; $y_{i+1} = x_{i+1}$; $\dots$; $y_n = x_n$, если $a_i \neq 0$.

1194. $y_1^2 + \frac{3}{4}y_2^2 + \frac{4}{6}y_3^2 + \frac{5}{8}y_4^2 + \dots + \frac{n+1}{2n}y_n^2;$

$$y_1 = x_1 + \frac{1}{2}(x_2 + x_3 + \dots + x_n);$$
$$y_2 = x_2 + \frac{1}{3}(x_3 + x_4 + \dots + x_n);$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$y_n = x_n.$$

1195. $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 - \frac{3}{4}y_4^2 - \frac{4}{6}y_5^2 - \frac{5}{8}y_6^2 - \dots - \frac{n-1}{2(n-2)}y_n^2;$

$$y_1 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) + x_3 + x_4 + \dots + x_n;$$
$$y_2 = \frac{1}{2}(x_1 - x_2);$$
$$y_3 = x_3 + \frac{1}{2}(x_4 + x_5 + \dots + x_n);$$
$$y_4 = x_4 + \frac{1}{3}(x_5 + x_6 + \dots + x_n);$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$y_n = x_n.$$

Указание. Свести к предыдущей задаче.

1196. Если n четно: $y_1^2 - y_2^2 + y_3^2 - y_4^2 + \dots + y_{n-1}^2 - y_n^2;$

$$y_i = \frac{x_i + x_{i+1} + x_{i+2}}{2} \quad (i = 1, 3, 5, \dots, n-3);$$
$$y_i = \frac{x_{i-1} - x_i + x_{i+1}}{2} \quad (i = 2, 4, 6, \dots, n-2);$$
$$y_{n-1} = \frac{x_{n-1} + x_n}{2}, \quad y_n = \frac{x_{n-1} - x_n}{2}.$$

Если n нечетно: $y_1^2 - y_2^2 + y_3^2 - y_4^2 + \dots + y_{n-2}^2 - y_{n-1}^2;$

$$y_i = \frac{x_i + x_{i+1} + x_{i+2}}{2} \quad (i = 1, 3, 5, \dots, n-2);$$
$$y_i = \frac{x_{i-1} - x_i + x_{i+1}}{2} \quad (i = 2, 4, 6, \dots, n-1);$$
$$y_n = x_n.$$

1197. $\frac{n-1}{n}y_1^2 + \frac{n-2}{n-1}y_2^2 + \dots + \frac{2}{3}y_{n-2}^2 + \frac{1}{2}y_{n-1}^2;$

$$y_1 = x_1 - \frac{x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n-1};$$
$$y_2 = x_2 - \frac{x_3 + x_4 + \dots + x_n}{n-2};$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$y_{n-1} = x_{n-1} - x_n;$$
$$y_n = x_n.$$

Указание. Представить форму в виде $f_1 = \frac{n-1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{2}{n}\sum_{i<j}^{n} x_i x_j$ и применить метод индукции. Другой путь состоит в следующем: совершив преобразование $z_1 = x_1 - s$; $z_2 = x_2 - s$; ...; $z_{n-1} = x_{n-1} - s$; $z_n = x_n$ и сложив эти равенства, приведем форму $\sum_{i=1}^{n}(x_i - s)^2$ к виду: $2\left(\sum_{i=1}^{n-1} z_i^2 + \sum_{i<j}^{n-1} z_i z_j\right)$. Используя ответ задачи 1194, получим $2y_1^2 + \frac{3}{2}y_2^2 + \frac{4}{3}y_3^2 + \dots + \frac{n}{n-1}y_{n-1}^2$. При этом связь старых и новых неизвестных получается сравнительно сложной.

1198. $(n-1)y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 - \dots - y_n^2$;

$$\begin{aligned}
y_1 &= \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n);\\
y_2 &= \frac{1}{2}(-x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n);\\
y_3 &= \frac{1}{2}(-x_1 - x_2 + x_3 + \dots + x_n);\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
y_n &= \frac{1}{2}(-x_1 - x_2 - \dots - x_{n-1} + x_n).
\end{aligned}$$

Обратное преобразование имеет вид: $x_1 = y_1 - y_2$; $x_2 = y_2 - y_3$; ...; $x_{n-1} = y_{n-1} - y_n$; $x_n = y_1 + y_n$. Указание. Применить преобразование

$$\begin{aligned}
z_1 &= x_1 + x_2 + \dots + x_n;\\
z_2 &= x_2 + x_3 + \dots + x_n;\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
z_n &= x_n.
\end{aligned}$$

1199. Указание. Доказательство аналогично доказательству закона инерции.

1200. Указание. Использовать предыдущую задачу.

1201. Формы f_1 и f_3 эквивалентны между собой и не эквивалентны форме f_2.

1202. Формы f_2 и f_3 эквивалентны между собой и не эквивалентны форме f_1.

1203. В комплексной области $n+1$; в вещественной области $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

1204. Ранг — четное число, сигнатура равна нулю.

1205. $\left[\frac{n - |s|}{2}\right] + 1$, где $[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x.

1210. Указание. Для доказательства утверждения б) рассмотреть форму $f_\varepsilon = f + \varepsilon g$, где $\varepsilon > 0$ и g — сумма квадратов неизвестных. При доказательстве необходимости проверить, что $f_\varepsilon > 0$ и что для соответствующих главных миноров D и D_ε форм f и f_ε имеет место: $D = \lim_{\varepsilon\to 0} D_\varepsilon$. При доказательстве достаточности проверить, разлагая D_ε по степеням ε, что $D_\varepsilon > 0$, и показать, что для любых значений неизвестных имеет место $f = \lim_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon$. Примеры. Форма

$f_1 = -x_2^2$ или невырожденная форма $f_2 = -x_2^2 + 2x_1x_3$ имеют угловые миноры неотрицательными, но сами не являются неотрицательными.

При доказательстве утверждения в) применить задачу 1208.

При доказательстве утверждения г) применить задачу 916 и приведение f к нормальному виду, показав, что $A = D'BD = (BD)'(BD)$, где D — матрица преобразования, а B — матрица формы в нормальном виде.

1212. $\lambda > 2$. **1213.** $|\lambda| < \sqrt{5/3}$. **1214.** $-0,8 < \lambda < 0$.

1215. Требуемых значений λ не существует.

1216. Требуемых значений λ не существует.

1217. Указание. Пусть $g = f + l^2$, где $l = c_1x_1 + \dots + c_nx_n$. Меняя порядок неизвестных, прийти к случаю $c_n \neq 0$, совершить преобразование $y_i = x_i$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$), $y_n = \dfrac{l}{c_n}$ и доказать, что для новых форм $D_{g_1} = D_{f_1} + c_n^2 D_{n-1}$, где D_{n-1} — угловой минор порядка $n-1$ формы f_1.

1218. Указание. Представить форму f в виде

$$f = a_{11}\left(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \dots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)^2 + f_1(x_2, \dots, x_n)$$

и, пользуясь предыдущей задачей, показать, что $D_f = a_{11}D_{f1} \leqslant a_{11}D_\varphi$.

1219. Указание. Использовать канонический вид данной формы.

1220. Решение. Очевидно, что $(f_1 + f_2, g) = (f_1, g) + (f_2, g)$. Приводя обе формы к нормальному виду, найдем $f = \sum\limits_{i=1}^{r} y_i^2$, $g = \sum\limits_{j=1}^{s} z_j^2$, где y_i, z_j — линейные формы от $x_1, x_2, \dots, x_n$. В силу отмеченных свойств композиции имеем: $(f, g) = \sum\limits_{i=1}^{r}\sum\limits_{j=1}^{s}(y_i^2, z_j^2)$.

Рассмотрим одно из слагаемых (y^2, z^2), где $y = \sum\limits_{k=1}^{n} a_kx_k$, $z = \sum\limits_{k=1}^{n} b_kx_k$. Тогда $y^2 = \sum\limits_{k,l=1}^{n} a_ka_lx_kx_l$; $z^2 = \sum\limits_{k,l=1}^{n} b_kb_lx_kx_l$; $(y^2, z^2) = \sum\limits_{k,l=1}^{n} a_ka_lb_kb_lx_kx_l = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_kb_kx_k\right)^2 \geqslant 0$ при любых вещественных значениях $x_1, \dots, x_n$. Отсюда $(f, g) \geqslant 0$, чем утверждение а) доказано. Пусть теперь $f > 0$ и $g > 0$. Форму g приведем к нормальному виду: $g = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2$, где $y_i = \sum\limits_{j=1}^{n} q_{ij}x_j$ ($i = 1, \dots, n$) и $|Q| = |q_{ij}| \neq 0$. Тогда $(f, g) = \sum\limits_{i=1}^{n}(f, y_i^2)$. Но $y_i^2 = \sum\limits_{j,k=1}^{n} q_{ij}q_{ik}x_jx_k$, откуда $(f, y_i^2) = \sum\limits_{j,k=1}^{n} a_{jk}q_{ij}q_{ik}x_jx_k = \sum\limits_{j,k=1}^{n} a_{jk}(q_{ij}x_j)(q_{ik}x_k) \geqslant 0$ в силу $f > 0$. Если при некотором t берем значение $x_t \neq 0$, то существует i такое, что $q_{it} \neq 0$

(иначе было бы в вертикальных чертах $Q = 0$). Значит, в силу $f > 0$ также $(f, y_i^2) = \sum\limits_{j,k=1}^{n} a_{jk}(q_{ij}x_j)(q_{ik}x_k) > 0$ и $(f, g) > 0$.

1221. Указание. При доказательстве утверждения б) рассмотреть формы $f_k = \sum\limits_{i,j=1}^{k} a_{ij}x_ix_j$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

1222. Указание. Необходимость условий (2) следует из неизменности угловых миноров при треугольных преобразованиях (см. предыдущую задачу).

Так же доказываются равенства (3). Достаточность можно доказать индукцией по числу неизвестных n.

1224. $f_1 = -2y_1^2 + \frac{2}{3}y_2^2$; $g_1 = y_1^2 + y_2^2$; $x_1 = y_1 + \frac{1}{3}\sqrt{3}y_2$; $x_2 = \frac{1}{2}y_1 = -\frac{1}{6}\sqrt{3}y_2$.

1225. $f_1 = y_1^2 + y_2^2$; $g_1 = 4y_1^2 - 2y_2^2$; $x_1 = -2\sqrt{2}y_1 + 3\sqrt{2}y_2$; $x_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2}y_1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}y_2$.

1226. $f_1 = 9y_1^2 + 9y_2^2 - 9y_3^2$; $g_1 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$; $x_1 = \sqrt{2}y_2$; $x_2 = \frac{1}{6}y_1 - \frac{1}{3}\sqrt{2}y_3$; $x_3 = \frac{2}{3}y_1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}y_2 + \frac{1}{6}\sqrt{2}y_3$.

1227. $f_1 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - 3y_4^2$; $g_1 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2$; $x_1 = y_1 + y_2 + y_3 + y_4$; $x_2 = y_2 - y_4$; $x_3 = \frac{1}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_2 + \frac{1}{2}y_3 - \frac{1}{2}y_4$; $x_4 = \frac{1}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{2}y_3 + \frac{1}{2}y_4$.

1228. $f_1 = y_1^2 + 2y_2^2 + 2y_3^2 - 7y_4^2$; $g_1 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2$; $x_1 = \frac{2}{3}y_2 + \frac{2}{3}y_3 + \frac{1}{3}y_4$; $x_2 = \frac{2}{3}y_2 - \frac{4}{3}y_3 + \frac{4}{3}y_4$; $x_3 = y_3 - 2y_4$; $x_4 = y_1$.

1229. $f_1 = y_1^2 + 2y_2^2 - 3y_3^2$; $g_1 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$; $x_1 = y_1 - y_2$; $x_2 = -y_2 + y_3$; $x_3 = -3y_2 + 2y_3$.

1230. Указание. Показать, что корни λ-уравнения пары форм не изменяются при любом невырожденном линейном преобразовании неизвестных.

1231. Нельзя, так как корни λ-уравнения $1 \pm \frac{1}{2}i$.

1232. Нельзя, так как корни λ-уравнения $\pm\frac{1}{2}i\sqrt{5}$.

1233. При подходящей нумерации имеет место: $\lambda_i\mu_i = 1$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

1234. $3y_1^2 - y_2^2 - 5y_3^2$. **1235.** $5y_1^2 - y_2^2 - 2y_3^2$.

1237. Эквивалентны. **1238.** Эквивалентны.

1239. $x_1 = 12y_1 - 17y_2$; $x_2 = 5y_1 + 7y_2$. **1240.** $x_1 = y_1 + 2y_2$; $x_2 = 3y_1 + 2y_2$.

1242. Указание. Показать, что характеристический многочлен $|A - \lambda E|$ не изменяется при ортогональном преобразовании формы f.

1243. $4y_1^2 + 4y_2^2 - 2y_3^2$. **1244.** $6y_1^2 + 6y_2^2 + 9y_3^2$.

1245. $y_1^2 + \sqrt{3}y_2^2 - \sqrt{3}y_3^2$. **1246.** $3y_1^2 + (1 + \sqrt{17})y_2^2 + (1 - \sqrt{17})y_3^2$.

1247. $\sum\limits_{k=1}^{n} \cos\dfrac{\pi k}{n+1} y_k^2$. Указание. Рассмотреть удвоенную форму и решать аналогично задаче 1084.

1248. $3y_1^2 + 6y_2^2 + 9y_3^2$; $x_1 = \frac{2}{3}y_1 - \frac{1}{3}y_2 + \frac{2}{3}y_3$; $x_2 = \frac{2}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2 - \frac{1}{3}y_3$; $x_3 = -\frac{1}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2 + \frac{2}{3}y_3$.

1249. $9y_1^2 + 18y_2^2 - 9y_3^2$; $x_1 = \frac{2}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2 - \frac{1}{3}y_3$; $x_2 = -\frac{1}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2 + \frac{2}{3}y_3$; $x_3 = \frac{2}{3}y_1 - \frac{1}{3}y_2 + \frac{2}{3}y_3$.

1250. $3y_1^2 + 6y_2^2 - 2y_3^2$; $x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_3$; $x_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}y_1 - \frac{1}{\sqrt{6}}y_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_3$; $x_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}y_1 - \frac{2}{\sqrt{6}}y_2$.

1251. $5y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$; $x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}y_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_3$; $x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}y_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}y_3$; $x_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}y_1 - \frac{2}{\sqrt{6}}y_2$.

1252. $9y_1^2 + 18y_2^2 + 18y_3^2$; $x_1 = \frac{1}{3}y_1 - \frac{2}{3}y_2 + \frac{2}{3}y_3$; $x_2 = \frac{2}{3}y_1 - \frac{1}{3}y_2 - \frac{2}{3}y_3$; $x_3 = \frac{2}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2 + \frac{1}{3}y_3$.

1253. $3y_1^2 - 6y_2^2$; $x_1 = \frac{2}{3}y_1 + \frac{1}{6}\sqrt{2}y_2 + \frac{1}{2}\sqrt{2}y_3$; $x_2 = \frac{1}{3}y_1 - \frac{2}{3}\sqrt{2}y_2$; $x_3 = \frac{2}{3}y_1 + \frac{1}{6}y_2 - \frac{1}{2}\sqrt{2}y_3$.

1254. $9y_1^2 + 9y_2^2 - 9y_3^2$; $x_1 = \frac{2}{3}y_1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}y_2 + \frac{1}{6}\sqrt{2}y_3$; $x_2 = \frac{1}{3}y_1 - \frac{2}{3}\sqrt{2}y_3$; $x_3 = \frac{2}{3}y_1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}y_2 + \frac{1}{6}\sqrt{2}y_3$.

1255. $2y_1^2 + 4y_2^2 - 2y_3^2 - 4y_4^2$; $x_1 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2 + y_3 + y_4)$; $x_2 = \frac{1}{2}(-y_1 + y_2 + y_3 - y_4)$; $x_3 = \frac{1}{2}(-y_1 - y_2 + y_3 + y_4)$; $x_4 = \frac{1}{2}(y_1 - y_2 + y_3 - y_4)$.

1256. $4y_1^2 + 8y_2^2 + 12y_3^3 - 4y_4^2$; $x_1 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2 + y_3 + y_4)$; $x_2 = \frac{1}{2}(y_1 - y_2 - y_3 + y_4)$; $x_3 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2 - y_3 - y_4)$; $x_4 = \frac{1}{2}(y_1 - y_2 + y_3 - y_4)$.

1257. $5y_1^2 - 5y_2^2 + 5y_3^2$; $x_1 = \frac{1}{5}\sqrt{5}(2y_1 + y_2)$; $x_2 = \frac{1}{5}\sqrt{5}(y_1 - 2y_2)$; $x_3 = \frac{1}{5}\sqrt{5}(2y_3 + y_4)$; $x_4 = \frac{1}{5}\sqrt{5}(-y_3 + 2y_4)$.

1258. $2y_1^2 - 4y_2^2$; $x_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2}(y_1 + y_3)$; $x_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2}(y_1 - y_3)$; $x_3 = \frac{1}{2}\sqrt{2}(y_2 + y_4)$; $x_4 = \frac{1}{2}\sqrt{2}(y_2 - y_4)$.

1259. $9y_1^2 + 9y_2^2 + 9y_3^2$; $x_1 = y_1$; $x_2 = \frac{1}{3}(y_2 + 2y_3 + 2y_4)$; $x_3 = \frac{1}{3}(2y_2 + y_3 - 2y_4)$; $x_4 = \frac{1}{3}(2y_2 - 2y_3 + y_4)$.

1260. $5y_1^2 + 5y_2^2 + 5y_3^2 - 8y_4^2$; $x_1 = \frac{1}{5}\sqrt{5}(2y_1 + y_5)$; $x_2 = \frac{1}{5}\sqrt{5}(-y_1 + 2y_5)$; $x_3 = y_3$; $x_4 = \frac{1}{13}\sqrt{13}(2y_2 + 3y_4)$; $x_5 = \frac{1}{13}\sqrt{13}(3y_2 - 2y_4)$.

1261. $4y_1^2 + 4y_2^2 + 4y_3^2 - 6y_4^2 - 6y_5^2$; $x_1 = y_1$; $x_2 = \frac{1}{5}\sqrt{5}(y_2 + 2y_4)$; $x_3 = \frac{1}{5}\sqrt{5}(-2y_2 + y_4)$; $x_4 = \frac{1}{10}\sqrt{10}(y_3 + 3y_5)$, $x_5 = \frac{1}{10}\sqrt{10}(3y_3 - y_5)$.

1262. $5y_1^2 - 5y_2^2 + 5y_3^2 - 5y_4^2 + 5y_5^2$; $x_1 = \frac{1}{5}\sqrt{5}(2y_1 + y_2)$; $x_2 = \frac{1}{5}\sqrt{5}(y_1 - 2y_2)$; $x_3 = \frac{1}{10}\sqrt{10}(3y_3 + y_4)$; $x_4 = \frac{1}{10}\sqrt{10}(-y_3 + 3y_4)$; $x_5 = \frac{1}{5}\sqrt{5}(2y_5 + y_6)$; $x_6 = \frac{1}{5}\sqrt{5}(y_5 - 2y_6)$.

1263. $\frac{n+1}{2}y_1^2 + \frac{1}{2}y_2^2 + \dots + \frac{1}{2}y_n^2$; $y_1 = \frac{1}{\sqrt{n}}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$; $y_i = \frac{1}{\sqrt{i(i-1)}}[x_1 + x_2 + \dots + x_{i-1} - (i-1)x_i]$ $(i = 2, 3, \dots, n)$.

1264. $\frac{n-1}{2}y_1^2 - \frac{1}{2}y_2^2 - \frac{1}{2}y_3^2 - \dots - \frac{1}{2}y_n^2$; преобразование можно взять то же, что и в предыдущей задаче.

1265. Указание. Показать, что при ортогональном преобразовании квадратичной формы характеристический многочлен ее матрицы не изменяется.

1266. Формы f и h ортогонально эквивалентны между собой, но не ортогонально эквивалентны форме g.

1269. $Q = \begin{pmatrix} 2/3 & -2/3 & -1/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 & -2/3 \end{pmatrix}$; $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

1270. $Q = \begin{pmatrix} \frac{2}{5}\sqrt{5} & 0 & \frac{1}{5}\sqrt{5} \\ \frac{2}{15}\sqrt{5} & -\frac{1}{3}\sqrt{5} & -\frac{4}{15}\sqrt{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$; $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$;

1271. Указание. Пользуясь указанием к задаче 1074, показать, что характеристические числа матрицы $A - \lambda_0 E$ получаются вычитанием λ_0 из характеристических чисел матрицы A, и применить задачу 1242.

1272. Указание. Применить предыдущую задачу.

1274. Вещественная квадратная матрица с положительными угловыми минорами тогда и только тогда ортогональна, когда она является единичной.

1275. Решение. Квадратичная форма f с матрицей $A'A$ положительно определенна (задача 1207); значит, треугольным преобразованием ее можно привести к каноническому виду с положительными коэффициентами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ (задача 1222). Если C — матрица этого преобразования, D — диагональная матрица с элементами $\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \ldots, \sqrt{\lambda_n}$ на диагонали (причем все значения корней взяты положительными), и $B = DC$, то $A'A = C'D^2C = B'B$, где матрица B удовлетворяет требованиям задачи. Положим $Q = AB^{-1}$. Тогда $Q'Q = (AB^{-1})' \cdot (AB^{-1}) = (B')^{-1} \cdot (A'A) \cdot B^{-1} = (B')^{-1} \cdot B'B \cdot B^{-1} = E$, т. е. матрица Q ортогональна и $A = QB$; если еще $A = Q_1B_1$, то матрица $Q^{-1} \cdot Q_1 = BB_1^{-1}$ ортогональна и треугольна, с положительными элементами на диагонали. Значит, это единичная матрица, откуда $Q = Q_1$ и $B = B_1$.

1276. Решение. Докажем утверждение а) для представления $A = QB$ требуемого вида. Матрица $A'A$ симметрична, и квадратичная форма с этой матрицей положительно определенна (задача 1207). Поэтому существует ортогональная матрица P такая, что $A'A = P'CP$, где C — диагональная матрица с положительными элементами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ на диагонали. Пусть D — диагональная матрица с элементами $\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \ldots, \sqrt{\lambda_n}$ на диагонали, причем взяты положительные значения корня. Положим $B = P'DP = P^{-1}DP$. Отсюда следует, что B — симметрическая матрица с положительными характеристическими числами. Значит, квадратичная форма с матрицей B положительно определенна и угловые миноры ее положительны. Далее $A'A = P^{-1}CP = P^{-1}D^2P = P^{-1}DP \cdot P^{-1}DP = B^2$. Положим $Q = AB^{-1}$. Тогда $A = QB$ и $Q'Q = (AB^{-1})' \cdot (AB^{-1}) = B'^{-1}(A'A) \cdot B^{-1} = B^{-1}B^2 \cdot B^{-1} = E$. Значит, матрица Q ортогональна.

Пусть даны два представления требуемого вида: $A = Q_1B_1 = Q_2B_2$. Тогда $A'A = B_1^2 = B_2^2$. Обозначим через $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$; $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$; $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ характеристические числа соответственно для $A'A, B_1, B_2$, расположенные в невозрастающем порядке. Все эти числа положительны и $\mu_i^2 = \lambda_i = \nu_i^2$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ (задача 1077). Значит, $\mu_i = \nu_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Пусть C и D — диагональные матрицы с элементами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ и $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ на диагонали. Существуют ортогональные матрицы U и V такие, что $B_1 = U'DU$, $B_2 = V'DV$. Значит, $B_1^2 = U'CU$, $B_2^2 = V'CV$, откуда $U'CU = V'CV$, $CUV' = UV'C$. Матрица $W = (w_{ij})_1^n = UV'$ перестановочна с C. Покажем, что она перестановочна с D. Если $\lambda_i \neq \lambda_j$, то, вычисляя элемент матрицы $CW = WC$ в i-й строке и j-м столбце, найдем, что $w_{ij} = 0$. Таким образом, если представить матрицу C в виде клеточно диагональной матрицы с диагональными клетками $C_1, C_2, \ldots, C_k$ так, что в каждой клетке диагональные элементы одинаковы, а в разных клетках — различны, то матрица W является клеточно диагональной с диагональными клетками $W_1, W_2, \ldots, W_k$ тех же порядков, что и $C_1, C_2, \ldots, C_k$. По построению матрицы D она также будет клеточно диагональной с диагональными клетками $D_1, D_2, \ldots, D_k$ тех же порядков и равными диагональными элементами в каждой клетке. Так как $D_iW_i = W_iD_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$, то $DW = WD$. Отсюда $DUV' = UV'D$; $U'DU = V'DV$, т. е. $B_1 = B_2$.

Пользуясь функциями от матриц, можно провести доказательство короче. Если $A = QB$ — представление искомого вида, то $A'A = B^2$; $B = \sqrt{A'A}$, причем характеристические числа B положительны. Таким образом, B является значением функции $\sqrt{\lambda}$ (где берется арифметическое значение корня) при $\lambda = A'A$. Так как характеристические числа матрицы $A'A$ положительны, то это значение имеет смысл, определено однозначно и, как многочлен от симметрической матрицы $A'A$, будет матрицей симметрической (задачи 1148, 1151). Полагая $Q = AB^{-1}$, убедимся, как выше, что Q ортогональна.

Представление $A = B_2Q_2$ получается аналогично при помощи матрицы AA'. Утверждение б) доказывается так же, как а), с заменой положительно определенных форм эрмитовыми положительно определенными формами. Утверждение в) следует из единственности представлений, указанных в а) и в б). Оно может быть доказано также приведением матрицы B в случае 1) и матрицы A в случае 2) к диагональному виду при помощи ортогональной (унитарной) матрицы (см. задачу 1595). Тогда из утверждения 1) легко следует единственность представлений, указанных в а) и б).

Отдел 4. Векторные пространства и их линейные преобразования

1277. $(1,2,3)$. **1278.** $(1,1,1)$. **1279.** $(0,2,1,2)$.

1280. $x_1 = -27x_1' - 71x_2' - 41x_3'$; $x_2 = 9x_1' + 20x_2' + 9x_3'$; $x_3 = 4x_1' + 12x_2' + 8x_3'$.

1281. $x_1 = 2x_1' + x_3' - x_4'$; $x_2 = -3x_1' + x_2' - 2x_3' + x_4'$; $x_3 = x_1' - 2x_2' + 2x_3' - x_4'$; $x_4 = x_1' - x_2' + x_3' - x_4'$.

1282. а) $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$; б) $f(\alpha)$, $f'(\alpha)$, $\dfrac{f''(\alpha)}{2!}$, $\ldots$, $\dfrac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}$.

1283. $$\begin{pmatrix} 1 & -\alpha & \alpha^2 & -\alpha^3 & \ldots & (-1)^n\alpha^n \\ 0 & 1 & -2\alpha & 3\alpha^2 & \ldots & (-1)^{n-1}n\alpha^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

В этой матрице в $(k+1)$-м столбце стоят числа

$$(-\alpha)^k, C_k^{k-1}(-\alpha)^{k-1}, C_k^{k-2}(-\alpha)^{k-2}, \ldots, C_k^1(-\alpha), 1, 0, 0, \ldots, 0.$$

1284. а) Поменяются местами две строки; б) поменяются местами два столбца; в) произойдет симметричное отражение матрицы относительно ее центра.

1285. Не является. **1286.** Не является.

1287. Является, если данная прямая проходит через начало координат, не является в противном случае.

1288. Является. **1289.** Не является. **1290.** Не является.

1291. Является. **1292.** Не является. **1293.** Является.

1294. Все пространство; векторы, лежащие в любой плоскости, проходящей через начало координат; векторы, лежащие на любой прямой, проходящей через начало координат, и само начало координат, т. е. один нулевой вектор.

1295. Не верно.

1297. Базис образуют, например, векторы $(1, 0, 0, \ldots, 0, 1)$, $(0, 1, 0, \ldots, 0, 0)$, $(0, 0, 1, \ldots, 0, 0)$, $\ldots$, $(0, 0, 0, \ldots, 1, 0)$. Размерность равна $n - 1$.

1298. Базис образуют следующие векторы: если k — номер базисного вектора, то его координата с номером $2k - 1$ равна единице, а остальные координаты равны нулю, $k = 1, 2, \ldots, \left[\dfrac{n+1}{2}\right]$, где $[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x. Размерность равна $\left[\dfrac{n+1}{2}\right]$.

1299. Базис образуют векторы, указанные как базисные в ответе предыдущей задачи, с добавлением еще одного вектора, у которого координаты с четными номерами равны единице, а с нечетными — нулю. Размерность равна $1 + \left[\dfrac{n+1}{2}\right]$.

1300. Базис образуют векторы $(1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots)$ и $(0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots)$. Размерность равна 2.

1301. Базис образуют, например, матрицы E_{ij} $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$, где E_{ij} — матрица, элемент которой в i-й строке и j-м столбце равен единице, а все остальные элементы равны нулю. Размерность равна n^2.

1302. Базис образуют, например, многочлены: $1, x, x^2, \ldots, x^n$. Размерность равна $n + 1$.

1303. Базис образуют, например, матрицы F_{ij} $(i \leqslant j;\ i, j = 1, 2, \ldots, n)$, где F_{ij} — матрица, у которой элементы $f_{ij} = f_{ji} = 1$, а все остальные элементы равны нулю. Размерность равна $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

1304. Базис образуют, например, матрицы G_{ij} $(i < j;\ i, j = 1, 2, \ldots, n)$, где G_{ij} — матрица, элементы которой $g_{ij} = 1$, $g_{ji} = -1$, а все остальные элементы равны нулю. Размерность равна $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

1308. Базис образуют, например, векторы $(1, 0, 0, \ldots, 0, -1)$, $(0, 1, 0, \ldots, 0, -1)$, $\ldots$, $(0, 0, 0, \ldots, 1, -1)$. Размерность равна $n - 1$.

1310. Размерность равна 3. Базис образуют, например, векторы a_1, a_2, a_4.

1311. Размерность равна 3. Базис образуют, например, векторы a_1, a_2, a_5.

1312. Например, $x_1 - x_3 - x_4 = 0$, $x_2 + x_3 - x_4 = 0$.

1313. Например, $x_1 - x_2 - 2x_3 = 0$, $x_1 - x_2 + 2x_4 = 0$, $2x_1 + x_2 - x_5 = 0$.

1317. $s = 3$, $d = 1$. **1318.** $s = 3$, $d = 2$.

1319. Решение. Правило 1) доказывается легко. Докажем правило 2). Так как числа $x_{i1}, \ldots, x_{ik}$, $y_{i1}, \ldots, y_{il}$ удовлетворяют равенству (1), то $c_i = \sum\limits_{j=1}^{l} y_{ij} b_j = \sum\limits_{j=1}^{k} x_{ij} a_j$. Поэтому векторы $\boldsymbol{c}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, d)$ принадлежат как $\boldsymbol{L}_1$, так и $\boldsymbol{L}_2$, а значит, и их пересечению $\boldsymbol{D}$. Пусть $\boldsymbol{x}$ — любой вектор $\boldsymbol{D}$. Он выражается как через базис $\boldsymbol{L}_1$, так и через базис $\boldsymbol{L}_2$. Значит, $\boldsymbol{x} = \alpha_1 \boldsymbol{a}_1 + \cdots + \alpha_k \boldsymbol{a}_k = \beta_1 \boldsymbol{b}_1 + \cdots + \beta_l \boldsymbol{b}_l$. Это означает, что строка чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_l$ есть решение системы уравнений (1) и потому линейно выражается через фундаментальную систему решений (2). Пусть $\gamma_1, \ldots, \gamma_d$ — коэффициенты этого выражения. Тогда $\beta_j = \sum\limits_{i=1}^{d} \gamma_i \gamma_{ij}$ $(j = 1, 2, \ldots, l)$, откуда

$$x = \sum_{j=1}^{l} \beta_j b_j = \sum_{j=1}^{l} \left(\sum_{i=1}^{d} \gamma_i \gamma_{ij} \right) b_j = \sum_{i=1}^{d} \gamma_i \left(\sum_{j=1}^{l} y_{ij} b_j \right) = \sum_{i=1}^{d} \gamma_i c_i.$$

Итак, любой вектор $x \in D$ линейно выражается через векторы (4). Наконец, система (4) линейно независима, так как матрица координат этих векторов в базисе $b_1, \ldots, b_l$ содержит минор (3) порядка d, отличный от нуля.

1320. Базис суммы образуют, например, векторы a_1, a_2, b_1. Базис пересечения состоит из одного вектора $c = 2a_1 + a_2 = b_1 + b_2 = (3, 5, 1)$.

1321. Базис суммы образуют, например, векторы a_1, a_2, a_3, b_2. Базис пересечения, например, $b_1 = -2a_1 + a_2 + a_3$, $b_3 = 5a_1 - a_2 - 2a_3$.

1322. Базис суммы состоит, например, из векторов a_1, a_2, a_3, b_1. Базис пересечения — например, из векторов $c_1 = a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 = (1, 2, 2, 1)$; $c_2 = 2a_1 + 2a_3 = b_1 + b_3 = (2, 2, 2, 2)$.

1328. Проекция вектора e_1 на L_1 параллельно L_2 имеет i-ю координату $\dfrac{n-1}{n}$, а остальные — $\dfrac{-1}{n}$, проекция на L_2 параллельно L_1 имеет все координаты равными $1/n$.

1329. $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & \ldots & 1/2 \\ 1/2 & 1 & \ldots & 1/2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1/2 & 1/2 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$; $\quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & \ldots & 1/2 \\ -1/2 & 0 & \ldots & 1/2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -1/2 & -1/2 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$.

1334. Указание. Рассмотреть параметрические уравнения прямых $x = a_0 + a_1 t, x = b_0 + b_1 t$, где a_0, a_1, b_0, b_1 — данные векторы.

1335. Векторы $a_0 - b_0, a_1, b_1$ должны быть линейно зависимы.

1336. Искомые условия состоят в том, что векторы a_1 и b_1 линейно независимы, а вектор $a_0 - b_0$ линейно выражается через a_1 и b_1. Если $a_0 - b_0 = t_1 a_1 + t_2 b_1$, то точка пересечения задается вектором $a_0 - t_1 a_1 = b_0 + t_2 b_1$.

1337. $(-2, -5, -1, 1, -1)$. **1338.** $(0, 1, -1, -2, -3)$.

1339. Необходимые и достаточные условия состоят в том, что четверка векторов $a_0 - c, b_0 - c, a_1, b_1$ линейно зависима, а каждая из двух троек $a_0 - c, a_1, b_1$ и $b_0 - c, a_1, b_1$ линейно независима. Искомая прямая имеет уравнение $x = c + dt$, где $d = \lambda_1(a_0 - c) + \lambda_2 a_1 = \lambda_3(b_0 - c) + \lambda_4 b_1$, причем коэффициенты λ_1 и λ_3 отличны от нуля.

Точки пересечения этой прямой с данными прямыми имеют вид

$$a_0 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} a_1 = c + \frac{1}{\lambda_1} d \quad \text{и} \quad b_0 + \frac{\lambda_4}{\lambda_3} b_1 = c + \frac{1}{\lambda_3} d.$$

1340. $x = c + dt$, где $d = (6, 7, -8, -11)$; $M_1(2, 2, -3, -4), M_2(-4, -5, 5, 7)$.

1341. $x = c + dt$, где $d = (1, 1, 0, 3)$; $M_1(2, 3, 2, 1), M_2(1, 2, 2, -2)$.

1344. Если две плоскости трехмерного пространства имеют общую точку, то они имеют общую прямую. Если плоскость и трехмерное линейное многообразие четырехмерного пространства имеют общую точку, то они имеют общую прямую. Если два трехмерных линейных многообразия четырехмерного пространства имеют общую точку, то они имеют общую плоскость.

1345. Для удобства классификации разных случаев введем две матрицы: A — матрица, по столбцам которой записаны координаты векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$, B — матрица, полученная из A приписыванием столбца координат вектора $\boldsymbol{a}_0 - \boldsymbol{b}_0$. Пусть ранг $A = r_1$, ранг $B = r_2$. Возможен один из шести случаев:

1) $r_1 = 4, r_2 = 5$. Плоскости не лежат в одном четырехмерном многообразии (плоскости абсолютно скрещиваются).

2) $r_1 = r_2 = 4$. Плоскости имеют одну общую точку, значит, лежат в одном четырехмерном, но не лежат в одном трехмерном многообразии (плоскости абсолютно пересекаются).

3) $r_1 = 3, r_2 = 4$. Плоскости не имеют общих точек, лежат в одном четырехмерном, но не лежат в одном трехмерном многообразии (плоскости скрещиваются параллельно прямой, именно: обе они параллельны прямой с уравнением $\boldsymbol{a}_1 t_1 + \boldsymbol{a}_2 t_2 = \boldsymbol{b}_1 t_3 + \boldsymbol{b}_2 t_4$).

4) $r_1 = r_2 = 3$. Плоскости лежат в трехмерном пространстве и пересекаются по прямой.

5) $r_1 = 2, r_2 = 3$. Плоскости не имеют общих точек, но лежат в одном трехмерном пространстве (плоскости параллельны).

6) $r_1 = r_2 = 2$. Плоскости совпадают, $r_2 \geqslant r_1 \geqslant 2$, так как обе пары векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ и $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$ линейно независимы.

1347. Указание. Вести доказательство индукцией по числу k.

1348. Октаэдр с вершинами в точках: $(1,1,-1,-1), (1,-1,1,-1), (1,-1,-1,1), (-1,-1,1,1), (-1,1,-1,1), (-1,1,1,-1)$. Указание. При определении координат вершин учесть, что вершины искомого сечения должны быть точками пересечения секущего подпространства с ребрами куба и что вдоль каждого ребра куба три координаты равны ± 1, а четвертая меняется от $+1$ до -1.

1349. Тетраэдр с вершинами в точках:

$$\left(\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right), \left(-\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right), \left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, -\frac{1}{4}\right), \left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right).$$

Указание. Найти проекции вершин.

1350. Указание. Принять данный конец диагонали за начало, а ребра, из него выходящие, — за оси координат и показать, что рассматриваемые параллельные линейные многообразия определяются уравнениями

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = k \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n),$$

а точка пересечения диагонали с k-м из этих многообразий имеет все координаты равными одному и тому же числу k/n $(k = 0, 1, 2, \dots, n)$.

1352. Билинейная форма g должна быть симметрична, т. е. $a_{ij} = a_{ji}$ $(i, j = 1, 2, \dots, n)$, а соответствующая ей квадратичная форма $f = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$ — положительно определенная; $(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = a_{ij}$ $(i, j = 1, 2, \dots, n)$.

1357. Можно добавить векторы $(2, 2, 1, 0), (5, -2, -6, -1)$.

1358. Можно добавить векторы $(1,-2,1,0),(25,4,-17,-6)$.

1359. Один из векторов $\pm\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$.

1360. Например: $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

1361. $(1,2,2,-1),(2,3,-3,2),(2,-1,-1,-2)$.

1362. $(1,1,-1,-2),(2,5,1,3)$.

1363. $(2,1,3,-1),(3,2,-3,-1),(1,5,1,10)$.

1366. Например: $\boldsymbol{b}_1=(2,-2,-1,0),\boldsymbol{b}_2=(1,1,0,-1)$.

1367. Например: $6x_1-9x_2-x_3=0, x_2+x_4=0$.

1369. Пусть $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_k$ — базис $\boldsymbol{L}$. Ищем $\boldsymbol{y}$ в виде $\boldsymbol{y}=\sum\limits_{j=1}^{k}c_j\boldsymbol{a}_j$. Умножая это равенство скалярно из $\boldsymbol{a}_i$ и замечая, что $(\boldsymbol{a}_i,\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{a}_i,\boldsymbol{x})$, получаем систему уравнений $\sum\limits_{j=1}^{k}(\boldsymbol{a}_i,\boldsymbol{a}_j)c_j=(\boldsymbol{a}_i,\boldsymbol{x})$ $(i=1,2,\ldots,k)$, которая по смыслу $c_1,c_2,\ldots,c_k$ должна иметь единственное решение. Найдя $\boldsymbol{y}$, полагаем $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}$.

1370. $\boldsymbol{y}=3\boldsymbol{a}_1-2\boldsymbol{a}_2=(1,-1,-1,5)$; $\boldsymbol{z}=(3,0,-2,-1)$.

1371. $\boldsymbol{y}=2\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2=(3,1,-1,-2)$; $\boldsymbol{z}=(2,1,-1,4)$.

1372. $\boldsymbol{y}=(5,-5,-2,-1)$; $\boldsymbol{z}=(2,1,1,3)$.

1373. Указание. Вывести соотношение

$$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{u}|^2=|(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)-\boldsymbol{y}|^2+|\boldsymbol{y}-(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{x}_0)|^2,$$

где $\boldsymbol{y}$ — ортогональная проекция $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0$ на $\boldsymbol{L}$.

1374. а) 5; б) 2.

1375*. Указание. Положим $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}$, где $\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{L},\boldsymbol{z}\in\boldsymbol{L}^*$. По задаче 1373 $d^2=(\boldsymbol{z},\boldsymbol{z})$. Пусть $\boldsymbol{y}=\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+\lambda_k\boldsymbol{a}_k$. Из последнего столбца определителя $G(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_k,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)$ вычесть предыдущие столбцы, умноженные соответственно на $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_k$, и показать, что на месте $(\boldsymbol{a}_i,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)$ получится нуль, а на месте $(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)$ будет $(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{z})=(\boldsymbol{z},\boldsymbol{z})$.

1376. Указание. Пусть $\boldsymbol{u}_1\in\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{u}_2\in\boldsymbol{P}_2$, $\boldsymbol{y}$ — ортогональная проекция $\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2$ на $\boldsymbol{L}$. Вывести равенство

$$|\boldsymbol{u}_1-\boldsymbol{u}_2|^2=|(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2)-\boldsymbol{y}|^2+|\boldsymbol{y}+(\boldsymbol{u}_1-\boldsymbol{x}_1)-(\boldsymbol{u}_2-\boldsymbol{x}_2)|^2.$$

1377. 3.

1378. Решение. Примем одну из вершин первой грани за начало координат. Пусть другие вершины первой грани задаются векторами $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\ldots,\boldsymbol{x}_k$, а вершины второй грани — векторами $\boldsymbol{x}_{k+1},\ldots,\boldsymbol{x}_n$. Ищем расстояние между линейными многообразиями, определенными вершинами этих граней (задача 1346). Эти многообразия —

$$\boldsymbol{x}_1t_1+\cdots+\boldsymbol{x}_kt_k \quad \text{и} \quad (\boldsymbol{x}_{k+1}-\boldsymbol{x}_n)t_{k+1}+\cdots+(\boldsymbol{x}_{n-1}-\boldsymbol{x}_n)t_{n-1}+\boldsymbol{x}_n.$$

Искомое расстояние равно длине ортогональной составляющей $\boldsymbol{z}$ вектора $\boldsymbol{x}_n$ относительно подпространства $\boldsymbol{L}$, натянутого на векторы $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{x}_{k+1} - \boldsymbol{x}_n, \ldots, \boldsymbol{x}_{n-1} - \boldsymbol{x}_n$. Умножая равенство

$$\boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{x}_1 t_1 + \cdots + \boldsymbol{x}_k t_k + (\boldsymbol{x}_{k+1} - \boldsymbol{x}_n) t_{k+1} + \cdots + (\boldsymbol{x}_{n-1} - \boldsymbol{x}_n) t_{n-1} + \boldsymbol{z}$$

на векторы $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{x}_{k+1} - \boldsymbol{x}_n, \ldots, \boldsymbol{x}_{n-1} - \boldsymbol{x}_n$, получим уравнения:

$$\begin{array}{l}
t_1 + \frac{1}{2} t_2 + \cdots + \frac{1}{2} t_k = \frac{1}{2}; \\
\frac{1}{2} t_1 + t_2 + \cdots + \frac{1}{2} t_k = \frac{1}{2}; \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\frac{1}{2} t_1 + \frac{1}{2} t_2 + \cdots + t_k = \frac{1}{2}; \\
\\
t_{k+1} + \frac{1}{2} t_{k+2} + \cdots + \frac{1}{2} t_{n-1} = -\frac{1}{2}; \\
\frac{1}{2} t_{k+1} + t_{k+2} + \cdots + \frac{1}{2} t_{n-1} = -\frac{1}{2}; \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\frac{1}{2} t_{k+1} + \frac{1}{2} t_{k+2} + \cdots + t_{n-1} = -\frac{1}{2},
\end{array}$$

откуда, складывая первые k и последние $n-k-1$ уравнений, легко находим: $t_1 = \cdots = t_k = \frac{1}{k+1}$; $t_{k+1} = \cdots = t_{n-1} = \frac{1}{n-k}$. Поэтому $\boldsymbol{z} = \frac{\boldsymbol{x}_{k+1} + \cdots + \boldsymbol{x}_n}{n-k} - \frac{\boldsymbol{x}_1 + \cdots + \boldsymbol{x}_k}{k+1}$. Отсюда видно, что $\boldsymbol{z}$ соединяет центры данных граней.

Так как расстояние между многообразиями, определенными вершинами данных граней, по доказанному равно расстоянию между центрами этих граней, то оно и будет расстоянием между этими гранями. Возводя в квадрат выражение для $\boldsymbol{z}$ и извлекая затем корень, находим: $|\boldsymbol{z}| = \sqrt{\frac{n+1}{2(n-k)(k+1)}}$.

1379. Указание. Найти α из условия $(\boldsymbol{x} - \alpha \boldsymbol{e}, \boldsymbol{e}) = 0$. При доказательстве единственности обе части равенства $\alpha_1 \cdot \boldsymbol{e} + \boldsymbol{z}_1 = \alpha_2 \boldsymbol{e} + \boldsymbol{z}_2$ умножить скалярно на $\boldsymbol{e}$.

1380. Указание. Рассмотреть скалярный квадрат вектора $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} - \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i \boldsymbol{e}_i$, где $\alpha_i = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_i)$, и применить свойства в) и г) предыдущей задачи.

1381. Указание. Первый способ: рассмотреть скалярный квадрат $(\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} + t\boldsymbol{y})$ как неотрицательный квадратный трехчлен от t. Второй способ: при $\boldsymbol{y} \neq 0$ представить $\boldsymbol{x}$ в виде $\boldsymbol{x} = \alpha \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}$, где $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = 0$, показать, что $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geqslant \alpha^2 (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y})$, причем знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{x} = \alpha \boldsymbol{y}$, и выяснить, что

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})^2 = \alpha^2 (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y})(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) \leqslant (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}).$$

Третий способ: применить неравенство задачи 503 к координатам векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ в ортонормированном базисе.

1382. Указание. Первый способ: рассмотреть скалярный квадрат $(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}+t\boldsymbol{y})$, где $t = s(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, как неотрицательный квадратный трехчлен от s (s — действительное). Второй способ: при $\boldsymbol{y} \neq 0$ положить $\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}$, где α — комплексное число и $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = 0$, показать, что $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geqslant \alpha\overline{\alpha}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y})$, причем знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{y}$, и выяснить, что

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = \alpha\overline{\alpha}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y})(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) \leqslant (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}).$$

Третий способ: применить неравенство задачи 505 к координатам векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ в ортонормированном базисе.

1384. $\left(\int\limits_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leqslant \int\limits_a^b [f(x)]^2dx \cdot \int\limits_a^b [g(x)]^2dx.$

1385. $AB = BC = AC = 6$; $\angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$.

1386. $AB = 5$; $BC = 10$; $AC = 5\sqrt{3}$; $\angle A = 90^\circ$; $\angle B = 60^\circ$; $\angle C = 30^\circ$.

1389. Указание. Если ребра заданы векторами $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$, то рассмотреть выражение $|\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \boldsymbol{a}_n|^2$.

1390. Указание. Рассмотреть выражение $|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}|^2 + |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|^2$.

1393. При нечетном n ортогональных диагоналей нет, при $n = 2k$ искомое число равно $\frac{1}{2}C_n^k = C_{2k-1}^{k-1}$.

1394. $a \cdot \sqrt{n}$; $\lim\limits_{n\to\infty} a\sqrt{n} = \infty$.

1395. $\varphi_n = \arccos\frac{1}{\sqrt{n}}$; $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = \frac{\pi}{2}$; $\varphi_4 = 60^\circ$.

1396. $R = \frac{a\sqrt{n}}{2}$. При $n = 1, 2, 3$ $\quad R < a$; при $n = 4$ $\quad R = a$, при $n > 4$ $\quad R > a$.

1398. Указание. Показать, что начало диагонали можно соединить с любой другой вершиной цепочкой ребер, и воспользоваться предыдущей задачей.

1399. Указание. Использовать задачу 1379.

1400. Решение. $\cos(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \frac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{|\boldsymbol{x}| \cdot |\boldsymbol{y}|} = \frac{(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y})}{|\boldsymbol{x}| \cdot |\boldsymbol{y}|} = \frac{|\boldsymbol{y}|}{|\boldsymbol{x}|}$; $\cos(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}') = \frac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}')}{|\boldsymbol{x}| \cdot |\boldsymbol{y}'|} = \frac{(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}')}{|\boldsymbol{x}| \cdot |\boldsymbol{y}'|} = \frac{|\boldsymbol{y}| \cdot |\boldsymbol{y}'|}{|\boldsymbol{x}| \cdot |\boldsymbol{y}'|}\cos(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}') \leqslant \frac{|\boldsymbol{y}|}{|\boldsymbol{x}|} = \cos(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$. Знак равенства возможен тогда и только тогда, когда $\cos(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}') = 1$, т. е. по задаче 1399, когда $\boldsymbol{y}' = \alpha \cdot \boldsymbol{y}$ при $\alpha > 0$.

1401. $\arccos\sqrt{\frac{k}{n}}$. **1402.** 60°. **1403.** 30°.

1405. $\arccos\frac{2}{3}$. Указание. Пусть $\boldsymbol{a}_i$ — вектор из A_0 в A_i ($i = 1, 2, 3, 4$). Рассмотреть два вектора $\boldsymbol{a}_1t_1 + \boldsymbol{a}_2t_2$ и $\boldsymbol{a}_3t_3 + \boldsymbol{a}_4t_4$; показать, что квадрат косинуса угла между ними равен $\frac{(t_1 + t_2)^2(t_2 + t_4)^2}{4(t_1^2 + t_1t_2 + t_2^2)(t_3^2 + t_3t_4 + t_4^2)}$, и найти максимум функции $(t_1 + t_2)^2$ при условии, что $t_1^2 + t_1t_2 + t_2^2 = 1$.

1406. 45°. Указание. Искать минимум углов векторов второй плоскости с их ортогональными проекциями на первую плоскость.

1407. Указание. Показать, что каждая из систем $\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_k$ и $\boldsymbol{g}_1, \ldots, \boldsymbol{g}_k$ является базисом подпространства $\boldsymbol{L}_k$, натянутого на векторы $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k$, что $(\boldsymbol{f}_i, \boldsymbol{g}_j) = 0$ при $i \neq j$, наконец, что в равенстве $\boldsymbol{g}_k = c_1\boldsymbol{f}_1 + \cdots + c_k\boldsymbol{f}_k$ все коэффициенты $c_1, c_2, \ldots, c_{k-1}$ равны нулю.

1408. Указание. Положив $(x^2-1)^k = u_k(x)$, проверить, что $u_k^{(j)}(\pm 1) = 0$ при $j < k$ и, интегрируя по частям $\int\limits_{-1}^{+1} u_k^{(k)}(x)x^j\,dx$ несколько раз, пока под знаком интеграла не исчезнет множитель вида x^s, показать, что этот интеграл равен нулю при $j = 0, 1, \ldots, k-1$. Вывести отсюда требуемое равенство: $\int\limits_{-1}^{+1} P_j(x)P_k(x)dx = 0$ при $j \neq k$.

1409. $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$, $P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$, $P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$; $P_k(x) = \frac{1}{2^k k!}\sum\limits_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}C_k^j\frac{(2j)!}{(2j-k)!}x^{2j-k} = \sum\limits_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot(2j-1)}{(k-j)!(2j-k)!2^{k-j}}x^{2j-k}$, причем в этих выражениях следует выпустить все слагаемые с отрицательными показателями степени x.

1410. $\sqrt{\dfrac{2}{2k+1}}$. Решение. Положим $(x^2-1)^k = u_k(x)$ и вычислим скалярный квадрат (P_k, P_k). Интегрируя по частям, находим

$$\int\limits_{-1}^{+1} u_k^{(k)}(x)\cdot u_k^{(k)}(x)dx = -\int\limits_{-1}^{+1} u_k^{(k-1)}(x)u_k^{(k+1)}(x)dx = \cdots$$

$$\cdots = (-1)^k\int\limits_{-1}^{+1} u_k(x)u_k^{(2k)}(x)dx = (2k)!\int\limits_{-1}^{+1}(1-x)^k(1+x)^k dx.$$

Снова интегрируя на частям, находим

$$\int\limits_{-1}^{+1}(1-x)^k(1+x)^k dx = \frac{k}{k+1}\int\limits_{-1}^{+1}(1-x)^{k-1}(1+x)^{k+1}dx = \cdots$$

$$\cdots = \frac{k!}{(k+1)(k+2)\ldots(2k)}\int\limits_{-1}^{+1}(1+x)^{2k}dx = \frac{(k!)^2 2^{2k+1}}{(2k)!(2k+1)},$$

откуда

$$(P_k, P_k) = \frac{1}{2^{2k}(k!)^2}(2k)!\frac{(k!)^2 2^{2k+1}}{(2k)!(2k+1)} = \frac{2}{2k+1}.$$

1411. $P_k(1) = 1$. Указание. Применить к выражению $P_k(x) = \frac{1}{2^k k!} \times \frac{d^k}{dx^k}[(x+1)^k(x-1)^k]$ правило Лейбница дифференцирования произведения.

1412. $P_k(x) = C_k f_k(x)$, где $C_k = \frac{(2k)!}{2^k(k!)^2} = \frac{C_{2k}^k}{2^k} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 2k-1}{k!}$ — старший коэффициент многочлена $P_k(x)$ $(k = 0, 1, \dots, n)$. Указание. Использовать задачи 1407, 1408, 1409.

1414. Указание. Положив $x^n = [x^n - f(x)] + f(x)$, показать, что минимум достигается тогда и только тогда, когда $f(x)$ — ортогональная составляющая для x^n относительно подпространства многочленов степени $\leqslant n-1$ (задача 1373), и применить задачи 1410, 1412 и 1413.

1415. $g(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$ равен квадрату площади параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$; $g(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ равен квадрату объема параллелепипеда, построенного на векторах $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$.

1416. Указание. Рассмотреть систему однородных линейных уравнений с определителем $g(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_k)$.

1417. Указание. Искать взаимный базис из соотношений

$$\boldsymbol{f}_j = \sum_{k=1}^{n} c_{jk}\boldsymbol{e}_k \qquad (j = 1, 2, \dots, n).$$

1418. а) $T = (S')^{-1}$; б) $T = (\bar{S}')^{-1}$. Здесь штрих означает транспонирование, а черта — замену элементов комплексно сопряженными.

1419. Указание. Первый способ: показать, что определитель Грама $g(\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_k)$ равен квадрату модуля определителя из координат векторов $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_k$ в любом ортонормированном базисе k-мерного подпространства, содержащего эти векторы.

Второй способ: показать, что неотрицательная квадратичная форма $(\boldsymbol{a}_1x_1 + \dots + \boldsymbol{a}_kx_k, \boldsymbol{a}_1x_1 + \dots + \boldsymbol{a}_kx_k)$ от $x_1, \dots, x_k$ является положительно определенной тогда и только тогда, когда векторы $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_k$ линейно независимы.

Третий способ: пользуясь неизменностью определителя Грама при ортогонализации векторов (задача 1415), показать, что если векторы $\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_k$ получены из $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_k$ процессом ортогонализации, то $g(\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_k) = |\boldsymbol{b}_1|^2 \dots |\boldsymbol{b}_k|^2$, и применить задачу 1413.

1421. $\frac{1}{C_{2n}^n\sqrt{2n+1}}$. Указание. Первый способ: заметив, что искомое расстояние равно длине ортогональной составляющей вектора $-x^n$ относительно подпространства многочленов степени не выше $n-1$, применить предыдущую задачу и задачу 418.

Второй способ (не использующий задачи 418): искомое расстояние дает минимум интеграла $\int\limits_0^1 [f(x)]^2 dx$, где $f(x)$ — многочлен n-й степени со старшим коэффициентом, равным единице. Это позволяет изменением пределов интегрирования свести задачу к соответствующему экстремальному свойству полинома Лежандра (задача 1414).

1422. Указание. Применить задачи 1413 и 1415.

1423. $|D^2| \leqslant \prod_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2$, причем знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда либо $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\bar{a}_{jk} = 0$ $(i \neq j;\ j = 1, 2, \ldots, n)$, либо определитель D содержит нулевую строку.

1424. Указание. В векторном пространстве $\boldsymbol{R}_n$ ввести скалярное произведение $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i y_j$, где $x_i, \ldots, x_n$ и $y_1, \ldots, y_n$ — координаты соответственно $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ в некотором базисе $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ пространства $\boldsymbol{R}_n$, показать, что $D_f = g(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$, и применить задачу 1422.

1425. Указание. Использовать задачу 1210, г).

1426. Указание. Применить свойства эрмитовых форм, аналогичные свойствам вещественных форм, указанным в задаче 1210 (см., например, Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. — М.: Гостехиздат, 1953, гл. 10, § 3, 9).

1427. Указание. Использовать рассуждения первого и третьего способов, указанных в ответе к задаче 1419.

1428. Указание. Применить задачу 1422.

1429. Решение. Пусть процесс ортогонализации переводит векторы $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_l$ в векторы $\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_k, \boldsymbol{d}_1, \ldots, \boldsymbol{d}_l$, а векторы $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_l$ — в векторы $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_l$. Ортогональная составляющая вектора $\boldsymbol{e}_i$ относительно подпространства $\boldsymbol{L}_i$, натянутого на $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_{i-1}$, совпадает с $\boldsymbol{d}_i$. В самом деле, $\boldsymbol{b}_i = \boldsymbol{y}_i + \boldsymbol{e}_i$, где $\boldsymbol{y}_i$ линейно выражается через $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_{i-1}$, а $\boldsymbol{e}_i$ ортогонален к этим векторам. $\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{y}'_i + \boldsymbol{z}$, где $\boldsymbol{y}'_i \in \boldsymbol{L}_i$, а $\boldsymbol{z}$ ортогонален к $\boldsymbol{L}_i$, но тогда $\boldsymbol{b}_i = (\boldsymbol{y}_i + \boldsymbol{y}'_i) + \boldsymbol{z}$, где $\boldsymbol{y}_i + \boldsymbol{y}'_i \in \boldsymbol{L}_i$, а $\boldsymbol{z}$ ортогонален $\boldsymbol{L}_i$. Значит, по задаче 1413 $\boldsymbol{z}_i = \boldsymbol{d}_i$ и $|\boldsymbol{d}_i| \leqslant |\boldsymbol{e}_i|$, причем знак равенства заведомо имеет место при условии (2), потому что $\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{b}_i - \boldsymbol{y}_i$ выражается через $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_i$, и, значит, ортогонален к $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$; $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_{i-1}$. По задаче 1415 имеем

$$g(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_l) = (|\boldsymbol{c}_1|^2 \cdot \ldots \cdot |\boldsymbol{c}_k|^2) \cdot (|\boldsymbol{d}_1|^2 \cdot \ldots \cdot |\boldsymbol{d}_l|^2) \leqslant$$
$$\leqslant (|\boldsymbol{c}_1|^2 \cdot \ldots \cdot |\boldsymbol{c}_k|^2) \cdot (|\boldsymbol{e}_1|^2 \cdot \ldots \cdot |\boldsymbol{e}_l|^2) = g(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k) g(\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_l),$$

что доказывает неравенство (1). При условии (2) $|\boldsymbol{d}_i| = |\boldsymbol{e}_i|$ $(i = 1, 2, \ldots, l)$ и неравенство (1) обращается в равенство. Если $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ или $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_l$ линейно зависимы, то правая часть неравенства (1) обращается в нуль, а так как левая часть неотрицательна, то мы снова получаем равенство.

Пусть, обратно, неравенство (1) обращается в равенство. Тогда по предыдущему $|\boldsymbol{c}_1|^2 \ldots |\boldsymbol{c}_k|^2 \cdot |\boldsymbol{d}_1|^2 \ldots |\boldsymbol{d}_l|^2 = |\boldsymbol{c}_1|^2 \ldots |\boldsymbol{c}_k|^2 \cdot |\boldsymbol{e}_1|^2 \ldots |\boldsymbol{e}_l|^2$, откуда либо существует $i \leqslant k$ такое, что $|\boldsymbol{c}_i| = 0$, т. е. $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ линейно зависимы, либо существует $i \leqslant l$ такое, что $|\boldsymbol{d}_i| = |\boldsymbol{e}_i| = 0$, т. е. $\boldsymbol{b}_1 \ldots, \boldsymbol{b}_l$ линейно зависимы, либо $|\boldsymbol{d}_i| = |\boldsymbol{e}_l|$ $(i = 1, 2, \ldots, l)$, откуда следует, что все $\boldsymbol{e}_i$, а значит, и все $\boldsymbol{b}_i$ (как их линейные комбинации) ортогональны к $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$, т. е. выполняется условие (2).

1430. Указание. Применить предыдущую задачу.

1431. Указание. Применить задачи 1425 и 1429.

1432. Указание. Применить задачи 1426 и 1429.

1433. Решение. а) Пусть числа системы (1) являются расстояниями всевозможных пар вершин $M_0, M_1, \ldots, M_n$ n-мерного симплекса, причем

$$a_{ij} = \overline{M_i M_j} \qquad (i, j = 0, 1, 2, \ldots, n;\ i > j). \tag{2}$$

Обозначим через $\boldsymbol{e}_i$ вектор, идущий из M_0 в M_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Тогда имеем

$$\begin{array}{ll} a_{i0}^2 = (\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) & (i = 1, 2, \ldots, n); \\ a_{ij}^2 = (\boldsymbol{e}_i - \boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_i - \boldsymbol{e}_j) & (i, j = 1, 2, \ldots, n;\ i > j). \end{array} \tag{3}$$

Из этих равенств находим скалярные произведения векторов $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$:

$$\begin{array}{ll} (\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_i) = a_{i0} & (i = 1, 2, \ldots, n); \\ (\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = \dfrac{a_{i0} + a_{j0} - a_{ij}}{2} & (i, j = 1, 2, \ldots, n;\ i > j). \end{array} \tag{4}$$

Применяя эти соотношения, напишем матрицу Грама векторов $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$:

$$\begin{pmatrix} a_{10} & \dfrac{a_{20} + a_{10} - a_{21}}{2} & \ldots & \dfrac{a_{n0} + a_{10} - a_{n1}}{2} \\ \dfrac{a_{20} + a_{10} - a_{21}}{2} & a_{20} & \ldots & \dfrac{a_{n0} + a_{20} - a_{n2}}{2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{a_{n0} + a_{10} - a_{n1}}{2} & \dfrac{a_{n0} + a_{20} - a_{n2}}{2} & \ldots & a_{n0} \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Так как точки $M_0, M_1, \ldots, M_n$ не лежат в $(n-1)$-мерном многообразии, то векторы $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ линейно независимы. Обозначая через D_k угловой минор порядка k матрицы (5) и применяя задачу 1419, получаем

$$D_k > 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{6}$$

Итак, условия (6) являются необходимыми для того, чтобы числа системы (1) были расстояниями вершин n-мерного симплекса. Покажем, что эти условия достаточны. При выполнении условий (6) матрица (5) является матрицей Грама линейно независимой системы векторов $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ (см. задачу 1352 или 1210, в)). Поэтому верны равенства (4), откуда вытекают равенства (3). Принимая начало координат за M_0, а конец вектора $\boldsymbol{e}_i$ за M_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, получим выполнение равенств (2), что и требовалось.

В случае б) необходимым и достаточным условием является неотрицательность всех главных (а не только угловых) миноров матрицы (5). Необходимость доказывается так же, как в случае а), с той разницей, что векторы $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ могут быть линейно зависимы. Достаточность доказывается при помощи задачи 1425 или 1210, г).

1434. $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

1435. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, если $\boldsymbol{e}_1$ переходит в $\boldsymbol{e}_2$, и $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, если $\boldsymbol{e}_2$ переходит в $\boldsymbol{e}_1$.

1436. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. **1437.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. **1438.** $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

1439. Первые k элементов главной диагонали матрицы преобразования равны единице, а все остальные элементы равны нулю.

1440. В i-м столбце матрицы преобразования стоят координаты вектора $\boldsymbol{b}_i$ в базисе $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$.

1441. φ линейно, $A_\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1442. φ не является линейным.
1443. φ не является линейным.

1444. φ линейно, $A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1445. $\begin{pmatrix} 2 & -11 & 6 \\ 1 & -7 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. **1446.** $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -6 & 11 & 5 \\ -12 & 13 & 10 \\ 6 & -5 & -5 \end{pmatrix}$.

1448. В базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ матрица $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$, в базисе $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ матрица

$$\begin{pmatrix} \frac{20}{3} & -\frac{5}{3} & 5 \\ -\frac{16}{3} & \frac{4}{3} & -4 \\ 8 & -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

1449. а) при умножении слева $\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{pmatrix}$; б) при умножении справа $\begin{pmatrix} a & 0 & c & 0 \\ 0 & a & 0 & c \\ b & 0 & d & 0 \\ 0 & b & 0 & d \end{pmatrix}$.

1450. а) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

1451. В матрице переставляется i-я и j-я строки и i-й и j-й столбцы.

1452. а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & -8 & -7 \\ 1 & 4 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$.

1453. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. **1454.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$. **1457.** $\begin{pmatrix} 44 & 44 \\ -29\frac{1}{2} & -25 \end{pmatrix}$.

1458. $\begin{pmatrix} 109 & 93 \\ 34 & 29 \end{pmatrix}$. **1461.** n^2.

1464. Указание. Применить предыдущую задачу и определение функции от матрицы (задача 1148).

1465. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$. Собственные векторы имеют вид $c(1,1,-1)$, где $c \neq 0$.

1466. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$. Собственные векторы имеют вид $c_1(1,2,0)+c_2(0,0,1)$, где c_1 и c_2 не равны нулю одновременно.

1467. $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Собственные векторы для значения 1 имеют вид $c(1,1,1)$, а для $\lambda = 0$ — вид $c(1,2,3)$, где $c \neq 0$.

1468. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Собственные векторы имеют вид $c(3,1,1)$, где $c \neq 0$.

1469. $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$. Собственные векторы для $\lambda = 3$ имеют вид $c(1,2,2)$, а для $\lambda = -1$ — вид $c(1,2,1)$, где $c \neq 0$.

1470. $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$. Собственные векторы для $\lambda = 1$ имеют вид $c_1(2,1,0) + c_2(1,0,-1)$, а для $\lambda = -1$ вид $c(3,5,6)$, где c_1 и c_2 не равны нулю одновременно и $c \neq 0$.

1471. $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2 + 3i$, $\lambda_3 = 2 - 3i$. Собственные векторы для $\lambda = 1$ имеют вид $c(1,2,1)$, для $\lambda = 2 + 3i$ — вид $c(3 - 3i, 5 - 3i, 4)$, для $\lambda = 2 - 3i$ — вид $c(3 + 3i, 5 + 3i, 4)$.

1472. $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$; $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$. Собственные векторы для $\lambda = 1$ имеют вид $c(0,0,0,1)$, а для $\lambda = 0$ — вид $c_1(0,1,0,0)+c_2(0,0,1,0)$, где $c \neq 0$ и c_1 и c_2 не равны нулю одновременно.

1473. $\lambda_1 = \lambda_3 = 1$, $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$. Собственные векторы для $\lambda = 1$ имеют вид $c_1(1,0,1,0)+c_2(0,0,0,1)$, а для $\lambda = 0$ — вид $c_1(0,1,0,0)+c_2(0,0,1,0)$, где числа c_1 и c_2 не равны нулю одновременно.

1474. $\lambda = 2$. Собственные векторы имеют вид $c_1(1,1,-1,0)+c_2(1,1,0,1)$, где c_1 и c_2 не равны нулю одновременно.

1477. Указание. Применить задачи 820 и 1476.

1479. $\begin{array}{l} a_1=(1,\ 1,\ \ 1),\\ a_2=(1,\ 1,\ \ 0),\\ a_3=(1,\ 0,\ -3);\end{array}\qquad \begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}.$

1480. Матрица к диагональному виду не приводится.

1481. $\begin{array}{l} a_1=(1,\ \ 1,\ \ 0,\ \ 0),\\ a_2=(1,\ \ 0,\ \ 1,\ \ 0),\\ a_3=(1,\ \ 0,\ \ 0,\ \ 1),\\ a_4=(1,\ -1,\ -1,\ -1);\end{array}\qquad \begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&-2\end{pmatrix}.$

1482. Матрица к диагональному виду не приводится.

1483. $\begin{array}{l} a_1=(\ \ 1,\ \ 0,\ 0,\ 1),\\ a_2=(\ \ 0,\ \ 1,\ 1,\ 0),\\ a_3=(\ \ 0,\ -1,\ 1,\ 0),\\ a_4=(-1,\ \ 0,\ 0,\ 1);\end{array}\qquad \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}.$

1484. Например:

$$T=\begin{pmatrix}1&0&\dots&0&-1\\0&1&\dots&-1&0\\ \multicolumn{5}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots}\\0&1&\dots&1&0\\1&0&\dots&0&1\end{pmatrix},$$

где по второй диагонали элементы выше главной диагонали равны -1, а ниже $+1$; при нечетном n на пересечении диагоналей может стоять как $+1$, так и -1. Диагональная матрица B имеет на главной диагонали сверху $n/2$ при четном n и $(n+1)/2$ при нечетном n элементов, равных $+1$, а остальные элементы равны -1.

Указание. Рассмотреть линейное преобразование φ n-мерного пространства, имеющее матрицу A в некотором базисе, найти базис, состоящий из собственных векторов этого преобразования, и применить задачу 1477.

1486. Любые два элемента α_k и α_{n-k+1}, равноотстоящие от концов побочной диагонали, должны либо оба быть отличны от нуля, либо оба обращаться в нуль.

Указание. Рассмотреть линейное преобразование φ n-мерного пространства, соответствующее матрице A в некотором базисе, и применять задачи 1117, 1132, 1484.

1487. Единственное собственное значение — $\lambda=0$; собственные векторы — многочлены нулевой степени.

1491. Решение. Сначала докажем равенство

$$\text{разм.}\boldsymbol{L}=\text{разм.}\varphi\boldsymbol{L}+\text{разм.}\boldsymbol{L}_0, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{L}_0$ — пересечение $\boldsymbol{L}$ с ядром $\varphi^{-1}\mathbf{0}$ преобразования φ. Для этого базу $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\dots,\boldsymbol{a}_k$ подпространства $\boldsymbol{L}_0$ дополним векторами $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\dots,\boldsymbol{b}_l$ до базы $\boldsymbol{L}$ (при $\boldsymbol{L}_0=\mathbf{0}$ отсутствуют векторы $\boldsymbol{a}_i$, при $\boldsymbol{L}_0=\boldsymbol{L}$ — векторы $\boldsymbol{b}_i$). Векторы $\varphi\boldsymbol{b}_1,\varphi\boldsymbol{b}_2,\dots,\varphi\boldsymbol{b}_l$ образуют базу $\varphi\boldsymbol{L}$. В самом деле, если $\boldsymbol{y}\in\varphi\boldsymbol{L}$, то $\boldsymbol{y}=\varphi\boldsymbol{x}$, где $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{L}$. Если $\boldsymbol{x}=\sum\limits_{i=1}^{k}\alpha_i\boldsymbol{a}_i+\sum\limits_{i=1}^{l}\beta_i\boldsymbol{b}_i$, то $\boldsymbol{y}=\varphi\boldsymbol{x}=\sum\limits_{i=1}^{l}\beta_i\varphi\boldsymbol{b}_i$, так как $\varphi\boldsymbol{a}_i=\mathbf{0}$ $(i=1,2,\dots,k)$. Векторы $\varphi\boldsymbol{b}_1,\varphi\boldsymbol{b}_2,\dots,\varphi\boldsymbol{b}_l$ линейно независимы, так как из $\sum\limits_{i=1}^{l}\beta_i\varphi\boldsymbol{b}_i=\boldsymbol{0}$ следует $\sum\limits_{i=1}^{l}\beta_i\boldsymbol{b}_i\in\boldsymbol{L}_0$, откуда $\sum\limits_{i=1}^{l}\beta_i\boldsymbol{b}_i=\sum\limits_{i=1}^{k}\alpha_i\boldsymbol{a}_i$, и значит, $\beta_i=0$ $(i=1,2,\ldots,l)$.

Итак, разм.$\boldsymbol{L}=l+k=$ разм.$\varphi\boldsymbol{L}+$ разм.$\boldsymbol{L}_0$.

а) Из (1) в силу $\boldsymbol{L}_0\subset\varphi^{-1}\boldsymbol{0}$ находим

$$\text{разм.}\boldsymbol{L}=\text{разм.}\varphi\boldsymbol{L}+\text{разм.}\boldsymbol{L}_0\leqslant\text{разм.}\varphi\boldsymbol{L}+\text{деф.}\varphi;$$

$$\text{разм.}\boldsymbol{L}-\text{деф.}\varphi\leqslant\text{разм.}\varphi\boldsymbol{L}.$$

Далее, разм.$\varphi\boldsymbol{L}=$ разм.$\boldsymbol{L}-$ разм.$\boldsymbol{L}_0\leqslant$ разм.$\boldsymbol{L}$.

б) Положим $\varphi^{-1}\boldsymbol{L}=\boldsymbol{L}'$. Так как $\boldsymbol{0}\in\boldsymbol{L}$, то $\varphi^{-1}\boldsymbol{0}\subset\varphi^{-1}\boldsymbol{L}=\boldsymbol{L}'$ и $\boldsymbol{L}'\cap\varphi^{-1}\boldsymbol{0}=\varphi^{-1}\boldsymbol{0}$. Применяя (1) с заменой $\boldsymbol{L}$ на $\boldsymbol{L}'$, получим

$$\text{разм.}\boldsymbol{L}'=\text{разм.}\varphi\boldsymbol{L}'+\text{деф.}\varphi. \tag{2}$$

Так как $\varphi\boldsymbol{L}'\subset\boldsymbol{L}$, то разм.$\varphi\boldsymbol{L}'\leqslant$ разм.$\boldsymbol{L}$ и по (2) разм.$\boldsymbol{L}'\leqslant$ разм.$\boldsymbol{L}+$ деф.φ, чем доказано второе из неравенств б).

Покажем, что $\varphi\boldsymbol{L}'=\boldsymbol{L}\cap\varphi\boldsymbol{R}_n$.

Так как $\varphi\boldsymbol{L}'\subset\boldsymbol{L}$ и $\varphi\boldsymbol{L}'\subset\varphi\boldsymbol{R}_n$, то $\varphi\boldsymbol{L}'\subset\boldsymbol{L}\cap\varphi\boldsymbol{R}_n$. Если $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{L}\cap\varphi\boldsymbol{R}_n$, то $\boldsymbol{x}=\varphi\boldsymbol{x}'$, где $\boldsymbol{x}'\in\varphi^{-1}\boldsymbol{L}=\boldsymbol{L}'$, т.е. $\boldsymbol{x}\in\varphi\boldsymbol{L}'$. Отсюда $\boldsymbol{L}\cap\varphi\boldsymbol{R}_n\subset\varphi\boldsymbol{L}'$.

Так как разм.$(\boldsymbol{L}+\varphi\boldsymbol{R}_n)\leqslant n$, то, используя связь размерности суммы и пересечения подпространств (задача 1316), получим

$$\begin{aligned}\text{разм.}\varphi\boldsymbol{L}' &= \text{разм.}(\boldsymbol{L}\cap\varphi\boldsymbol{R}_n)=\text{разм.}\boldsymbol{L}+\text{разм.}\varphi\boldsymbol{R}_n-\text{разм.}(\boldsymbol{L}+\varphi\boldsymbol{R}_n)\geqslant\\ &\geqslant \text{разм.}\boldsymbol{L}+\text{разм.}\varphi\boldsymbol{R}_n-n=\text{разм.}\boldsymbol{L}-\text{деф.}\varphi.\end{aligned}$$

Отсюда в силу (2) находим

$$\text{разм.}\boldsymbol{L}'=\text{разм.}\varphi\boldsymbol{L}'+\text{деф.}\varphi\geqslant(\text{разм.}\boldsymbol{L}-\text{деф.}\varphi)+\text{деф.}\varphi=\text{разм.}\boldsymbol{L},$$

чем доказано первое из неравенств б).

1492. Указание. Рассмотреть преобразования φ и ψ пространства $\boldsymbol{R}_n$ с матрицами A и B и применить предыдущую задачу к подпространству $\boldsymbol{L}=\psi\boldsymbol{R}_n$.

1494. Единственное собственное значение $\lambda=1$. Собственные векторы имеют вид $c_1(\boldsymbol{a}_1+2\boldsymbol{a}_2)+c_2(\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3+2\boldsymbol{a}_4)$, где c_1,c_2 не равны нулю одновременно.

1495. Указание. Рассмотреть матрицу преобразования φ в базисе, первыми векторами которого являются линейно независимые собственные векторы φ, принадлежащие λ_0. Другой путь связан с применением задачи 1074.

1501. Нулевое подпространство и подпространство $\boldsymbol{L}_k$, состоящие из всех многочленов степени $\leqslant k$ $(k=0,1,2,\ldots,n)$.

1503. Инвариантными подпространствами будут: нулевое подпространство и любое подпространство, натянутое на какую угодно подсистему векторов базиса $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_n$; их число равно 2^n.

Указание. Применяя задачи 1495, 1502, показать, что любое ненулевое инвариантное подпространство $\boldsymbol{L}$ имеет базис, являющийся подсистемой векторов $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_n$.

1504. Прямая с базисным вектором $\boldsymbol{a}_1=(2,2,-1)$, любая прямая плоскости $\boldsymbol{L}$ с базисными векторами $\boldsymbol{a}_2=(1,1,0)$ и $\boldsymbol{a}_3=(1,0,-1)$, т.е. плоскости x_1-x_2+

$x_3 = 0$, сама эта плоскость $\boldsymbol{L}$, любая плоскость, проходящая через вектор $\boldsymbol{a}$, все пространство и нулевое подпространство.

1505. Прямая с базисным вектором $(1, -2, 1)$, плоскость с базисными векторами $(1, 1, 1)$ и $(1, 2, 3)$, т. е. плоскость с уравнением $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$, все пространство и нулевое подпространство.

1509. $\lambda_1 = 1$, $\lambda_{2,3} = 0$. Корневые подпространства состоят из векторов для $\lambda_1 = 1$: $c(1,1,1)$; для $\lambda_{2,3} = 0$: $c_1(1,1,0) + c_2(1,0,-3)$.

1510. $\lambda_1 = 3$, $\lambda_{2,3} = -1$. Корневые подпространства состоят из векторов для $\lambda_1 = 3$: $c(1,2,2)$; для $\lambda_{2,3} = -1$: $c_1(1,1,0) + c_2(1,0,-1)$.

1511. $\lambda_{1,2,3} = -1$. Все пространство является корневым подпространством.

1512. $\lambda_{1,2} = 2$, $\lambda_{3,4} = 0$. Корневые подпространства состоят из векторов:

$$\text{для } \lambda_{1,2} = 2: \ c_1(1,0,1,0) + c_2(1,0,0,1);$$
$$\text{для } \lambda_{3,4} = 0: \ c_1(1,0,0,0) + c_2(0,1,0,1).$$

1515. а) Любое число α является собственным значением. Соответствующие ему собственные векторы имеют вид $ce^{\alpha x}$, где $c \neq 0$;

б) корневое подпространство, соответствующее числу α, состоит из всех функций вида $(a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n)e^{\alpha x}$, где $a_0, a_1, \dots, a_n$ — любые числа и n — любое целое неотрицательное число.

1517. Если минимальный многочлен $g(\lambda) = \lambda^n - c_n\lambda^{n-1} - c_{n-1}\lambda^{n-2} - \dots - c_1$, то матрица преобразования φ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & c_1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & c_2 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & c_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & c_n \end{pmatrix}.$$

1518. Жорданова клетка

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha \end{pmatrix}.$$

1520. При $n = 2$ поворот плоскости на угол $\alpha \neq k\pi$ не обладает инвариантными прямыми. Подпространство $\boldsymbol{L}$ тогда и только тогда содержит прямую неподвижных точек, когда преобразование φ_1, индуцированное преобразованием φ на $\boldsymbol{L}$, обладает собственным значением, равным единице.

1523. Указание. При доказательстве утверждения а) использовать равенство $1 = h_1(\lambda)u_1(\lambda) + h_2(\lambda)u_2(\lambda)$, где $u_1(\lambda)$ и $u_2(\lambda)$ — многочлены от λ; б) вывести из а).

1524. $g(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)$. $\boldsymbol{R}_3 = \boldsymbol{L}_1 + \boldsymbol{L}_2$, где $\boldsymbol{L}_1$ имеет базис $\boldsymbol{f}_1 = \boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{f}_2 = \boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3$, а $\boldsymbol{L}_2$ — базис $f_3 = \boldsymbol{e}_2$.

Указание. При отыскании $g(\lambda)$ использовать задачу 1485.

1525. $g(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 3)$. $\boldsymbol{R}_3 = \boldsymbol{L}_1 + \boldsymbol{L}_2$, где $\boldsymbol{L}_1$ имеет, например, базис $\boldsymbol{f}_1 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{f}_2 = \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_3$, а $\boldsymbol{L}_2$ — базис $2\boldsymbol{e}_1 - 5\boldsymbol{e}_2 - 6\boldsymbol{e}_3$.

1526. $g(\lambda) = [\lambda - (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})]\lambda$. $\boldsymbol{R}_n = \boldsymbol{L}_1 + \boldsymbol{L}_2$, где $\boldsymbol{L}_1$ натянуто на вектор $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{L}_2$ образовано всеми векторами, ортогональными к $\boldsymbol{a}$.

1527. Если λ_0 — собственное значение φ, то жорданова форма состоит из одной клетки порядка n с λ_0 на диагонали.

1529. Решение. А) Положим $f_i(\lambda) = \dfrac{f(\lambda)}{(\lambda - \lambda_i)^{k_i}}$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$. Многочлены $f_i(\lambda)$ взаимно просты. Значит, существуют многочлены $h_i(\lambda)$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$ такие, что $1 = \sum\limits_{i=1}^{s} f_i(\lambda)h_i(\lambda)$, откуда для любого вектора $\boldsymbol{x}$:

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{s} \boldsymbol{x}_i, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{x}_i = f_i(\varphi) \cdot h_i(\varphi)\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{P}_i$, так как $(\varphi - \lambda_i\varepsilon)^{k_i}\boldsymbol{x}_i = f(\varphi)h_i(\varphi)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ по теореме Гамильтона—Кэли, в силу которой $f(\varphi) = 0$.

Единственность разложения (1) достаточно доказать для $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. Применяя к обеим частям равенства $\sum\limits_{i=1}^{s} \boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{0}$ преобразование $f_i(\varphi)$, получим: $f_i(\varphi)\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{0}$, так как $f_i(\varphi)\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{0}$ при $j \neq i$. Далее, и $f_i(\lambda)(\lambda - \lambda_i)^{k_i}$ взаимно просты. Значит, существуют многочлены $p(\lambda)$ и $q(\lambda)$ такие, что

$$1 = p(\lambda)f_i(\lambda) + q(\lambda)(\lambda - \lambda_i)^{k_i},$$

откуда

$$\boldsymbol{x}_i = p(\varphi)f_i(\varphi)\boldsymbol{x}_i + q(\varphi)(\varphi - \lambda_i\varepsilon)^{k_i}\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{0}.$$

Этим доказано, что пространство $\boldsymbol{R}_n$ есть прямая сумма подпространств $\boldsymbol{P}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$, и построение искомого базиса сведено к случаю Б). В случае минимального многочлена рассуждения аналогичны (см. задачу 1523).

Б) Достаточно доказать, что указанное построение на каждом шаге возможно (т. е. векторы, дополняемые до базиса $\boldsymbol{R}_h$, линейно независимы) и что векторы всех построенных серий образуют базис пространства $\boldsymbol{R}_h$. Каждой серии в матрице преобразования ψ соответствует, очевидно, жорданова клетка с нулем, а в матрице преобразования $\varphi = \lambda_0\varepsilon + \psi$ соответствует клетка с λ_0 на диагонали.

Возможность построения на каждом шаге доказывается индуктивно для $h = k, k-1, \ldots, 1$. При $h = k$ векторы любого базиса $\boldsymbol{R}_{k-1}$ вместе с векторами высоты k, начинающими серии первого шага, по построению образуют базис $\boldsymbol{R}_k$. Предположим, что уже построены серии с начальными векторами высоты $\geqslant h+1$, причем все векторы высоты $h+1$ построенных серий $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_p$ вместе с векторами $\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_q$ любого базиса $\boldsymbol{R}_h$ образуют базис $\boldsymbol{R}_{h+1}$. Покажем, что векторы высоты h: $\psi\boldsymbol{x}_1, \ldots, \psi\boldsymbol{x}_p$ построенных серий вместе с любым базисом $\boldsymbol{z}_1, \ldots, \boldsymbol{z}_r$ для $\boldsymbol{R}_{h-1}$ линейно независимы. Пусть

$$\sum_{i=1}^{p} c_i\psi\boldsymbol{x}_i + \sum_{j=1}^{r} d_j\boldsymbol{z}_j = \boldsymbol{0}. \tag{2}$$

Применяя к обеим частям этого равенства преобразование ψ^{h-1}, получим $\psi^h\sum\limits_{i=1}^{p}c_i\boldsymbol{x}_i = \mathbf{0}$. Поэтому вектор $\sum\limits_{i=1}^{p}c_i\boldsymbol{x}_i$ принадлежит $\boldsymbol{R}_h$ и линейно выражается через его базис $\boldsymbol{y}_1,\ldots,\boldsymbol{y}_q$. Из линейной независимости векторов $\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_p$, $\boldsymbol{y}_1,\ldots,\boldsymbol{y}_q$ (как базиса $\boldsymbol{R}_{h+1}$) вытекает, что $c_i = 0$ $(i = 1,2,\ldots,p)$. Поэтому из равенства (2) вытекает, что $d_j = 0$ $(j = 1,2,\ldots,r)$; этим доказано, что векторы высоты h построенных ранее серий вместе с векторами любого базиса $\boldsymbol{R}_{h-1}$ можно дополнить до базиса $\boldsymbol{R}_h$. Приняв дополнительные векторы (если они существуют) за начальные векторы новых серий, мы находим, что предположение, сделанное выше для $\boldsymbol{R}_{h+1}$, выполнено теперь для $\boldsymbol{R}_h$, и построение можно вести дальше.

Пусть указанное построение выполнено для $h = k, k-1,\ldots,1$ (в действительности базис всего пространства может получиться и раньше, чем мы дойдем до $h = 1$). Так как $\boldsymbol{R}_0$ не имеет базиса, то по доказанному векторы высоты 1 построенных серий образуют базис для $\boldsymbol{R}_1$; значит, эти векторы вместе с векторами высоты 2 построенных серий образуют базис $\boldsymbol{R}_2$ и так далее. Наконец, векторы высоты $\leqslant k-1$ построенных серий вместе с векторами высоты k этих серий образуют базис $\boldsymbol{R}_k$. Иными словами, векторы всех построенных серий образуют базис всего пространства.

В) Пусть $C = A_J - \lambda_0 E$. Так как матрицы B^h и C^h подобны, то ранг матрицы C^h равен r_h $(h = 0,1,\ldots,k,k+1)$. Каждой жордановой клетке матрицы A_J с λ_0 на диагонали в матрице C соответствует клетка того же порядка с нулем на диагонали. Если D такая клетка порядка p, то ранг клетки D^h при $h = 0,1,2,\ldots,p$ равен $p-h$, а при $h = p,p+1,\ldots,k,k+1$ равен нулю. Клетке с $\lambda_i \neq \lambda_0$ матрицы A_J соответствует в матрице C клетка с числом $\lambda_i - \lambda_0 \neq 0$ на диагонали. Ранг любой ее степени равен ее порядку. Ранг матрицы C^h равен сумме рангов ее клеток. Поэтому при переходе от матрицы C^{h-1} к матрице C^h ранг понижается ровно на число клеток матрицы C с нулем на диагонали, имеющих порядки $\geqslant h$. Отсюда

$$\sum_{i=h}^{k} x_i = r_{h-1} - r_h \quad (h = 1,2,\ldots,k). \tag{3}$$

Вычитая отсюда аналогичное равенство с заменой h на $h+1$ (при $h < k$), получим соотношения (α) для $h = 1,2,\ldots,k-1$. Так как клетки порядков выше k с λ_0 на диагонали в матрице A_J отсутствуют, то $r_k = r_{k+1}$, и при $h = k$ соотношение (3) дает: $x_k = r_{k-1} - r_k = r_{k-1} - 2r_k + r_{k+1}$, т.е. соотношение ($\alpha$) верно и для $h = k$.

1530. $\boldsymbol{f}_1 = (1,\ 4,\ 3)$, $\boldsymbol{f}_2 = (1,\ 0,\ 0)$, $\boldsymbol{f}_3 = (3,\ 0,\ 1)$, $\quad A_J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1531. $\boldsymbol{f}_1 = (1,\ -3,\ -2)$, $\boldsymbol{f}_2 = (1,\ 0,\ 0)$, $\boldsymbol{f}_3 = (1,\ 0,\ 1)$, $\quad A_J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

12—3773

1532. $\boldsymbol{f}_1 = (6,\ 6,\ -8)$, $\boldsymbol{f}_2 = (3,\ 1,\ 0)$, $\boldsymbol{f}_3 = (2,\ 1,\ -1)$,
$$A_J = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1533. $\boldsymbol{f}_1 = (3,\ 1,\ 1)$, $\boldsymbol{f}_2 = (1,\ 0,\ 0)$, $\boldsymbol{f}_3 = (5,\ 0,\ 1)$,
$$A_J = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

1534. $\boldsymbol{f}_1 = (1,\ 1,\ 1,\ 1)$, $\boldsymbol{f}_2 = (-1,\ 0,\ 0,\ 0)$, $\boldsymbol{f}_3 = (1,\ 1,\ 0,\ 0)$, $\boldsymbol{f}_4 = (0,\ 0,\ -1,\ 0)$,
$$A_J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1535. $\boldsymbol{f}_1 = (-1,\ -1,\ -1,\ 0)$, $\boldsymbol{f}_2 = (2,\ 1,\ 0,\ 0)$, $\boldsymbol{f}_3 = (1,\ 0,\ 0,\ -1)$, $\boldsymbol{f}_4 = (3,\ 6,\ 7,\ 1)$,
$$A_J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1536. При четном n:
$$\boldsymbol{f}_1 = \boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{f}_2 = \boldsymbol{e}_3,\ \boldsymbol{f}_3 = \boldsymbol{e}_5, \ldots,\ \boldsymbol{f}_{\frac{n}{2}} = \boldsymbol{e}_{n-1},\ \boldsymbol{f}_{\frac{n}{2}+1} = \boldsymbol{e}_2, \ldots,\ \boldsymbol{f}_n = \boldsymbol{e}_n.$$

Матрица A_J состоит из двух клеток Жордана порядка $n/2$ с нулем по главной диагонали. При нечетном n:
$$\boldsymbol{f}_1 = \boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{f}_2 = \boldsymbol{e}_3,\ \boldsymbol{f}_3 = \boldsymbol{e}_5, \ldots,\ \boldsymbol{f}_{\frac{n+1}{2}} = \boldsymbol{e}_n,\ \boldsymbol{f}_{\frac{n+1}{2}+1} = \boldsymbol{e}_2, \ldots,\ \boldsymbol{f}_n = \boldsymbol{e}_{n-1}.$$

Матрица A_J состоит из двух клеток Жордана порядков $(n+1)/2$ и $(n-1)/2$ с нулем по главной диагонали.

1537. φ является отражением пространства $\boldsymbol{R}_n$ в некотором подпространстве $\boldsymbol{L}_1$ параллельно некоторому дополнительному подпространству $\boldsymbol{L}_2$. Иными словами, $\boldsymbol{R}_n$ есть прямая сумма $\boldsymbol{L}_1$ и $\boldsymbol{L}_2$, причем $\varphi\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$, если $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{L}_1$, и $\varphi\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{x}$, если $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{L}_2$.

Указание. Первый способ: принять за $\boldsymbol{L}_1$ и $\boldsymbol{L}_2$ совокупности всех $\boldsymbol{x}$, для которых соответственно $\varphi\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ и $\varphi\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{x}$, и положить
$$\boldsymbol{x} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{x} + \varphi\boldsymbol{x}) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{x} - \varphi\boldsymbol{x}).$$

Второй способ: рассмотреть базис, в котором матрица $A\varphi$ имеет жорданову форму.

1538. φ является проектированием пространства $\boldsymbol{R}_n$ на некоторое подпространство $\boldsymbol{L}_1$ параллельно некоторому дополнительному подпространству $\boldsymbol{L}_2$. Иными словами, $\boldsymbol{R}_n$ есть прямая сумма $\boldsymbol{L}_1$ и $\boldsymbol{L}_2$, причем $\varphi\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$, если $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{L}_1$, и $\varphi\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, если $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{L}_2$.

Указание. Первый способ: принять за $\boldsymbol{L}_1$ и $\boldsymbol{L}_2$ совокупности всех $\boldsymbol{x}$, для которых соответственно $\varphi\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ и $\varphi\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, и положить $\boldsymbol{x} = \varphi\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{x} - \varphi\boldsymbol{x})$.

Второй способ: рассмотреть базис, в котором матрица $A\varphi$ имеет жорданову форму.

1539. а) Для базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ преобразование φ определено так:
$$\varphi\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2, \quad \varphi\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_3, \quad \varphi\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{0};$$

б) $\varphi e_1 = e_2, \varphi e_2 = -e_1, \varphi e_3 = 0$ (в случае ортонормированного базиса φ будет проектированием на плоскость e_1, e_2, соединенным с поворотом этой плоскости на угол $\pi/2$).

1541. $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$. **1542.** $\begin{pmatrix} -36 & -37 & -15 \\ 30 & 30 & 14 \\ 26 & 27 & 9 \end{pmatrix}$. **1543.** $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1544. φ^* — проектирование на биссектрису второй и четвертой четверти параллельно оси Oy.

1545. Указание. Показать, что если $z \in L_1^*$, $u \in L_2^*$, то $\varphi^* z = 0$, $\varphi^* u = u$.

1547. Указание. Показать, что ортогональное дополнение к одномерному подпространству, инвариантному относительно сопряженного преобразования φ^*, инвариантно относительно φ.

1548. Указание. Пользуясь предыдущей задачей, построить цепочку подпространств $R_n \supset L_{n-1} \supset \cdots \supset L_1$, где L_k — k-мерное подпространство, инвариантное относительно φ, и применить задачу 1355.

1549. $3x_1 - 3x_2 + x_3 = 0$.

1553. Указание. Рассмотреть равенства

$$(\varphi e_i, f_j) = (e_i, \varphi^* f_j) \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n).$$

1554. Указание. Перейти к ортонормированному базису.

1555. $A_1 = \begin{pmatrix} 128 & 313 & 454 \\ 36 & 117 & 145 \\ -61 & -197 & -245 \end{pmatrix}$. **1556.** $A_1 = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 3 \\ -5 & -7 & -2 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$.

1557. $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 5 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$. **1558.** $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 4 \\ 0 & -8 & 7 \\ -7 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

1562. Например, преобразование φ, переводящее вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, заданный координатами в ортонормированном базисе, в вектор $\varphi x = (|x_1|, x_2, \ldots, x_n)$, сохраняет скалярные квадраты, но не линейно.

Указание. Для доказательства утверждения о линейности φ показать, что

$$(\varphi(ax + by) - a\varphi x - b\varphi y, \varphi(ax + by) - a\varphi x - b\varphi y) = 0.$$

1563. а) $UA^{-1} = A'U$; б) $U\overline{A}^{-1} = A'U$.

1566. Указание. Показать, что существует вектор $x'_k = x_k - \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i x_i$ (быть может, равный нулю), для которого $(x'_k, x_i) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, k-1)$, что, положив $y'_k = y_k - \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i y_i$, получим системы векторов $x_1, \ldots, x_{k-1}, x'_k$ и $y_1, \ldots, y_{k-1}, y'_k$ с равными матрицами Грама, и применить метод математической индукции.

1567. Указание. Применить задачу 1499.

1569. Решение. а) Если $\varphi\boldsymbol{z} = \lambda\boldsymbol{z}$, то $(\varphi\boldsymbol{z}, \varphi\boldsymbol{z}) = \lambda\overline{\lambda}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{z}, \boldsymbol{z})$, откуда $\lambda\overline{\lambda} = 1$ и $|\lambda| = 1$.

б) Пусть $\varphi\boldsymbol{z}_1 = \lambda_1\boldsymbol{z}_1$, $\varphi\boldsymbol{z}_2 = \lambda_2\boldsymbol{z}_2$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Тогда $(\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2) = (\varphi\boldsymbol{z}_1, \varphi\boldsymbol{z}_2) = \lambda_1\overline{\lambda}_2(\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2)$, откуда, умножая на λ_2 и принимая во внимание, что $\lambda_2\overline{\lambda}_2 = 1$, найдем $\lambda_1(\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2) = \lambda_2(\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2)$ и, значит, $(\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2) = 0$.

в) Пусть X и Y — столбцы координат $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$. Переходя к координатам в равенстве $\varphi(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}i) = (\alpha + \beta i)(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}i)$, получим $AX + AYi = (\alpha X - \beta Y) + (\beta X + \alpha Y)i$, откуда, приравнивая действительные и мнимые части, находим $AX = \alpha X - \beta Y$; $AY = \beta X + \alpha Y$, что доказывает равенства (1). Умножая почленно первое из равенств (1) само на себя и применяя соотношение $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, получим $(\varphi\boldsymbol{x}, \varphi\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = (\alpha^2 + \beta^2)|\boldsymbol{x}|^2 = \alpha^2|\boldsymbol{x}|^2 + \beta^2|\boldsymbol{y}|^2 - 2\alpha\beta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$. Перемножая равенства (1), находим

$$(\varphi\boldsymbol{x}, \varphi\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\alpha^2 + \beta^2)(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \alpha\beta(|\boldsymbol{x}|^2 - |\boldsymbol{y}|^2) + (\alpha^2 - \beta^2)(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}).$$

Таким образом, для величин $|\boldsymbol{x}|^2 - |\boldsymbol{y}|^2$ и $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ после сокращения на β получаем систему уравнений

$$\beta(|\boldsymbol{x}|^2 - |\boldsymbol{y}|^2) + 2\alpha(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0, \quad \alpha(|\boldsymbol{x}|^2 - |\boldsymbol{y}|^2) - 2\beta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0,$$

так как определитель системы отличен от нуля, то

$$|\boldsymbol{x}|^2 - |\boldsymbol{y}|^2 = 0 \quad \text{и} \quad (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0.$$

г) Если φ имеет вещественное собственное значение, то имеется одномерное инвариантное подпространство. В противном случае переходим к унитарному пространству. Именно, берем в унитарном пространстве $\boldsymbol{R}'_n$ ортонормированный базис $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$. Векторы из $\boldsymbol{R}'_n$, имеющие в этом базисе вещественные координаты, образуют евклидово пространство $\boldsymbol{R}_n$, вложенное в $\boldsymbol{R}'_n$. Преобразование φ имеет в базисе $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ вещественную ортогональную матрицу A. Эта матрица в данном базисе определяет унитарное преобразование φ', совпадающее с φ на $\boldsymbol{R}_n$. Преобразование φ' имеет собственное значение $\alpha + \beta i$, где $\beta \neq 0$. Если $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}i$ — соответствующий ему собственный вектор и $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ — векторы с вещественными координатами, то выполняются равенства (1). Значит, подпространство пространства $\boldsymbol{R}_n$, натянутое на векторы $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$, инвариантно относительно φ.

1570. а) Для любой унитарной матрицы A существует унитарная матрица Q такая, что матрица $B = Q'AQ$ диагональная с элементами диагонали, равными по модулю единице.

б) Пространство $\boldsymbol{R}_n$ является прямой суммой ортогональных одномерных и двумерных подпространств, инвариантных относительно φ. Преобразование φ оставляет векторы одномерных подпространств неизменными или меняет их на противоположные, а на двумерном подпространстве вызывает поворот на угол γ. Для любой ортогональной матрицы A существует ортогональная матрица Q такая, что матрица $B = Q'AQ$ имеет канонический вид, указанный в задаче.

Указание. Использовать задачи 1567 и 1569 и применять метод математической индукции.

1571. $f_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$,
$f_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)$,
$f_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1)$;
$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1572. $f_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2}(1,1,0)$,
$f_2 = (0,0,1)$,
$f_3 = \frac{1}{2}\sqrt{2}(1,-1,0)$;
$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1573. $f_1 = \frac{1}{\sqrt{42+28\sqrt{2}}}(-2-\sqrt{2}, -4-3\sqrt{2}, \sqrt{2})$,
$f_2 = \frac{1}{\sqrt{84}}(6\sqrt{2}, -2-\sqrt{2}, 2-\sqrt{2})$,
$f_3 = \frac{1}{\sqrt{84}}(0, \sqrt{42-28\sqrt{2}}, \sqrt{42+28\sqrt{2}})$;

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{-2+7\sqrt{2}}{12} & -\dfrac{\sqrt{42+28\sqrt{2}}}{12} \\ 0 & \dfrac{\sqrt{42+28\sqrt{2}}}{12} & \dfrac{-2+7\sqrt{2}}{12} \end{pmatrix}.$$

1574. $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \dfrac{-\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$, $\quad Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\sqrt{3} & \frac{1}{3}\sqrt{6} & 0 \\ \frac{1}{3}\sqrt{3} & -\frac{1}{6}\sqrt{6} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{3}\sqrt{3} & -\frac{1}{6}\sqrt{6} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

1575. $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2}\sqrt{3} \\ 0 & -\dfrac{1}{2}\sqrt{3} & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$, $\quad Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1576. $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\quad Q = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

1577. $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\quad Q = \frac{1}{2}\sqrt{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1578. $B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&i&0\\0&0&-i\end{pmatrix}$, $\qquad Q=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}i\\-\frac{2}{3}i&\frac{1}{3}i&\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}i&-\frac{2}{3}i&\frac{2}{3}\end{pmatrix}$.

1584. φ — либо тождественное преобразование, либо симметрия относительно некоторого подпространства $\boldsymbol{L}$ размерности $k=0,1,2,\ldots,n-1$, т.е. $\varphi\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$ для любого $\boldsymbol{x}$ из $\boldsymbol{L}$ и $\varphi\boldsymbol{x}=-\boldsymbol{x}$ для любого $\boldsymbol{x}$ из ортогонального дополнения $\boldsymbol{L}^*$.

1585. $\boldsymbol{f}_1=(2/3,2/3,1/3)$,
$\boldsymbol{f}_2=(2/3,-1/3,-2/3)$,
$\boldsymbol{f}_3=(1/3,-2/3,2/3)$; $\qquad B=\begin{pmatrix}9&0&0\\0&18&0\\0&0&-9\end{pmatrix}$.

1586. $\boldsymbol{f}_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$,
$\boldsymbol{f}_2=\left(\frac{1}{\sqrt{18}},-\frac{1}{\sqrt{18}},-\frac{4}{\sqrt{18}}\right)$,
$\boldsymbol{f}_3=\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$; $\qquad B=\begin{pmatrix}9&0&0\\0&9&0\\0&0&27\end{pmatrix}$.

1587. $\boldsymbol{f}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-i,0)$,
$\boldsymbol{f}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,i,0)$,
$\boldsymbol{f}_3=(0,0,1)$; $\qquad B=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&4&0\\0&0&4\end{pmatrix}$.

1588. $B=\begin{pmatrix}5&0\\0&-1\end{pmatrix}$, $\quad C=\begin{pmatrix}\frac{1+i}{\sqrt{3}}&\frac{1+i}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{-2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$.

1589. $B=\begin{pmatrix}2&0\\0&8\end{pmatrix}$, $\quad C=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}2-i&1\\-1&2+i\end{pmatrix}$.

1590. Указание. Пусть E_{ij} — матрица, у которой в i-й строке и j-м столбце стоит единица, а на остальных местах — нули. Рассмотреть матрицы всех преобразований в ортонормированном базисе:

$$E_{11},E_{21},\ldots,E_{n1},E_{12},E_{22},\ldots,E_{n2},\ldots,E_{nn}.$$

1591. а) $UA=A'U$; б) $U\overline{A}=A'U$.

1592. Две вещественные квадратичные формы тогда и только тогда приводятся к каноническому виду одним и тем же ортогональным преобразованием, когда их матрицы перестановочны. Две поверхности второго порядка тогда и только тогда имеют параллельные главные оси, когда матрицы из коэффициентов при членах второй степени их уравнений перестановочны. Указание. Доказать, что подпространство $\boldsymbol{L}$ всех собственных векторов преобразования φ, принадлежащих одному и тому же собственному значению λ, будет инвариантным относительно второго преобразования ψ.

1593. Если

$$A_i = \begin{pmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \dots \\ a_{in} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B_i = \begin{pmatrix} b_{i1} \\ b_{i2} \\ .. \\ b_{in} \end{pmatrix}$$

$(i = 1, 2, \dots, n)$ — столбцы, являющиеся ортонормированными собственными векторами соответственно P и Q, то n^2 матриц $X_{ij} = A - iB'_j$ $(i, j = 1, \dots, n)$, где в k-й строке и l-м столбце матрицы X_{ij} стоит произведение $a_{ik}b_{jl}$, образуют ортонормированный базис собственных векторов преобразований φ и ψ, причем любой такой базис получается указанным способом из некоторых ортонормированных базисов собственных векторов матриц P и Q.

1594. Если, например, линейное преобразование φ плоскости в ортонормированном базисе задано матрицей $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и вектор $\boldsymbol{x} = (1, 1)$ задан координатами в том же базисе, то $(\varphi\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = -1$.

1595. Указание. Можно использовать задачу 1276 в). Проще рассмотреть матрицы преобразований φ, ψ, χ в ортонормированном базисе собственных векторов преобразования χ.

1596. Указание. Существование доказывается, как в задаче 1276. Единственность проще доказать, пользуясь предыдущей задачей.

1597. Собственные значения преобразования с матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ равны $3, -1$, т. е. не являются оба положительными.

1598. $\begin{pmatrix} \frac{3}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{3}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

1599. $\begin{pmatrix} \frac{5}{2}\sqrt{2} & -\frac{3}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{3}{2}\sqrt{2} & \frac{5}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

1600. $\begin{pmatrix} 14/3 & 2/3 & -4/3 \\ 2/3 & 17/3 & 2/3 \\ -4/3 & 2/3 & 14/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix}$.

1602. Указание. Найти невырожденное преобразование χ такое, что $\chi^2 = \varphi$, и показать, что преобразование $\chi^{-1}\varphi\psi\chi$ является самосопряженным.

1603. Указание. Пусть φ_1 и ψ_1 — самосопряженные преобразования с неотрицательными собственными значениями такие, что $\varphi_1^2 = \varphi$ и $\psi_1^2 = \psi$. Если φ невырожденно, то, положив $\chi = \varphi_1\psi_1$, показать, что $\chi\chi^* = \varphi_1^{-1}\varphi\psi\varphi_1$.

1605. Указание. Рассмотреть матрицу преобразования в базисе собственных векторов.

1606. Указание. Рассмотреть ортонормированный базис, в котором матрица φ диагональна, и совершить переход к новому базису.

1607. Указание. Показать дистрибутивность операции перехода от A и B к C. Рассмотреть линейные преобразования φ, ψ, χ, заданные в некотором ортонормированном базисе унитарного пространства $\boldsymbol{R}_n$ матрицами A, B, C. Разбить преобразования φ и ψ на суммы неотрицательных самосопряженных преобразований ранга 1 с матрицами $A_1 \dots A_r$ и $B_1 \dots B_s$. Пользуясь задачей 1606, показать, что преобразование с матрицей (A_i, A_j) в том же базисе неотрицательно. Наконец, пользуясь задачей 1604, показать, что преобразование χ неотрицательно.

1609. Указание. Доказывается аналогично соответствующему свойству самосопряженного преобразования.

1610. Решение. Свойства а) и б) доказываются аналогично соответствующим свойствам самосопряженного преобразования.

Доказательство свойства в): пусть X и Y — столбцы координат соответственно $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$. Переходя к координатам в равенстве $\varphi(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}i) = \beta i(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}i)$, получим: $AX + AYi = -\beta Y + \beta Xi$, откуда, приравнивая действительные и мнимые части, находим: $AX = -\beta Y$, $AY = \beta X$, что доказывает равенство (1). Так как матрица A вещественна, то для вещественного вектора $\boldsymbol{z}$ вектор $\varphi\boldsymbol{z}$ и число $(\varphi\boldsymbol{z}, \boldsymbol{z})$ вещественны. Поэтому $(\varphi\boldsymbol{z}, \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{z}, -\varphi\boldsymbol{z}) = -(\boldsymbol{z}, \varphi\boldsymbol{z}) = -(\varphi\boldsymbol{z}, \boldsymbol{z})$ и, значит, $(\varphi\boldsymbol{z}, \boldsymbol{z}) = 0$. Умножая второе из равенств (1) на $\boldsymbol{y}$, найдем: $\beta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\varphi\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) = 0$, откуда $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$. Умножая первое из равенств (1) на $\boldsymbol{y}$, а второе на $\boldsymbol{x}$ и складывая, получим ввиду вещественности числа $(\varphi\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = \beta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$, что $\beta(|\boldsymbol{x}|^2 - |\boldsymbol{y}|^2) = (\varphi\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + (\varphi\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = (\varphi\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x}, \varphi\boldsymbol{y}) = (\varphi\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) - (\varphi\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$, откуда $|\boldsymbol{x}| = |\boldsymbol{y}|$.

Доказательство свойства г): если преобразование φ имеет число 0 собственным значением, то имеется одномерное инвариантное подпространство. В противном случае переходим к унитарному пространству. Именно, берем в унитарном пространстве $\boldsymbol{R}'_n$ ортонормированный базис $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n$. Векторы из $\boldsymbol{R}'_n$, имеющие в этом базисе вещественные координаты, образуют евклидово пространство $\boldsymbol{R}_n$, вложенное в $\boldsymbol{R}'_n$. Преобразование φ имеет в базисе $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n$ вещественную кососимметрическую матрицу A. Эта матрица в данном базисе определяет кососимметрическое преобразование φ' унитарного пространства $\boldsymbol{R}'_n$, совпадающее с φ на $\boldsymbol{R}_n$. Преобразование φ' имеет собственное значение $\beta_i \neq 0$. Если $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}i$ — соответствующий собственный вектор, где $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ — векторы с вещественными координатами, то выполняются равенства (1). Значит, подпространство, натянутое на $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$, инвариантно.

1611. а) Для любой косоэрмитовой матрицы A существует унитарная матрица Q такая, что матрица $B = Q^{-1}AQ$ диагональна с чисто мнимыми элементами на диагонали, некоторые из которых могут равняться нулю.

б) Пространство является прямой суммой ортогональных между собой одномерных и двумерных подпространств, инвариантных относительно φ. Преобразование φ переводит векторы одномерных подпространств в нуль, а на двумерном подпространстве, соответствующем клетке $\begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix}$, вызывает поворот на угол $\pi/2$, соединенный с умножением на число $-\beta$. Для любой вещественной кососимметрической матрицы A существует вещественная ортогональная матрица Q такая, что матрица $B = Q^{-1}AQ$ имеет канонический вид, приведенный в тексте задачи.

Указание. Использовать задачи 1609 и 1610 и применить метод математической индукции.

1614. Если A — косоэрмитова матрица, то матрица $B = (E-A)(E+A)^{-1}$ — унитарная, не имеющая характеристического числа, равного -1, и, обратно, если A — унитарная матрица, не имеющая характеристического числа, равного -1, то матрица $B = (E-A)(E+A)^{-1}$ косоэрмитова. Аналогичная связь имеется между вещественными кососимметрическими и ортогональными матрицами.

Решение. Разберем лишь случай унитарного пространства. Пусть в равенстве (1) φ — кососимметрическое преобразование ($\varphi^* = -\varphi$). Тогда

$$\psi^* = (\varepsilon+\varphi^*)^{-1}(\varepsilon-\varphi^*) = (\varepsilon-\varphi)^{-1}(\varepsilon+\varphi) = (\varepsilon+\varphi)(\varepsilon-\varphi)^{-1} = \psi^{-1},$$

так как $\varepsilon+\varphi$ и $(\varepsilon-\varphi)^{-1}$ перестановочны. Значит, ψ унитарно. Заметим, что $(\varepsilon\pm\varphi)^{-1}$ существуют, так как числа ± 1 не являются собственными значениями φ (задача 1610, пункт а)). Далее,

$$\varepsilon+\psi = (\varepsilon+\varphi)(\varepsilon+\varphi)^{-1} + (\varepsilon-\varphi)(\varepsilon+\varphi)^{-1} = 2(\varepsilon+\varphi)^{-1} \qquad (\alpha)$$

и, значит, ψ не имеет собственным значением числа -1. Кроме того, φ выражается через ψ при помощи равенства, аналогичного равенству (1). В самом деле, из равенства (α) находим: $\varepsilon+\varphi = 2(\varepsilon+\psi)^{-1}$, $\varphi = 2(\varepsilon+\psi)^{-1} - \varepsilon = 2(\varepsilon+\psi)^{-1} - (\varepsilon+\psi)(\varepsilon+\psi)^{-1} = (\varepsilon-\psi)(\varepsilon+\psi)^{-1}$. Пусть, обратно, в равенстве (1) φ — унитарное преобразование, не имеющее собственным значением числа -1. Тогда $\psi^* = (\varepsilon+\varphi^*)^{-1}(\varepsilon-\varphi^*) = (\varepsilon+\varphi^{-1})^{-1}(\varepsilon-\varphi^{-1}) = (\varphi+\varepsilon)^{-1}\varphi\varphi^{-1}(\varphi-\varepsilon) = -(\varepsilon-\varphi)(\varepsilon+\varphi)^{-1} = -\psi$, так как $\varepsilon-\varphi$ и $(\varepsilon+\varphi)^{-1}$ перестановочны. Значит, ψ — кососимметрическое преобразование. Кроме того, φ выражается через ψ при помощи равенства, аналогичного равенству (1). Это доказывается снова при помощи равенства (α) дословно, как выше. Таким образом, равенство (1) отображает все кососимметрические преобразования на унитарные, не имеющие собственным значением числа -1, и обратно, причем одно из этих отображений является обратным для другого. Это доказывает, что оба отображения взаимно однозначны.

1616. Если матрица A — косоэрмитова (или вещественная кососимметрическая), то матрица e^A — унитарна (соответственно ортогональна).

1617. Решение. По задаче 1559 преобразование e^φ будет самосопряженным. Если $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — собственные значения φ, то они вещественны и по задаче 1161 собственные значения e^φ будут $e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n}$, т.е. e^φ положительно определенно. Покажем, что различным самосопряженным преобразованиям φ и φ' соответствуют различные преобразования e^φ и $e^{\varphi'}$. Пусть $e^\varphi = e^{\varphi'}$; φ обладает ортонормированным базисом собственных векторов $a_1, \ldots, a_n$, где $\varphi a_i = \lambda_i a_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Пусть a' — любой собственный вектор преобразования φ' со значением λ'; $a' = \sum_{i=1}^n x_i a_i$. Тогда по задаче 1464 $e^{\varphi'} a' = e^{\lambda'} a' = \sum_{i=1}^n \varepsilon^{\lambda'} x_i a_i$. С другой стороны, $e^\varphi a' = \sum_{i=1}^n x_i e^\varphi a_i = \sum_{i=1}^n x_i e^{\lambda_i} a_i$; так как $e^{\varphi'} a' = e^\varphi a'$, то $x_i = 0$ для всех i, для которых $e^{\lambda_i} \neq e^{\lambda'}$, и $e^{\lambda_i} = e^{\lambda'}$, если $x_i \neq 0$. Так как λ_i и λ' вещественны, то из $x_i \neq 0$

следует $\lambda_i = \lambda'$. Поэтому $\varphi \boldsymbol{a}' = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \varphi \boldsymbol{a}_i = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \lambda_i \boldsymbol{a}_i = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \lambda' \boldsymbol{a}_i = \lambda' \boldsymbol{a}' = \varphi' \boldsymbol{a}'$. Так как φ' обладает базисом собственных векторов и на этом базисе совпадает с φ, то $\varphi = \varphi'$. Пусть ψ — любое положительно определенное преобразование. Существует ортонормированный базис, в котором матрица ψ диагональна с положительными элементами $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ на диагонали. Положим $\lambda_i = \ln \mu_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$), где λ_i — вещественное значение логарифма, и пусть преобразование φ в том же базисе задано диагональной матрицей с элементами $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ на диагонали. Преобразование φ самосопряженное, и $\psi = e^{\varphi}$.

1625. Указание. Применить задачу 1507.

1626. Если r — ранг φ, то число таких преобразований равно k^r.

1627. Указание. Доказать равенство

$$(\varphi \boldsymbol{x} - \lambda \boldsymbol{x}, \varphi \boldsymbol{x} - \lambda \boldsymbol{x}) = (\varphi^* \boldsymbol{x} - \overline{\lambda} \boldsymbol{x}, \varphi^* \boldsymbol{x} - \overline{\lambda} \boldsymbol{x}).$$

1628. Указание. Применить предыдущую задачу.

1629. Указание. Применить задачу 1627.

1630. Указание. Применить задачу 1627 и 1629.

1631. Указание. Несколько раз применить задачу 1629.

1632. Указание. При доказательстве необходимости применить две предыдущие задачи. При доказательстве достаточности показать, что преобразование φ унитарного пространства, обладающее нормальным свойством, обладает ортонормированным базисом собственных векторов. Случай евклидова пространства свести к случаю унитарного.

1633. Указание. Применить предыдущую задачу.

Дополнение

1634. 1) Да; 2) да; 3) да; 4) да; 5) нет; 6) нет; 7) нет; 8) да; 9) нет; 10) да; 11) да; 12) нет; 13) да; 14) да; 15) да; 16) да; 17) нет; 18) да; 19) нет; 20) да; 21) да; 22) да; 23) да; 24) да; 25) нет; 26) да; 27) да; 28) да; 29) да; 30) да; 31) да; 32) нет; 33) нет; 34) да; 35) нет; 36) да.

1637. Указание. Первый способ: показать, что $|a| = 1$ для любого a из данной группы G порядка n. При $n > 1$ взять в G элемент $b = \cos\psi + i\sin\psi$ с наименьшим положительным аргументом ψ и показать, что

$$G = \{1, b, b^2, \ldots, b^{n-1}\}.$$

Второй способ: пользуясь теоремой Лагранжа, показать, что $a^n = 1$ для любого a из G.

1638. а) Одна группа — циклическая группа 3-го порядка с элементами e, a, b и таблицей

	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

В представлении подстановками можно положить: e — единица, $a = (1\ 2\ 3)$, $b = (1\ 3\ 2)$.

б) Две группы: 1) циклическая группа четвертого порядка с элементами e, a, b, c и таблицей:

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	b	c	e
b	b	c	e	a
c	c	e	a	b

В представлении подстановками можно положить: e — единица, $a = (1\ 2\ 3\ 4)$, $b = (1\ 3)(2\ 4)$, $c = (1\ 4\ 3\ 2)$;

2) четверная группа с элементами e, a, b, c и таблицей

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

В представлении подстановками можно положить: e — единица, $a = (1\ 2)(3\ 4)$, $b = (1\ 3)(2\ 4)$, $c = (1\ 4)(2\ 3)$.

в) Две группы: 1) циклическая группа шестого порядка с элементами e, a, b, c, d, f и таблицей

	e	a	b	c	d	f
e	e	a	b	c	d	f
a	a	b	c	d	f	e
b	b	c	d	f	e	a
c	c	d	f	e	a	b
d	d	f	e	a	b	c
f	f	e	a	b	c	d

В представлении подстановками можно положить: e — единица, $a = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)$, $b = (1\ 3\ 5)(2\ 4\ 6)$, $c = (1\ 4)(2\ 5)(3\ 6)$, $d = (1\ 5\ 3)(2\ 6\ 4)$, $f = (1\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2)$;

2) симметрическая группа третьей степени с элементами e, a, b, c, d, f и таблицей

	e	a	b	c	d	f
e	e	a	b	c	d	f
a	a	b	e	d	f	c
b	b	e	a	f	c	d
c	c	f	d	e	b	a
d	d	c	f	a	e	b
f	f	d	c	b	a	e

В представлении подстановками можно положить: e — единица, $a = (1\ 2\ 3)$, $b = (1\ 3\ 2)$, $c = (1\ 2)$, $d = (2\ 3)$, $f = (1\ 3)$.

Указание. Показать, что если в группе G порядка n имеется множество H из k элементов, $k < n$, которое само является группой при операции умножения, заданной в G, то, умножая все элементы из H на элемент x, не лежащий в H, мы получим k новых элементов группы G. Поэтому $k \leqslant \frac{n}{2}$. За H можно взять множество элементов $e, a, a^2, \ldots, a^{k-1}$, где $a^k = e$. Например, в случае в) 2), т. е.

для нециклической группы G шестого порядка, должно быть $k \leqslant 3$. Если бы было $a^2 = e$ для любого a из G, то четыре элемента e, a, b, ab образовали бы группу, что невозможно. Значит, существует элемент a, для которого $a^2 = b \neq e$, но $a^3 = e$. Умножая элементы e, a, a^2 на новый элемент c, получим все шесть элементов группы G в виде $e, a, a^2 = b, c, ac = d, a^2c = f$. Надо показать, что $c^2 = d^2 = f^2 = e$ и $ca = a^2c = f$. Например, если бы было $ca = ac$, то, умножая слева сначала на c, а затем на a^2, получим: $a^2cac = fd = e$, откуда $fd = d^2$ и $f = d$, что невозможно.

1639. Группа тетраэдра имеет порядок 12, куба и октаэдра — 24, додекаэдра и икосаэдра — 60. Указание. Рассмотреть вращения, переводящие данную вершину A в некоторую вершину B (не обязательно отличную от A), и показать, что порядок группы равен nk, где n — число вершин и k — число ребер, выходящих из одной вершины.

1643. Указание. Каждому элементу x данной группы G поставить в соответствие отображение $a \to ax$ для любого элемента a из G.

1646. ± 1.

1648. Указание. а) Рассмотреть $(ab)^{pr}$ и $(ab)^{ps}$, где p — порядок ab. б) Рассмотреть $(ab)^p$, где p — порядок ab, и показать, что $a^p = b^{-p} = e$.

Пример 1. Для элементов $a \neq e, b = a^{-1}$ условие (1) выполнено, а (2) — нет. Утверждение б) не выполнено, так как порядки a и b равны между собой и не равны единице, а порядок $ab = e$ равен единице.

Пример 2. Элементы $a = (1\ 2)$, $b = (1\ 2\ 3)$ симметрической группы S_3 имеют взаимно простые порядки 2 и 3. Условие (1) не выполнено, так как $ab = (1\ 3)$, $ba = (2\ 3)$, а (2) выполнено. Утверждение б) не выполнено: a порядка 2, b порядка 3, ab порядка 2.

в) Обе части равенства $a^k = b^l$ возвысить в степень s, равную порядку b.

г) Пример 3. В циклической группе $\{a\}$ восьмого порядка элементы a, a^3, a^5 имеют порядок 8, но $aa^3 = a^4$ порядка 2, $aa^5 = a^6$ порядка 4.

1649. 2) и 3) для 1); 4) и 11) для 10); 1), 2), 3), 13), 14) для 8); 15) для 16); 20) и 21) для 18); 20) для 21); 24) для 23); 23) и 24) для 26); 29) и 30) для 31); 34) для 36).

1653. Бесконечная циклическая группа, все циклические группы простых порядков и единичная группа.

1654. а) $G = \{a\}, \{a^2\}, \{a^3\}, \{e\}$;

б) $G = \{a\}, \{a^2\}, \{a^3\}, \{a^4\}, \{a^6\}, \{a^8\}, \{a^{12}\}, \{e\}$;

в) $G = \{e, a, b, c\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{e\}$;

г) применяя запись подстановок в циклах, получим подгруппы

$$S_3,\ \{(1\ 2\ 3)\},\ \{(1\ 2)\},\ \{(1\ 3)\},\ \{(2\ 3)\},\ \{e\};$$

д) нормальными делителями будут $S_3, \{(1\ 2\ 3)\}, \{e\}$.

е) Указание. Разложение на циклы подстановки из A_4 может содержать лишь циклы длины 1, два цикла длины 2 или один цикл длины 3. Поэтому A_4 не имеет циклической подгруппы шестого порядка (см. задачу 1648 а), б)) и все ее элементы второго порядка перестановочны. Значит, A_4 не имеет подгруппы, изоморфной S_3. Но любая группа шестого порядка либо является циклической, либо изоморфна S_3 (задача 1638 в)).

1655. Выбираем в G любые элементы: сначала $a \neq e$, затем $b \neq e, a$, затем $c \neq e, a, b, ab$. Остальными элементами группы G будут ab, ac, bc, abc. Группа G абелева (задача 1636). Группа G имеет следующие 16 подгрупп: $\{e\}$, $\{e, a\}$, $\{e, b\}$, $\{e, c\}$, $\{e, ab\}$, $\{e, ac\}$, $\{e, bc\}$, $\{e, abc\}$, $\{e, a, b, ab\}$, $\{e, a, c, ac\}$, $\{e, b, c, bc\}$, $\{e, a, bc, abc\}$, $\{e, b, ac, abc\}$, $\{e, c, ab, abc\}$, $\{e, ab, ac, bc\}$, $\{e, a, b, c, ab, ac, bc, abc\} = G$.

1657. В аддитивной записи все подгруппы имеют вид

$$G_0 = \{a\},\ G_1 = \{pa\},\ G_2\{p^2a\},\ \ldots,\ G_{k-1} = \{p^{k-1}a\},\ G_k = \{p^ka\} = \{0\}.$$

Они образуют убывающую цепочку подгрупп соответственно порядков p^k, p^{k-1}, $p^{k-2}, \ldots, p, 1$.

Указание. Использовать задачу 1656 б) или показать, что подгруппа $\{sa\}$, где $0 < s < p^k$, совпадает с подгруппой $\{p^l a\}$, где $s = p^l t$, $0 \leqslant l < k$ и t не делится на p.

1658. а) Указание. Разложить подстановку на циклы и проверить, что $(i_1 i_2 i_3 \ldots i_k) = (i_1 i_2)(i_1 i_3) \ldots (i_1 i_k)$.

б) Указание. Проверить равенство $(1i)(1j)(1i) = (ij)$.

в) Указание. Проверить, что произведение двух транспозиций следующим образом выражается через тройные циклы:

$$(ij)(ik) = (ijk), \quad (ij)(kl) = (ijk)(ilk).$$

г) Решение. Пусть G — подгруппа знакопеременной группы A_n, порожденная множеством указанных тройных циклов, и i, j, k — различные числа, бóльшие двух (при $n = 3$ утверждение очевидно, а при $n = 4$ данное ниже доказательство сокращается). Вместе с циклом $(1\ 2\ i)$ группа G содержит обратный элемент $(i\ 2\ 1)$, затем G содержит

$$(1\ 2\ j)(1\ 2\ i)(j\ 2\ 1) = (1\ i\ j); \quad (j\ 2\ 1)(i\ 2\ 1)(1\ 2\ j) = (2\ i\ j).$$

При $n = 4$ группа G уже содержит все тройные циклы. При $n > 4$ она содержит $(1\ 2\ k)(1\ i\ j)(k\ 2\ 1) = (i\ j\ k)$. Значит, G содержит все тройные циклы и по пункту в) совпадает с A_n.

1660. Указание. Пусть K — множество всех элементов группы G, не принадлежащих к H, и a — любой элемент из K. Показать, что, умножая a на все элементы H, получим все элементы K. Вывести отсюда, что, умножая a на все элементы из K, получим все элементы из H. В частности, a^2 принадлежит к H.

1661. Примером может служить четверная группа с элементами e, a, b, c (см. ответ задачи 1638). Она имеет три циклические подгруппы второго порядка: $\{a\}$, $\{b\}$ и $\{c\}$.

Указание. Доказать, что при возведении в квадрат всех тройных циклов мы получим снова все тройные циклы, и использовать задачи 1658 и 1660.

1662. а) Указание. Каждому вращению тетраэдра $ABCD$ соответствует подстановка его вершин. Произведению двух вращений соответствует произведение соответствующих подстановок. Двум различным вращениям s и t соответствуют две различные подстановки, так как иначе нетождественному вращению st^{-1} соответствовала бы тождественная подстановка, сохраняющая все вершины на месте. По ответу задачи 1639 группа тетраэдра изоморфна подгруппе двенадцатого порядка симметрической группы S_4. Далее, можно либо проверить, что все подстановки, соответствующие вращениям тетраэдра, четные, либо использовать задачу 1661.

б) Решение. Центры граней октаэдра являются вершинами куба. Поэтому группы куба и октаэдра изоморфны. Каждому вращению куба соответствует подстановка его четырех диагоналей. Произведению вращений соответствует произведение соответствующих подстановок. Рассмотрим все вращения куба. Это — тождественное вращение, восемь вращений вокруг диагоналей на углы $2\pi/3$ и $4\pi/3$, шесть вращений вокруг осей, проходящих через середину противоположных ребер, на угол π и девять вращений вокруг осей, проходящих через центры противоположных граней, на углы $\pi/4$, $2\pi/4$ и $3\pi/4$. Число этих вращений: $1+8+6+9=24$. По ответу задачи 1639 ими исчерпываются все вращения куба. Непосредственной проверкой убеждаемся, что только при тождественном вращении все четыре диагонали остаются на месте. Отсюда, как в пункте а), выводим, что группа куба изоморфна группе подстановок четырех элементов, имеющей порядок 24, т. е. симметрической группе S_4.

в) Решение. Центры граней додекаэдра являются вершинами икосаэдра. Поэтому группы додекаэдра и икосаэдра изоморфны. Для каждого ребра икосаэдра имеется одно противоположное параллельное ему ребро и две пары перпендикулярных к нему ребер: ребра одной пары начинаются в вершинах граней, примыкающих к данному ребру, а ребра другой пары принадлежат граням, имеющим вершинами концы данного ребра. Ребра одной из этих пар параллельны, а разных пар — перпендикулярны между собой. Таким образом, все 30 ребер делятся на пять систем по шести ребер в каждой системе. Ребра одной системы либо параллельны, либо перпендикулярны, а ребра разных систем не параллельны и не перпендикулярны. С каждой системой ребер связан октаэдр, вершинами которого служат середины ребер данной системы. Этим определены пять октаэдров, вписанных в икосаэдр. Каждому вращению икосаэдра соответствует подстановка пяти указанных систем ребер (или соответствующих им октаэдров). Произведению двух вращений соответствует произведение соответствующих подстановок. Рассмотрим все вращения икосаэдра. Это — тождественное вращение; 24 вращения вокруг каждой из шести осей, проходящих через противоположные вершины, на углы $2\pi/5$, $4\pi/5$, $6\pi/5$ и $8\pi/5$; 20 вращений вокруг каждой из десяти осей, проходящих через центры противоположных граней, на углы $2\pi/3$ и $4\pi/3$; 15 вращений вокруг каждой из пятнадцати осей, проходящих через середины противоположных ребер, на угол π. Число этих вращений: $1+24+20+15=60$. По ответу задачи 1639 ими исчерпываются все вращения икосаэдра. Непосредственной проверкой убеждаемся, что для каждого нетождественного вращения найдется ребро, переводящееся данным вращением в другое ребро, не параллельное и не перпендикулярное к данному ребру. Поэтому только тождественному вращению соответствует тождественная подстановка систем ребер. Отсюда, как в пункте а), выводим, что группа икосаэдра изоморфна подгруппе порядка 60 симметрической группы S_5. По задаче 1661 эта подгруппа совпадает со знакопеременной группой A_5.

1668. Указания. а) Применить задачу 1667. б) Показать, что каждый смежный класс содержит точно одну подстановку, оставляющую на месте число 4.

1669. Если в разложении данной подстановки s на независимые циклы встречается k_i циклов длины $l_i, i = 1, 2, \ldots, r$, причем учтены все циклы, включая и циклы длины 1, то число подстановок, перестановочных с подстановкой s, равно $\prod\limits_{i=1}^{r}(k_i)! \cdot l_i^{k_i}$. Считая $0! = 1$, можно искомое число записать иначе. Пусть j_i — число циклов длины i, входящих в разложение подстановки s, где $i = 1, 2, \ldots, n$, и если циклов длины i в разложении нет, то положено $j_i = 0$. Тогда искомое число равно $\prod\limits_{i=1}^{n}(j_i)! \cdot i^{j_i}$.

Указание. Циклы одной и той же длины l, входящие в разложение s, при трансформировании подстановкой x, перестановочной с s, могут лишь переставляться между собой, причем первое число какого-либо цикла может перейти в любое число любого цикла той же длины, входящего в разложение подстановки s.

1670. Указание. Рассмотреть коммутатор $h_1h_2h_1^{-1}h_2^{-1}$ этих элементов.

1674. Если в разложении данной подстановки s на независимые циклы встречается k_i циклов длины $l_i, i = 1, 2, \ldots, r$, причем учтены все циклы, включая и циклы длины 1, то искомое число равно $\dfrac{n!}{\prod\limits_{i=1}^{r}(k_i)! \cdot l_i^{k_i}}$. Это число можно записать иначе, пользуясь другим выражением знаменателя, указанным в ответе задачи 1669.

1675. Указания. а) Обозначить через a_k число классов сопряженных элементов с p^k элементами и, пользуясь задачей 1673, показать, что $a_0 + a_1p + a_2p^2 + \cdots = p^n$.

б) Рассмотреть группу $\{Z, a\}$, где $a \notin Z$.

в) $S_3 \times S_3$. г) Группа матриц вида $\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ над полем Z_p.

1676. Указание. Если H содержит цикл $(\alpha\beta\gamma)$ и α', β', γ' — любые различные числа от 1 до n, то трансформировать цикл $(\alpha\beta\gamma)$ подстановкой

$$x = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta & \varepsilon & \ldots \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' & \varepsilon' & \ldots \end{pmatrix},$$

где δ' и ε' выбраны так, что подстановка x четна. Использовать задачи 1667 и 1658 в).

1677. Решение. а) Все 60 вращений, составляющие группу икосаэдра, указаны в ответе задачи 1662 в). Тождественное вращение является единицей группы и составляет один класс. Сопряженные элементы имеют одинаковый порядок. Элементами пятого порядка являются 24 вращения на углы $2k\pi/5$, $k = 1, 2, 3, 4$, вокруг каждой из шести осей, проходящих через противоположные вершины. Под вращением вокруг вершины A на угол α будем понимать вращение вокруг оси, проходящей через A и противоположную вершину, на угол α против часовой стрелки, если смотреть вдоль оси от A к противоположной вершине. У каждой вершины отметим один из плоских углов с данной вершиной. Каждое вращение икосаэдра вполне характеризуется указанием вершины B, в которую переходит данная вершина A (B может совпадать с A), и плоского угла при B, в который переходит отмеченный угол при A. Поэтому каждое вращение x, переводящее A в B, представляется в виде произведения $x = yz$, где y переводит отмеченный угол A в отмеченный угол B, а z есть вращение вокруг вершины B на угол α. Обратный элемент $x^{-1} = z^{-1}y^{-1}$ есть произведение вращения z^{-1} вокруг B на угол $-\alpha$ и вращения y^{-1}, переводящего отмеченный угол B в отмеченный угол A. Пусть теперь g — вращение вокруг вершины A на угол α и x — любой элемент группы, переводящий A в B. Представляя x в виде произведения $x = yz$, как указано выше, найдем, что сопряженный элемент $x^{-1}gx = z^{-1}y^{-1}gyz$ является поворотом снова на угол α, но уже вокруг вершины B. В частности, если A и B — противоположные вершины, то поворот вокруг B на угол α совпадает с поворотом вокруг A на угол $2\pi - \alpha$. Таким образом, все вращения вокруг вершин на углы $2\pi/5$ и $8\pi/5$ принадлежат одному классу сопряженных элементов, так же как и все вращения на углы $4\pi/5$ и $6\pi/5$. Покажем, что вращения g_1 и g_2 вокруг вершины A на углы $2\pi/5$ и $4\pi/5$ принадлежат различным классам. Если x переводит A в другую вершину B, то $x^{-1}g_1x$ есть вращение вокруг B и либо не будет вращением вокруг A, либо (если B противоположна A) будет вращением вокруг A на угол $8\pi/5$, т. е. $x^{-1}g_1x \neq g_2$. Если же x — вращение вокруг A, то g_1 и x — элементы циклической (и, значит, коммутативной) подгруппы вращений вокруг A, и снова $x^{-1}g_1x = g_1 \neq g_2$.

Итак, все элементы пятого порядка разбиваются на два класса по 12 элементов. Аналогично, отмечая по плоскому углу каждой грани и по вершине каждого ребра, убедимся, что 20 элементов третьего порядка (вращения на углы $2\pi/3$ и $4\pi/3$ вокруг осей, проходящих через центры противоположных граней) составляют один класс и 15 элементов второго порядка (вращения на угол π вокруг осей, проходящих через середины противоположных ребер) также составляют один класс.

б) Нормальный делитель должен состоять из целых классов, должен содержать единицу, и его порядок должен делить порядок 60 группы икосаэдра. По пункту а) классы сопряженных элементов содержат соответственно 1, 12, 12, 20, 15 элементов. Из этих чисел можно составить лишь две суммы, включающие слагаемое 1 и делящие число 60, именно 1 и 60. Это дает лишь два нормальных делителя — единичную подгруппу и всю группу.

1678. Указание. Применить задачи 1662 в) и 1677 б).

1681. Гомоморфизм вполне определяется образом образующего элемента a. Ниже указаны возможные образы этого элемента:

а) любой элемент группы; число гомоморфизмов равно n;

б) $e, b^3, b^6, b^9, b^{12}, b^{15}$; в) e, b, b^2, b^3, b^4, b^5; г) e, b^5, b^{10}; д) e.

1683. а) Циклическая группа $\{\varphi\}$ четвертого порядка, где $a\varphi = a^2$; б) циклическая группа $\{\varphi\}$ второго порядка, где $a\varphi = a^5$; д) поле вычетов по модулю 5; е) кольцо вычетов по модулю 6; ж) кольцо вычетов по модулю n.

1685. а) Циклическая группа порядка n; б) циклическая группа порядка 5; в) циклическая группа порядка 6; г) циклическая группа порядка 2.

1688. Указания. В случае г), д) и з) рассмотреть отображение $f(z) = z^n$, а в случае е) — отображение $g(z) = z^n/|z|^n$.

1691. В группе S_3 подгруппа $\{(1\ 2)\}$ имеет индекс 3, но не содержит элемента $(1\ 3)$ порядка 2.

1693. Указание. Предположив, что G/Z — циклическая группа, выбрать в классе, служащем для нее образующим элементом, элемент a и показать, что a и Z порождают всю группу G.

1694. Решение. Применим индукцию по порядку n группы G. Для $n = 2$ группа G — циклическая второго порядка, и теорема для нее верна. Пусть теорема верна для всех групп, порядок которых меньше n, и G — группа порядка n. Пусть сначала G коммутативна. Берем любой элемент a, отличный от единицы e группы G. Его порядок $k > 1$. Если k делится на $p, k = pq$, то элемент a^q имеет порядок p. Если k не делится на p, то порядок n' факторгруппы $G' = G/\{a\}$ группы G по циклической подгруппе $\{a\}$ равен $\frac{n}{k} < n$ и делится на p. По предположению индукции G' содержит элемент b' порядка p. Пусть b — элемент группы G, входящий в смежный класс b'. Из $b'^p = e'$, где e' — единица группы G', следует, что b^p содержится в подгруппе $\{a\}$, т. е. $b^p = a^l$, откуда $b^{pk} = a^{lk} = e$. Если $b^k = e$, то $b'^k = e'$ и k делится на порядок p элемента b', что невозможно. Значит, $b^{kp} = e$, но $b^k \neq e$, т. е. элемент b^k имеет порядок p.

Пусть теперь группа G некоммутативна. Если существует подгруппа H, отличная от G, индекс которой не делится на p, то порядок H меньше n и делится на p. По предположению индукции H содержит элемент порядка p. Если же индексы всех подгрупп группы G, отличных от G, делятся на p, то число элементов, сопряженных любому элементу группы G, не входящему в ее центр Z (задача 1664), делится на p (задача 1671). Так как порядок n группы G также делится на p, то и порядок центра Z делится на p и меньше n, так как G некоммутативна. По предположению индукции Z содержит элемент порядка p.

1695. Указание. Воспользоваться предыдущей задачей.

1701. а) $\{a\} = \{3a\} + \{2a\}$; б) $\{a\} = \{4a\} + \{3a\}$;
в) $\{a\} = \{15a\} + \{20a\} + \{12a\}$; г) $\{a\} = \{225a\} + \{100a\} + \{36a\}$.

1702. Указание. В случае в) использовать задачу 1700 б).

1703. Указания. а) Принять соответственно за A и B множества всех элементов a и b из G, для которых $pa = 0$ и $qb = 0$; б) рассмотреть разложения $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_s^{k_s}$ порядка n группы G на простые множители и применить а).

1704. а) $G(3)$; б) $G(4)$, $G(2,2)$; в) $G(2,3)$; г) $G(8)$, $G(2,4)$, $G(2,2,2)$; д) $G(9)$, $G(3,3)$; е) $G(4,3)$, $G(2,2,3)$; ж) $G(16)$, $G(2,8)$, $G(4,4)$, $G(2,2,4)$, $G(2,2,2,2)$; з) $G(8,3)$, $G(2,4,3)$, $G(2,2,2,3)$; и) $G(2,3,5)$; к) $G(4,9)$, $G(2,2,9)$, $G(4,3,3)$, $G(2,2,3,3)$; л) $G(16,3)$, $G(2,8,3)$, $G(4,4,3)$, $G(2,2,4,3)$, $G(2,2,2,2,3)$; м) $G(4,3,5)$, $G(2,2,3,5)$; н) $G(9,7)$, $G(3,3,7)$; о) $G(8,9)$, $G(2,4,9)$, $G(2,2,2,9)$, $G(8,3,3)$, $G(2,4,3,3)$, $G(2,2,2,3,3)$; п) $G(4,25)$, $G(2,2,25)$, $G(4,5,5)$, $G(2,2,5,5)$.

1705. Если Z_k — циклическая группа порядка k и Z — бесконечная циклическая группа, то искомое прямое разложение факторгруппы G/H имеет вид:

а) $Z_2 + Z_2 + Z_3$; б) $Z_3 + Z_4$; в) $Z_2 + Z_3 + Z_3$; г) $Z_2 + Z_4$; д) $Z_4 + Z$; е) $Z_2 + Z_2 + Z$; ж) Z_3; з) $Z + Z$; и) Z; к) G/H — нулевая группа.

Искомого разложения не существует.

1706. в) Группа G единственным образом разлагается в прямую сумму подгрупп: $G = A_1 + A_2 + \dots + A_s$, где A_i — циклическая подгруппа порядка p_i. Любая подгруппа H группы G, отличная от нулевой, является прямой суммой некоторых из подгрупп A_i. Число всех подгрупп равно 2^s. Указание. Использовать пункт б) и показать, что если h — образующий подгруппы H, то H является прямой суммой тех подгрупп A_i, которые содержат ненулевые компоненты элемента h.

1707. Указания. в) Для доказательства разложения $G = H + K$ взять любой элемент a_1 вне H, затем любой элемент a_2 вне $\{H, a_1\}$ и т. д. и положить $K = \{a_1, a_2, \dots\}$.

г) Любая подгруппа H порядка p^l разлагается в прямую сумму l циклических подгрупп порядка p. Пусть это разложение имеет вид

$$H = \{a_1\} + \{a_2\} + \dots + \{a_l\}.$$

Находим число всех систем $(a_1, a_2, \dots, a_l)$, определенных указанным образом для всех подгрупп H порядка p^l. Так как $a_1 \neq 0$, то для a_1 имеем $p^k - 1$ возможностей. Так как a_2 лежит вне циклической подгруппы $\{a_1\}$, то для a_2 имеем $p^k - p$ возможностей и т. д. Аналогично находим число всех систем $(a_1, a_2, \dots, a_l)$, дающих одну группу H порядка p^l. Число всех подгрупп порядка p^l равно частному двух найденных чисел.

1708. Указание. Сначала рассмотреть случай примарной группы, затем взять разложение группы на примарные компоненты (задача 1703 б)) и применить задачу 1700 б).

1709. Кольцо. **1710.** Кольцо.

1711. Кольцо. При $n = 0$ получаем нулевое кольцо, состоящее из одного числа 0, который будет единицей кольца и сам для себя обратным. Нулевое кольцо не будет полем, так как поле должно содержать более одного элемента.

1712. Поле. **1713.** Поле. **1714.** Поле. **1715.** Кольцо. **1716.** Поле.

1717. Кольцо. **1718.** Поле. **1719.** Кольцо. **1720.** Кольцо.

1721. Кольцо. **1722.** Кольцо. **1723.** Кольцо.

1724. Матрицы с рациональными a, b образуют поле, а с действительными a, b — кольцо, но не поле.

1725. Многочлены от синусов и косинусов и многочлены от одних косинусов образуют кольцо, а от одних синусов не образуют. Указание. Для доказательства, что многочлены от синусов не образуют кольца, использовать то, что произведение двух нечетных функций является функцией четной.

1726. Не образуют. Указание. Используя неприводимость многочлена $x^3 - 2$ над полем рациональных чисел, доказать, что $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{4}$ не принадлежит рассматриваемому множеству.

1727. $(5 + 9\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4})/43$. Указание. Для доказательства однозначности использовать неприводимость многочлена $x^3 - 2$ над полем рациональных чисел. Для отыскания обратного элемента применить метод неопределенных коэффициентов.

1728. $x^{-1} = (19 - \sqrt[3]{5} + 11\sqrt[3]{25})/208$.

1729. Указание. Использовать свойство неприводимого многочлена быть взаимно простым с любым многочленом низшей степени.

1730. $\beta^{-1} = (101 + 37\alpha + 4\alpha^2)/405$. Указание. Если $\varphi(x) = x^2 - x + 3$, то методом неопределенных коэффициентов найти многочлены $f_1(x)$ первой степени и $\varphi_1(x)$ второй степени, удовлетворяющие равенству $f(x)f_1(x) + \varphi(x)\varphi_1(x) = 1$, и положить в этом равенстве $x = \alpha$.

1732. Например, $f_1(x) = \begin{cases} 0 \text{ для } x \leqslant 0, \\ x \text{ для } x \geqslant 0, \end{cases}$ $f_2(x) = \begin{cases} x \text{ для } x \leqslant 0, \\ 0 \text{ для } x \geqslant 0. \end{cases}$

1734. Делители нуля имеют вид $(a, 0)$, где $a \neq 0$, и $(0, b)$, где $b \neq 0$.

1737. Матрицы, в которых элемент в левом верхнем углу отличен от нуля, не будут левыми (но будут правыми) делителями нуля.

1738. Указание. Раскрыть скобки в произведении $(a + b)(e + e)$ двумя разными способами.

1740. Матрицы порядка $n \geqslant 2$ с элементами из данного поля при условии, что все строки, начиная со второй, состоят из нулей, образуют кольцо с несколькими левыми единицами, а при аналогичном условии для столбцов — с несколькими правыми единицами.

1742. Указание. Пусть a — элемент кольца, отличный от нуля. Показать, что соответствие $x \to ax$, где x — любой элемент, является взаимно однозначным отображением данного кольца на себя.

1743. Указание. Использовать задачу 1742.

1747. Указание. Найти матрицы E, I, J, K, соответствующие единицам $1, i, j, k$, и проверить таблицу умножения для них: $I^2 = J^2 = K^2 = -E$, $IJ = -JI = K$, $JK = -KJ = I$, $KI = -IK = J$.

1749. Возможны лишь два таких автоморфизма: тождественный и переводящий каждое число в сопряженное.

1750. Указание. Показать, что любое числовое поле содержит число 1, затем целые и, наконец, дробные числа.

1751. Указание. Рассмотреть образы единицы, целых и дробных чисел.

1752. Указание. Показать, что положительное число, как квадрат действительного числа, переходит в положительное. Затем, пользуясь тем, что между двумя различными действительными числами лежит рациональное, и сохранением рациональных чисел, доказать неизменность любого действительного числа.

1753. Возможны лишь два таких отображения: тождественное и переводящее любое комплексное число в сопряженное.

1756. По модулю 3 система несовместна, а по модулю 5 она имеет единственное решение $x = 2$, $y = 3$, $z = 2$.

1757. По модулю 5 система несовместна, а по модулю 7 она имеет единственное решение $x = 2$, $y = 6$, $z = 5$.

1758. а) $x + 2$; б) 1. **1759.** а) 1; б) $5x + 1$. **1760.** а) $x^2 + x + 2$; б) 1.

1761. а) Решение. Предположим, что $f(x)$ и $g(x)$ имеют над полем рациональных чисел общий делитель $d(x)$ положительной степени. Тогда $f(x) = a(x)d(x)$, $g(x) = b(x)d(x)$, где $a(x), b(x), d(x)$ — многочлены с рациональными коэффициентами. Вынося общие знаменатели и общие наибольшие делители числителей коэффициентов и применяя лемму Гаусса о произведении примитивных многочленов, получим: $f(x) = a_1(x)d_1(x)$, $g(x) = b_1(x)d_1(x)$, где все многочлены имеют целые коэффициенты, степень $d_1(x)$ равна степени $d(x)$ и старший коэффициент $d_1(x)$ не делится на p. Переходя к полю вычетов по модулю p, получим общий делитель положительной степени для $f(x)$ и $g(x)$ над этим полем, что невозможно.

б) Многочлены $f(x) = x$, $g(x) = x + p$ взаимно просты над полем рациональных чисел и равны x, т. е. не взаимно просты, над полем вычетов по модулю p.

1762. Указание. Если $f(x)$ и $g(x)$ взаимно просты, то, получив равенство $f(x)u(x) + g(x)v(x) = c$, где $u(x), v(x)$ — многочлены с целыми коэффициентами и c — целое число, доказать, что $f(x)$ и $g(x)$ взаимно просты над полем вычетов по любому простому p, не делящему c.

При доказательстве обратного утверждения использовать задачу 1761.

1763. $(x+1)^3(x^2+x+1)$. **1764.** $(x+3)(x^2+4x+2)$.

1765. $(x^2+1)(x^2+x+2)$. **1766.** $(x^2+x+1)(x^2+2x+4)$.

1767. $f_1 = x^2$, $f_2 = x^2+1 = (x+1)^2$, $f_3 = x^2+x = x(x+1)$, $f_4 = x^2+x+1$ неприводим.

1768. $f_1 = x^3$, $f_2 = x^3+1 = (x+1)(x^2+x+1)$,
$f_3 = x^3+x = x(x+1)^2$, $f_4 = x^3+x^2 = x^2(x+1)$,
$f_5 = x^2+x+1$ неприводим, $f_6 = x^3+x^2+1$ неприводим,
$f_7 = x^3+x^2+x = x(x^2+x+1)$, $f_8 = x^3+x^2+x+1 = (x+1)^3$.

1769. $f_1 = x^2+1$, $f_2 = x^2+x+2$, $f_3 = x^2+2x+2$.

1770. $f_1 = x^3+2x+1$, $f_2 = x^3+2x+2$,
$f_3 = x^3+x^2+2$, $f_4 = x^3+2x^2+1$,
$f_5 = x^3+x^2+x+2$, $f_6 = x^3+x^2+2x+1$,
$f_7 = x^3+2x^2+x+1$, $f_8 = x^3+2x^2+2x+2$.

1771. Указание. Применяя лемму Гаусса, из разложения $f(x)$ на два множителя с рациональными коэффициентами получить разложение на два множителя с целыми коэффициентами. Многочлен $f(x) = px^2+(p+1)x+1 = (px+1)(x+1)$ приводим над полем рациональных чисел, но по модулю p равен $x+1$ и, значит, неприводим.

1772. Решение. Пусть n — порядок группы G и m — наименьшее общее кратное порядков всех ее элементов. Тогда m делит n и $g^m = 1$ для всех $g \in G$. Но уравнение $x^m = 1$ не может иметь в поле P более m решений. Значит, $m = n$. Пусть $n = p_1^{k_1}, \ldots, p_s^{k_s}$ — разложение n в произведение степеней различных простых чисел, тогда для каждого $i = 1, \ldots, s$ в группе G существует элемент h_i порядка $p_i^{k_i}q_i$. Элемент $g_i = h_i^{q_i}$ имеет порядок $p_i^{k_i}$. По задаче 1648 а) элемент $g = g_1 \ldots g_s$ имеет порядок n и является образующим группы G.

1773. Решение. Сначала докажем лемму из теории групп. *Если два элемента a и b циклической группы G не являются квадратами, то их произведение является квадратом.*

Множество H элементов из G, являющихся квадратами, есть подгруппа. Факторгруппа G/H циклическая. Если $C = cH$ — ее образующий, то из $c^2 \in H$ следует $C^2 = c^2H = H$. Значит, или $H = G$, или G/H — группа второго порядка и $ab \in aH \cdot bH = H$, т. е. ab есть квадрат.

Отсюда следует, что по любому простому модулю p одно из чисел $2, 3, 6$ сравнимо с квадратом. В самом деле, при $p = 2$ имеем $2 \equiv 0^2$, при $p = 3$ также $3 \equiv 0^2$. Если $p > 3$, то 2 и 3 можно рассматривать как элементы мультипликативной группы G поля вычетов по модулю p. Согласно задаче 1772 группа G — циклическая, и по лемме, доказанной выше, если 2 и 3 — не квадраты, то $2 \cdot 3 = 6$ — квадрат.

Многочлен

$$\begin{aligned} f(x) &= (x - \sqrt{2} - \sqrt{3})(x - \sqrt{2} + \sqrt{3})(x + \sqrt{2} - \sqrt{3})(x + \sqrt{2} + \sqrt{3}) = \\ &= x^4 - 10x^2 + 1 \end{aligned}$$

неприводим над полем рациональных чисел, так как линейные множители и их произведения по два не являются многочленами с рациональными коэффициентами.

Пусть Z_p — поле вычетов по простому модулю p. По доказанному существует элемент $a \in Z_p$, для которого $a^2 = 2$, или $a^2 = 3$, или $a^2 = 6$. Если $a^2 = 2$, то $x^4 - 10x^2 + 1 = (x^2 + 2ax - 1)(x^2 - 2ax - 1)$; если $a^2 = 3$, то $x^4 - 10x^2 + 1 = (x^2 + 2ax + 1)(x^2 - 2ax + 1)$; если $a^2 = 6$, то $x^4 - 10x^2 + 1 = (x^2 - 5 + 2a)(x^2 - 5 - 2a)$.

1774. Указание. Показать, что если $a = ae$, то e — единица.

1775. а) $a = p$ в кольце вычетов по модулю p^2; б) $a = p$ в кольце вычетов по модулю p^n. Здесь p — любое число, большее 1.

1779. Указание. Для числа $z = a + b\sqrt{-3}$ ввести норму $N(z) = z \cdot \overline{z} = a^2 + 3b^2$. Доказать, что $N(z_1 \cdot z_2) = N(z_1)N(z_2)$, для данного $M > 0$ существует лишь конечное множество чисел z с $N(z) < M$, делителями единицы являются лишь ± 1, делитель z с наименьшей нормой, большей 1, является простым.

1780. Указание. Необратимый элемент преобразования неизвестного перевести в многочлен степени больше двух.

1781. а) Идеал; б) подкольцо; в) идеал; г) не является подгруппой аддитивной группы; д) подкольцо; е) подгруппа аддитивной группы; ж) идеал; з) подкольцо; и) идеал; к) идеал; л) не является подгруппой аддитивной группы.

1785. Указание. Показать, что любой идеал I порождается своим элементом a, отличным от нуля и наименьшим в следующем смысле: а) по абсолютной величине; б) по степени; в) по модулю. В каждом случае использовать существование деления с остатком на элемент $b \neq 0$, причем остаток или равен нулю, или меньше делителя в указанном выше смысле.

1791. Если $ne \neq 0$ для любого $n \neq 0$ из Z, то φ — изоморфизм, и $\varphi(Z)$ изоморфно Z. Если $ne = 0$ для некоторого $n \neq 0$ из Z и n_0 — наименьшее положительное число, для которого $n_0 e = 0$, то $\varphi(Z)$ изоморфно кольцу вычетов по модулю n_0.

1792. б) Четыре смежных класса, состоящие из чисел $a + bi$ со свойствами: 1) a и b четны; 2) a четно, а b нечетно; 3) a нечетно, а b четно; 4) a и b нечетны; в) класс B, содержащий $1 + i$, является делителем нуля, причем $B^2 = 0$.

1799. Число элементов равно p^n.

1800. 1. R — кольцо с делителями нуля, рассматриваемое как модуль над самим собой, λ и a — делители нуля, для которых $\lambda a = 0$. 2. $G = \{a\}$ — циклическая группа порядка n (с аддитивной записью операции), рассматриваемая как модуль над кольцом целых чисел. Тогда $na = 0$.

1804. Указание. Применить задачу 1647 в).

1807. б) Пусть a и b — два различных элемента второго порядка четверной группы (см. ответ задачи 1638 б)). Если рассматривать эту группу как унитарный модуль над кольцом целых чисел (при обычном умножении элементов группы на числа), то $O(a)$ и $O(b)$ совпадают с множеством четных чисел, но $\{a\} \neq \{b\}$.

1808. Указание. Доказать, что множество I всех $\lambda \in R$, для которых $\lambda a \in A$, есть идеал кольца R.

1809. Множество A всех элементов с конечным числом ненулевых компонент.

1810. б) Пример 1. В кольце Z_6 вычетов по модулю 6 как модуле над самим собой элементы 2 и 3 являются периодическими, а их сумма 5 не является периодическим элементом.

Пример 2. Пусть R — кольцо пар (x, y), где x и y — целые числа, а сложение и умножение пар производятся по компонентам (задача 1734). Элементы $a = (1, 0)$ и $b = (0, 1)$ являются делителями нуля. Если R рассматривать как модуль над самим собой, то a и b будут периодическими элементами, так как $O(a)$ — множество всех пар вида $(0, y)$ и $O(b)$ — всех пар вида $(x, 0)$. Но элемент $a + b = (1, 1)$ имеет порядком нулевой элемент $(0, 0)$.

1811. Указание. Положить $\alpha = \alpha'\delta$, $\beta = \beta'\delta$ и показать, что $\alpha'\beta'\delta(a + b) = 0$ и $\alpha\gamma b = 0$.

1812. Указание. Показать, что M есть прямая сумма ненулевых подмодулей M_i, каждый из которых состоит из всех элементов M, порядки которых порождены степенями простого элемента p_i из R.

1813. Указание. Рассмотреть объединение модулей M_i.

1819. Указание. Показать, что $b \to A + b$ есть гомоморфное отображение B на $(A + B)/A$, и применить теорему о гомоморфизмах для модулей.

1820. Указание. Применить индукцию по n. При $n = 1$ применить задачи 1815 и 1818. При $n > 1$ предположить, что в M существует бесконечная возрастающая цепь различных подмодулей $M_1 \subset M_2 \subset \ldots$, положить $A = \{x_1\}$, $B = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} M_i$, $M_i' = M_i \cap A$ и показать, что цепь M_i' стабилизируется на некотором $M_k' = A \cap B$. Затем применить теорему об изоморфизме (см. задачу 1819) и использовать то, что фактормодуль M/A имеет $n - 1$ образующих.

1822. Указание. При доказательстве пункта б) рассмотреть выражение $(1 + 1)(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})$.

1823. в) Пространство $\boldsymbol{V}$ бесконечномерно.

1825. Указание. Доказывать по индукции или положить в линейном соотношении $x = 1, 2, 2^2, \ldots, 2^{n-1}$.

1826. Указание. В случаях в), г), д) дифференцировать два раза и применить индукцию.

1827. Указание. Использовать определитель Вандермонда.

1829. Размерность равна $C_{k+n-1}^{n-1} = C_{k+n-1}^{k}$. Указание. Взять за базу все одночлены и каждому одночлену вида $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$ поставить в соответствие строку

$$\underbrace{1 \ldots 1}_{\alpha_1 \text{ раз}} x_1 \underbrace{1 \ldots 1}_{\alpha_2 \text{ раз}} x_2 \ldots \underbrace{1 \ldots 1}_{\alpha_n \text{ раз}} x_n.$$

1830. C_{k+n}^{k}. Указание. Положить $x_i = \dfrac{y_i}{y_{n+1}}$ и свести к предыдущей задаче.

1831. б) Размерность $\boldsymbol{L}$ равна n; в) размерность $\boldsymbol{L}_k$ равна $n-k+1$; г) $\boldsymbol{L}'$ не является подпространством.

1832. Указание. При доказательстве необходимости получить равенство $B = CA$, где C — невырожденная матрица из коэффициентов в выражениях системы (2) через (1). При доказательстве достаточности приписать к матрице A снизу строку координат вектора $\boldsymbol{b}_i$ и, вычисляя ранг методом окаймления, показать, что ранг полученной матрицы равен k.

1836. г) Пусть на плоскости xOy $\boldsymbol{L} = Ox$, $\boldsymbol{M} = Oy$, $\boldsymbol{L}'$ — любая прямая, проходящая через начало координат и отличная от осей, φ_1 — проектирование на $\boldsymbol{L}$ параллельно $\boldsymbol{M}$, φ_2 — проектирование на $\boldsymbol{L}'$ параллельно $\boldsymbol{M}$. Тогда $\varphi_1\varphi_2 = \varphi_1 \neq \varphi_2 = \varphi_2\varphi_1$. Условие (3) не выполнено, но $\varphi_1\varphi_2$ и $\varphi_2\varphi_1$ являются проектированными.

Указания. б) Показать, что если φ_1 и φ_2 идемпотентны, то $\varphi_1 + \varphi_2$ идемпотентно тогда и только тогда, когда $\varphi_1\varphi_2 + \varphi_2\varphi_1 = 0$. Умножая это равенство слева и справа на φ_1, доказать его эквивалентность условию (1). в) Используя а), свести в) к б). г) Из $\varphi_1\varphi_2\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ вывести $\varphi_1\boldsymbol{x} = \varphi_2\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$. Затем использовать представление $\boldsymbol{x} = \varphi_2\boldsymbol{x} + (\varepsilon - \varphi_2)\boldsymbol{x}$.

1837. Указание. Рассмотреть $(\varphi(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2), \boldsymbol{y})$ и $(\varphi(\lambda\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y})$.

1838. $\frac{1}{5}\sqrt{10}$.

1839. Если $\boldsymbol{L}$ — подпространство всех векторов, у каждого из которых лишь конечное число координат отлично от нуля, то $\boldsymbol{L}^* = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{L} + \boldsymbol{L}^* = \boldsymbol{L} \neq \boldsymbol{V}$, $(\boldsymbol{L}^*)^* = \boldsymbol{V} \neq \boldsymbol{L}$.

1841. Пусть A — матрица преобразования в ортонормированном базисе. а) Поворот плоскости на некоторый угол вокруг начала координат, если $|A| = +1$; зеркальное отражение плоскости в некоторой прямой, проходящей через начало координат, если $|A| = -1$. б) Поворот пространства на некоторый угол вокруг оси, проходящей через начало координат, если $|A| = +1$; поворот, указанный выше, с последующим зеркальным отражением пространства в плоскости, проходящей через начало координат и перпендикулярной к оси вращения, если $|A| = -1$.

1842. Поворот вокруг оси, определенной вектором $\boldsymbol{f}(1,1,0)$ на угол $\alpha = 60^\circ$ в отрицательном направлении. Указание. Вектор $\boldsymbol{f}$ ищем как собственный вектор, принадлежащий собственному значению 1. Угол поворота α находим из условия $2\cos\alpha + 1 = a_{11} + a_{22} + a_{33}$, полученного из инвариантности следа матрицы преобразования φ. Для определения направления поворота берем вектор, не лежащий на оси вращения, например $\boldsymbol{e}_1$, его образ $\varphi\boldsymbol{e}_1$ и вектор оси $\boldsymbol{f}$, и ищем знак определителя из координат этих трех векторов, т. е. ориентацию тройки векторов $\boldsymbol{e}_1, \varphi\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{f}$.

1843. а) Нулевое преобразование; б) поворот на угол $\pi/2$ в положительном или отрицательном направлении с последующим умножением на неотрицательное число; в) $\varphi\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{x}$. При $\boldsymbol{a} \neq 0$ преобразование φ сводится к проектированию вектора $\boldsymbol{x}$ на плоскость, перпендикулярную к вектору $\boldsymbol{a}$, повороту вокруг $\boldsymbol{a}$ на угол $\pi/2$ в положительном направлении и умножению на длину $\boldsymbol{a}$. Указание. Рассмотреть матрицу преобразования φ в ортонормированном базисе $A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{pmatrix}$ и положить $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$, где $a_1 = -a_{23}$, $a_2 = -a_{31} = a_{13}$, $a_3 = -a_{12}$.

1844. Указание. При доказательстве достаточности рассмотреть скалярное произведение $(\varphi(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}), \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})$.

1845. Указание. Найти базис $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$, для которого $l(\boldsymbol{e}_1) = 1, l(\boldsymbol{e}_2) = \cdots = l(\boldsymbol{e}_n) = 0$.

1848. Указание. Предположить, что $l_1(\boldsymbol{a}) \neq 0$, $l_2(\boldsymbol{b}) \neq 0$, и рассмотреть вектор $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$.

1849. Указание. Доказать, что если $b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \neq 0$, то

$$\frac{l_1(\boldsymbol{x})}{l_2(\boldsymbol{x})} = \frac{l_1(\boldsymbol{y})}{l_2(\boldsymbol{y})} = \lambda \neq 0.$$

Рассмотреть произведение $(l(\boldsymbol{x}) - \lambda l_2(\boldsymbol{x}))l_2(\boldsymbol{x})$ и применить задачу 1848.

1850. Указание. Применить задачи 1846 и 1849.

1851. Указание. Применить задачу 1848.

1852. Указание. Положить $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} - \dfrac{l(\boldsymbol{x})}{l(\boldsymbol{a})} \cdot \boldsymbol{a}$.

1853. Указание. Для ненулевых функций взять вектор $\boldsymbol{a}$, не лежащий в $\boldsymbol{S}$, положить $\lambda = \dfrac{l_1(\boldsymbol{a})}{l_2(\boldsymbol{a})}$ и применить задачу 1852 б).

1854. а) Однополостный гиперболоид; б) двуполостный гиперболоид. Указание. Перейти к однородным координатам

1856. Если $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ — нормальный базис (в котором $f(\boldsymbol{x})$ записывается квадратичной формой нормального вида), причем $f(\boldsymbol{e}_1) = 1$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$, $f(\boldsymbol{e}_j) = -1$ $(j = p+1, \ldots, r)$; $f(\boldsymbol{e}_k) = 0$ $(k = r+1, \ldots, p)$, то за искомый базис можно взять, например,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f}_i &= \boldsymbol{e}_i + \boldsymbol{e}_{p+1} \quad (i = 1, \ldots, p); \qquad \boldsymbol{f}_j = -\boldsymbol{e}_p + \boldsymbol{e}_j \quad (j = p+1, \ldots, r); \\ \boldsymbol{f}_k &= \boldsymbol{e}_k \quad (k = r+1, \ldots, n). \end{aligned}$$

Указание. Доказать, что векторы

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f}_{ij} &= \boldsymbol{e}_i + \boldsymbol{e}_j \quad (i = 1, \ldots, p;\ j = p+1, \ldots, r); \\ \boldsymbol{g}_{ij} &= \boldsymbol{e}_i - \boldsymbol{e}_j \quad (i = 1, \ldots, p;\ j = p+1, \ldots, r); \\ \boldsymbol{h}_k &= \boldsymbol{e}_k \quad (k = r+1, \ldots, n) \end{aligned}$$

изотропны и через них выражается базис $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$.

1857. Указание. Использовать задачи 1306 и 1856.

1858. Указание. Рассмотрим случай б) при условии $p \leqslant q$. Взяв запись $f(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + \cdots + x_p^2 = x_{p+1}^2 - \cdots - x_{p+q}^2$ формой нормального вида, проверить, что K содержит подпространство $\boldsymbol{L}$, заданное уравнениями

$$x_1 - x_{p+1} = 0, \ldots, x_p - x_{2p} = 0, \quad x_{2p+1} = 0, \ldots, x_{p+q} = 0, \tag{1}$$

причем размерность $\boldsymbol{L}$ равна $n-q$. Затем предположить, что K содержит подпространство $\boldsymbol{L}'$ размерности $s > n-q$, заданное уравнениями

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n-s), \tag{2}$$

добавить к ним уравнения

$$x_1 = 0, \ldots, x_p = 0, \quad x_{p+q+1} = 0, \ldots, x_n = 0 \tag{3}$$

и прийти к противоречию.

1859. а) Решение. Если $f(\boldsymbol{x})$ в подходящем базисе записать в нормальном виде, то уравнение поверхности S запишется так:

$$x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_n^2 = 1. \tag{1}$$

Если $p = 0$, то на S нет действительных точек. При этом $\min(p-1, q) = -1$. Теорема верна, если считать размерность пустого множества равной -1.

Пусть $p > 0$. Тогда на S имеются точки, например $(1, 0, \ldots, 0)$, т. е. нульмерные многообразия. Пусть $\boldsymbol{P}$ — многообразие максимальной размерности k, входящее в S. $\boldsymbol{P}$ задается системой $n-k$ линейно независимых уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n-k). \tag{2}$$

Эта система не может быть однородной, так как нулевое решение не удовлетворяет уравнению (1). Для простоты предположим, что определитель d порядка $n-k$ из коэффициентов при первых $n-k$ неизвестных отличен от нуля. Тогда общее решение системы (2) можно записать так:

$$x_i = c_{i,n-k+1}x_{n-k+1} + \cdots + c_{in}x_n + c_{i,n+1} \quad (i = 1, 2, \ldots, n-k). \tag{3}$$

Рассмотрим $(n+1)$-мерное пространство $\boldsymbol{V}_{n+1}$. Берем в нем любой базис и считаем, что $\boldsymbol{V}_n$ натянуто на первые n векторов базиса.

Рассмотрим однородную систему уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i x_{n+1} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n-k); \tag{4}$$

коэффициенты такие же, как в (2). Ее общее решение имеет вид

$$x_i = c_{i,n-k+1}x_{n-k+1} + \cdots + c_{in}x_n + c_{i,n+1}x_{n+1} \quad (i = 1, 2, \ldots, n-k) \tag{5}$$

с такими же коэффициентами, как в (3).

Затем рассмотрим конус K, заданный уравнением

$$x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_n^2 - x_{n+1}^2 = 0. \tag{6}$$

Докажем, что $(k+1)$-мерное подпространство $\boldsymbol{L}$, заданное системой (4), лежит в конусе K. Любое решение системы (4), в котором $x_{n+1} = 1$, после отбрасывания x_{n+1} дает решение системы (2), т. е. вектор из $\boldsymbol{P} \subset S$. Но такое решение удовлетворяет уравнению (6) и, значит, лежит в K.

Если $\boldsymbol{x}$ — любое решение системы (4), в котором $x_{n+1} = \alpha \neq 0$, то $\dfrac{1}{\alpha}\boldsymbol{x} \in K$, откуда $\boldsymbol{x} \in K$. Пусть $\boldsymbol{x} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-k}, \alpha_{n-k+1}, \ldots, \alpha_n, 0)$ — решение системы (4) с $x_{n+1} = 0$. Существует решение $\boldsymbol{x}^l$ системы (4), в котором свободные неизвестные имеют значения

$$x_{n-k+1} = \alpha_{n-k+1}, \ldots, \ x_n = \alpha_n, \ x_{n+1} = \frac{1}{l} \quad (l = 1, 2, \ldots).$$

Из формул (5) ясно, что $\lim\limits_{l \to \infty} \boldsymbol{x}^l = \boldsymbol{x}$. По доказанному выше $\boldsymbol{x}^l \in K$. Переходя в равенстве (6) после подстановки в нем координат $\boldsymbol{x}^l$ к пределу при $l \to \infty$, получим $\boldsymbol{x} \in K$.

Итак, $\boldsymbol{L} \subset K$. Индексы инерции K равны $p, q+1$. По задаче 1858 $k + 1 \leqslant \min(p, q+1)$, откуда $k \leqslant \min(p-1, q)$.

Пусть K' — конус с уравнением

$$\pm x_2^2 \pm \cdots - x_{p+1}^2 - \cdots - x_n^2 = 0, \tag{7}$$

где знаки совпадают со знаками соответствующих членов уравнения (1). Согласно задаче 1858 конус K' содержит подпространство $\boldsymbol{L}'$ размерности $k = \min(p-1, q)$, лежащее в подпространстве с уравнением $x_1 = 0$. Возьмем в $\boldsymbol{V}_n$ вектор $\boldsymbol{a}_0 = (1, 0, \ldots, 0)$. Тогда S содержит многообразие $\boldsymbol{P}' = \boldsymbol{a}_0 + \boldsymbol{L}'$ размерности $k = \min(p-1, q)$. Утверждение а) доказано.

б) Указание. При $r < n$ свести б) к а) в r-мерном пространстве.

1860. а) 1; б) 0; в) 1; г) 0; д) 1; е) 1; ж) $n-1$; з) $n-2$; и) 0; к) 1, если $n > 2$, 0, если $n = 2$; л) 1; м) целая часть $\dfrac{n-1}{2}$ или $\dfrac{1}{2}n - 1$, если n четно; $\dfrac{1}{2}(n-1)$, если n нечетно.

1861. б) Указание. Найти системы линейных уравнений, задающих левое и правое ядро.

1862. Базис $\boldsymbol{L}_0'$ образует вектор $(3, -1)$, а базис $\boldsymbol{L}_0''$ — вектор $(2, -1)$.

1863. б) Указание. Пусть $1 < r \leqslant n$. Взять функцию, матрица которой в некотором базисе имеет в левом верхнем углу квадратную невырожденную клетку порядка r, не являющуюся ни симметрической, ни кососимметрической, а на остальных местах — нули.

1864. Указание. Использовать нулевое подпространство функции $b(x, y)$.

1865. Указание. Показать, что координаты всех векторов из $\boldsymbol{L}^*$ удовлетворяют матричному уравнению $BAY = 0$, где A — матрица $b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ в некотором базисе пространства $\boldsymbol{V}_n$, B — матрица, по строкам которой стоят координаты любого базиса подпространства $\boldsymbol{L}$ в данном базисе $\boldsymbol{V}_n$, Y — столбец координат вектора $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{L}^*$ в том же базисе.

1866. Первое доказательство. Так как $b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \neq 0$, но $b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \equiv 0$, то существуют векторы $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ такие, что $b(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) \neq 0$. Умножая один из этих векторов на $\dfrac{1}{b(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)}$, получим векторы $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$, для которых $b(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) = 1$. Векторы $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ линейно независимы, так как если $\boldsymbol{e}_2 = \alpha \boldsymbol{e}_1$, то $b(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) = \alpha b(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1) = 0$. Пусть $\boldsymbol{L}_1$ — двумерное подпространство, натянутое на $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$, и $\boldsymbol{L}_2$ — множество всех $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{V}_n$ таких, что $b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$ для любого $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{L}_1$. По задаче 1865 $\boldsymbol{L}_2$ — подпространство размерности $\geqslant n - 2$. Пересечение $\boldsymbol{L}_1$ и $\boldsymbol{L}_2$ содержит лишь нулевой вектор, так как, если $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{L}_1$, то $\boldsymbol{x} = \alpha_1 \boldsymbol{e}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{e}_2$. Если $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{L}_2$, то $b(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{x}) = b(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{x}) = 0$ и $b(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1) = b(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2) = 0$; $b(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) = -b(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1) = 1$, откуда $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. По задаче 1296 размерность $\boldsymbol{L}_2$ равна $n-2$ и $\boldsymbol{V}_n$ есть прямая сумма $\boldsymbol{L}_1$ и $\boldsymbol{L}_2$. Если на $\boldsymbol{L}_2$ еще $b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \neq 0$, то, как выше, существуют векторы $\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4 \in \boldsymbol{L}_2$, для которых $b(\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4) = 1$ и т. д. После конечного числа шагов придем к подпространству $\boldsymbol{L}_{k+1}$, на котором $b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \equiv 0$. Если $\boldsymbol{L}_{k+1}$ ненулевое, то берем в нем любой базис $\boldsymbol{e}_{2k+1}, \ldots, \boldsymbol{e}_n$. Векторы $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ образуют искомый базис.

Второе доказательство[1]. Это доказательство дает практический метод нахождения невырожденного линейного преобразования неизвестных, приводящего данную билинейную форму к указанному в задаче каноническому виду.

Пусть в некотором базисе $b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$. За счет изменения нумерации неизвестных можно считать $a_{12} \neq 0$. Запишем форму в виде

$$b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1(a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n) - y_1(a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n) + b_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

и совершим невырожденное преобразование неизвестных

$$x_1' = x_1,\ x_2' = a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n,\ x_3' = x_3, \ldots, x_n' = x_n$$

и такое же преобразование для y_i. Получим

$$b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1'y_2' - x_2'y_1' + b_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}).$$

Если $b_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ не содержит $\boldsymbol{x}_2', \boldsymbol{y}_2'$, то поступаем с ней аналогично. Иначе $b_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum\limits_{i,j=2}^{n} a_{ij}' x_i' y_j'$, где $a_{2k}' \neq 0$ для некоторого k, $2 \leqslant k \leqslant n$. Совершив невырожденное преобразование неизвестных

$$x_1'' = x_1' - a_{23}'x_3' - \cdots - a_{2n}'x_n', \quad x_2'' = x_2', \ldots, x_n'' = x_n'$$

и такое же преобразование y_i', получим $b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1''y_2'' - x_2''y_1'' + b_3(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, где $b_3(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ не содержит $x_1'', x_2'', y_1'', y_2''$. Если $b_3(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \neq 0$, то поступаем с ней аналогично.

1867. $b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = u_1v_2 - u_2v_1 + u_3v_4 - u_4v_3$; $u_1 = x_1 + 3x_4$, $u_2 = x_2 + 2x_3 - x_4$, $u_3 = x_3$, $u_4 = 6x_4$ и такое же выражение v_i через y_i.

1868. $b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = u_1v_2 - u_2v_1 + u_3v_4 - u_4v_3$; $u_1 = x_1 - 4x_4$, $u_2 = x_2 + 2x_3$, $u_3 = x_3$, $u_4 = -8x_4$ и такое же выражение v_i через y_i.

1869. На матричном языке получаем утверждение: для того чтобы действительная симметрическая матрица A была ортогонально подобна матрице, у которой все элементы главной диагонали равны нулю, необходимо и достаточно, чтобы след A был равен нулю.

Указание. При доказательстве достаточности применить индукцию по n. При $n > 1$ взять любой ортонормированный базис $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \ldots, \boldsymbol{f}_n$. Если он не лежит на конусе, то показать, что существуют векторы $\boldsymbol{f}_i, \boldsymbol{f}_j$, для которых $f(\boldsymbol{f}_i) > 0$, $f(\boldsymbol{f}_j) < 0$, и за первый вектор искомого базиса взять вектор $\boldsymbol{e}_1$, полученный нормированием вектора $\boldsymbol{f}_i + \lambda \boldsymbol{f}_j$, где λ найдено из условия $f(\boldsymbol{f}_i + \lambda \boldsymbol{f}_j) = 0$.

[1] Мальцев А. И. Основы линейной алгебры — 2-е изд. — М.: Гостехиздат, 1956, с. 217.

1870. Указание. Применить свойство: четыре различные точки тогда и только тогда образуют параллелограмм, когда их радиусы-векторы удовлетворяют условию $\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_4$.

1875. $x_1 = -1 + 3t_1 - 4t_2$, $x_2 = 2 - t_1 + t_2$, $x_3 = t_1$, $x_4 = t_2$.

1876. $x_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}t_1 + \frac{1}{2}t_2$, $x_2 = t_1$, $x_3 = 3 - 4t_2$, $x_4 = 0$, $x_5 = t_2$.

1877. $3x_1 - x_2 - x_3 = 8$, $x_1 - 2x_2 + x_4 = 3$, $5x_1 - 2x_2 - x_5 = 7$.

1878. $x_1 - 4x_2 + x_3 + 2 = 0$, $2x_1 - 3x_2 - x_4 + 7 = 0$, $3x_1 - 5x_2 - x_5 + 8 = 0$.

1882. Пусть r и r' — соответственно ранги матриц

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad A' = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix};$$

r_{ij} и r'_{ij} — соответственно ранги матриц из i-й и j-й строк матриц A и A'.

Возможны следующие пять случаев, для которых необходимы и достаточны указанные значения рангов:

1) три плоскости проходят через одну точку: $r = r' = 3$;

2) три плоскости не имеют общих точек, но попарно пересекаются по прямым (образуют призму): $r = r_{12} = r_{13} = r_{23} = 2$, $r' = 3$;

3) две плоскости параллельны, а третья их пересекает: $r_{12} = 1$, $r = r'_{12} = r_{13} = r_{23} = 2$, $r' = 3$ и два аналогичных случая;

4) три плоскости проходят через одну прямую: $r = r_{12} = r_{13} = r_{23} = r' = 2$;

5) три плоскости параллельны: $r = 1$, $r'_{12} = r'_{13} = r'_{23} = r' = 2$.

1883. Пусть r и r' — соответственно ранги матриц

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{pmatrix}.$$

Возможны четыре случая:

1) $r = 3$, $r' = 4$; прямые скрещиваются; 2) $r = r' = 3$; прямые пересекаются; 3) $r = 2$, $r' = 3$; прямые параллельны; 4) $r = r' = 2$; прямые совпадают.

1884. Пусть r и r' — соответственно ранги простой и расширенной матриц объединенной системы уравнений (1) и (2). Возможны пять случаев:

1) $r = r' = 4$; плоскости пересекаются в одной точке; 2) $r = 3$, $r' = 4$; плоскости скрещиваются и параллельны прямой, заданной теми тремя из уравнений (1), (2), у которых левые части линейно независимы; 3) $r = r' = 3$; плоскости пересекаются по прямой; 4) $r = 2$, $r' = 3$; плоскости параллельны; 5) $r = r' = 2$; плоскости совпадают.

1885. Пусть r и r' — соответственно ранги матриц

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_n \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n & c \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_n & d \end{pmatrix}.$$

Возможны три случая:

1) $r = r' = 2$; гиперплоскости пересекаются по $(n-2)$-мерной плоскости; 2) $r = 1$, $r' = 2$, т. е. $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \cdots = \dfrac{a_n}{b_n} \neq \dfrac{c}{d}$; гиперплоскости параллельны; 3) $r = r' = 1$; гиперплоскости совпадают.

1886. Указание. Применить задачу 1874 и соответствующее свойство подпространств.

1888. Указание. Применить задачу 1887.

1889. Указание. Применить задачу 1887.

1890. Указание. Применить задачу 1887.

1891. Если $\pi_1 \parallel \pi_2$, то $\pi_3 = \pi_1$; если $\pi_1 \nparallel \pi_2$, то $\pi_3 = a_1 + (L_1 + L_2)$.

1893. Пусть плоскость π_1 задана системой уравнений

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = c_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{s1}x_1 + \cdots + a_{sn}x_n = c_s, \end{array} \tag{1}$$

а плоскость π_2 — системой

$$\begin{array}{l} b_{11}x_1 + \cdots + b_{1n}x_n = d_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ b_{t1}x_1 + \cdots + b_{tn}x_n = d_t, \end{array} \tag{2}$$

и пусть r_1, r_1' и r_2, r_2' — соответственно ранги матрицы из коэффициентов при неизвестных и расширенной матрицы систем (1) и (2), r и r' — ранги матрицы из коэффициентов при неизвестных и расширенной матрицы объединенной системы, состоящей из всех уравнений систем (1) и (2). Чтобы системы (1) и (2) задавали плоскости, необходимо и достаточно, чтобы каждая из них была совместна, т. е. $r_1 = r_1'$ и $r_2 = r_2'$. При выполнении этих условий для параллельности данных плоскостей необходимы и достаточны условия: $r = \max(r_1, r_2)$, $r' = r + 1$.

1895. а) Многогранник P задается системой неравенств $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$, $x_3 \geqslant 0$, $x_4 \geqslant 0$, $x_1 + x_3 \leqslant 1$, $x_1 + x_4 \leqslant 1$, $x_2 + x_3 \leqslant 1$, $x_2 + x_4 \leqslant 1$;

б) трехмерными гранями являются четыре четырехугольные пирамиды: $OABCD$ с вершиной D, $OABCE$ с вершиной E, $ODEFA$ с вершиной A, $ODEFB$ с вершиной B, и четыре тетраэдра $ACDF$, $ACEF$, $BCDF$, $BCEF$. Указание. Через каждые четыре точки, не лежащие в одной двумерной плоскости, провести трехмерную плоскость. Если $\sum a_i x_i = b$ — уравнение такой плоскости и для координат всех данных точек или $\sum a_i x_i \geqslant b$, или $\sum a_i x_i \leqslant b$, то соответствующее неравенство входит в систему неравенств, задающих многогранник P. Выпуклое замыкание всех точек, лежащих в данной трехмерной плоскости, будет трехмерной гранью данного многогранника. Например, точки O, A, B, D определяют трехмерную плоскость с уравнением $x_4 = 0$. Для всех данных точек $x_4 \geqslant 0$. Поэтому неравенство $x_4 \geqslant 0$ входит в искомую систему. На трехмерной плоскости $x_4 = 0$ лежат пять данных точек: O, A, B, C, D. Их выпуклое замыкание есть пирамида, являющаяся трехмерной гранью многогранника P. Напротив, четыре точки O, A, B, F определяют трехмерную плоскость с уравнением $x_3 - x_4 = 0$, причем для точки D имеем $x_3 - x_4 > 0$, а для точки E имеем $x_3 - x_4 < 0$. Значит, эта плоскость не приводит к искомому неравенству и не содержит грани многогранника P. Для уменьшения числа рассматриваемых четверок точек надо учесть, что две четверки $OABC$ и $ODEF$ равноправны и лежат в двумерных плоскостях.

1896. а) Многогранник P задается системой неравенств $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$, $x_3 \geqslant 0$, $x_4 \geqslant 0$, $x_1 + x_4 \leqslant 1$, $x_2 + x_4 \leqslant 1$, $x_3 + x_4 \leqslant 1$;

б) Трехмерными гранями являются куб $OABCDEFQ$ и шесть четырехугольных пирамид с общей вершиной H, а именно: $OBCFH$, $OACEH$, $OABDH$, $ADEGH$, $BDFGH$, $CEFGH$.

1897. Пять вершин

$$A(1,1,1),\ B(1,1,-2),\ C(1,-2,1),\ D(-2,1,1),\ E\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right).$$

Многогранник имеет шесть треугольных граней ABC, ABD, ACD, BCE, BDE, CDE и представляет собой два тетраэдра $ABCD$ и $BCDE$ с общим основанием BCD.

1898. а) Тетраэдр с вершинами $(1,0,0,0)$, $(0,1,0,0)$, $(0,0,1,0)$, $(0,0,0,1)$;

б) Октаэдр с вершинами $(1,1,0,0)$, $(1,0,1,0)$, $(1,0,0,1)$, $(0,1,1,0)$, $(0,1,0,1)$, $(0,0,1,1)$;

в) трехугольная призма с основаниями в точках $(1,0,0,0)$, $(0,1,0,0)$, $(0,0,1,0)$ и $(1,0,0,1)$, $(0,1,0,1)$, $(0,0,1,1)$;

г) квадрат с вершинами $(1,0,1,0)$, $(1,0,0,1)$, $(0,1,1,0)$, $(0,1,0,1)$.

1899. а) 8; б) 28; в) 14; г) 2; д) 7; е) 4; ж) 7; з) 6; и) 3; к) 3; л) 1; м) 6; н) 5; о) 12. Указание. Ввести систему координат и рассмотреть параметрические уравнения прямой и плоскости в векторной форме.

1901. а) $a_i = \varphi(\boldsymbol{e}_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

1902. $F(\varphi) = \varphi(\boldsymbol{x})$, $\varphi \in \boldsymbol{V}_n^*$.

1904. $A' = C^*AC$, где C — матрица перехода от старого базиса к новому, записанная по столбцам.

1905. $A' = D^*AD$, где $D = (C^*)^{-1}$ и C — матрица перехода от старого базиса к новому, записанная по столбцам.

1906. $A' = C^{-1}AC = D^*AC$, где C — матрица перехода от старого базиса к новому, записанная по столбцам, и $D = (C^*)^{-1}$.

1907. б) $F(\boldsymbol{x}, \varphi) = \varphi(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V}_n$, $\varphi_{\alpha j} \in \boldsymbol{V}_n^*$.

1908. Указание. б) Взять свертку $a_{i\alpha}b^{\alpha f}$ тензора $a_{ij}b^{kl}$, где b^{kl} — тензор с координатами $b^{kl} = a^{kl}$ в одном базисе. Применить задачу 1907.

1913. $a'^{j_1 j_2 \ldots j_q}_{i_1 i_2 \ldots i_p} = a^{\pi(j_1)\pi(j_2)\ldots\pi(j_q)}_{\pi(i_1)\pi(i_2)\ldots\pi(i_p)}$.

1914. $a^{j_1 j_2 \ldots j_n}_{i_1 i_2 \ldots i_n} = (-1)^{s+t}$, где s — число инверсий в перестановке $i_1, i_2, \ldots, i_n$, а t — в перестановке $j_1, j_2, \ldots, j_n$, если индексы сверху и снизу различны; в противном случае указанная координата равна нулю.

1917. Инвариант, равный числу 0 во всех базисах.

1918. Указание. а) Проверить это для каждого из правил эквивалентности, указанных во введении к этому параграфу; б) для доказательства необходимости при $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ взять свертку по φ со свойством $\varphi(\boldsymbol{x}) \neq 0$. Для доказательства достаточности для пары $\boldsymbol{x}\boldsymbol{0}'$ положить $\boldsymbol{0} = 0\boldsymbol{x}$ в паре $\boldsymbol{0}\boldsymbol{0}'$; в) взять свертку с $\varphi' \in \boldsymbol{V}$, для которого $\varphi'(\boldsymbol{x}'_i) = 1$, $\varphi'(\boldsymbol{x}'_j) = 0$ $(j \neq i)$; г) использовать в).

1923. б) $g_{11} = g_{22} = 1$, $g_{12} = g_{21} = \cos\alpha$;

в) $g^{11} = g^{22} = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$; $g^{12} = g^{21} = -\dfrac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha}$;

г) $\boldsymbol{e}^1 = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}(\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2\cos\alpha) = (1, -\operatorname{ctg}\alpha)$, $\boldsymbol{e}^2 = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}(-\boldsymbol{e}_1\cos\alpha + \boldsymbol{e}_2) = \left(0, \dfrac{1}{\sin\alpha}\right)$;

д) $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x^1y^1 + (x^1y^2 + x^2y^1)\cos\alpha + x^2y^2$, где $\boldsymbol{x} = x^1\boldsymbol{e}_1 + x^2\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{y} = y^1\boldsymbol{e}_1 + y^2\boldsymbol{e}_2$;

е) $\varepsilon_{12} = -\varepsilon_{21} = |\sin\alpha|$, $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 0$;

ж) $S = \varepsilon_{ij}x^iy^j = |\sin\alpha|\begin{vmatrix} x^1 & x^2 \\ y^1 & y^2 \end{vmatrix}$.

1924. При переходе к новому базису с той же ориентацией $\boldsymbol{y}$ не изменяется, а с другой ориентацией — меняет направление. Вектор $\boldsymbol{y}$ получается из $\boldsymbol{x}$ поворотом на угол $\pi/2$ в отрицательном направлении по отношению к ориентации базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$. Указание. При выяснении зависимости $\boldsymbol{y}$ от базиса использовать инвариантность тензорных уравнений. Для выяснения геометрической связи $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ рассмотреть ортонормированный базис.

1925. При переходе к новому базису с той же ориентацией величины b_{ij} изменяются как координаты дважды ковариантного тензора. При переходе к базису с противоположной ориентацией величины b_{ij} дополнительно меняют знак.

1926. $a_{ijk} = g_{i\alpha}g_{j\beta}a_k^{ij}$ $(i, j, k = 1, 2, \ldots, n)$.

Указание. Свернуть обе части данного в задаче равенства с $g_{i\alpha'}g_{j\beta'}$ по i и j, использовать соотношение $g_{i\alpha'}g^{i\alpha} = \delta^{\alpha}_{\alpha'}$ и после этого изменить обозначения i, j на α, β и α', β' на i, j.

1928. $S = 3/2$, $h = 1$. Указание. Площадь искать по формуле $S = \dfrac{1}{2}bc\sin A$ или использовать задачу 1935.

1929. $Q(-4, 2, 0)$. Указание. Написать параметрические уравнения прямой PQ в контравариантных координатах.

1930. Указание. При доказательстве б) взять ортонормированный базис $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4$, где $\boldsymbol{e}_1$ направлен по $\boldsymbol{u}$, а $\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4$ лежат в одной трехмерной плоскости с $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ и одинаково с ними ориентированы. Использовать выражение ориентированного объема по формулам (17) и (18) из введения к этому параграфу.

1931. Инвариант, равный числу n в любом базисе. **1933.** 6.

1934. б) $G_1 = \begin{pmatrix} 6 & -5 & 2 \\ -5 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; в) $\left(\dfrac{2}{\sqrt{11}}, \dfrac{1}{\sqrt{11}}, \dfrac{-1}{\sqrt{11}}\right)$

с точностью до знака.

1935. Указание. Первый способ: принять данные векторы за базис; второй способ: выбрать ортонормированный базис.

1937. $d = \left|\dfrac{\sin\omega(ax_0 + by_0 + c)}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\omega}}\right|$. Указание. Применить задачу 1936.

1938. Указание. Перейти к ортонормированному базису с той же ориентацией.

Учебное издание

Проскуряков Игорь Владимирович

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ

Ведущий редактор *И. А. Маховая*
Художники *В. А. Чернецов, Н. С. Шувалова*
Художественный редактор *О. Г. Лапко*
Оригинал-макет подготовлен
О. Г. Лапко, И. В. Терёшкиной, В. Н. Цлаф, С. А. Янковой в пакете LaTeX 2_ε
с использованием кириллических шрифтов LH семейства Computer Modern

Художественное оформление серии выполнено Издательством Московского университета и издательством «Проспект» по заказу Московского университета

Подписано в печать 01.12.04 г. Формат $70 \times 100/16$
Гарнитура Computer Modern. Бумага офсетная. Печать офсетная
Усл. печ. л. 31,2. Тираж 2000 экз. Заказ 3773

Издательство «БИНОМ. Лаборатория знаний»
Адрес для переписки: Москва, 119071, а/я 32
Телефон (095)955-0398, e-mail: Lbz@aha.ru, http://www.Lbz.ru

Отпечатано с готовых диапозитивов
в полиграфической фирме «Полиграфист»
160001, г. Вологда, ул. Челюскинцев, 3

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

КЛАССИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТСКИЙ УЧЕБНИК

Несколько поколений студентов механико-математического факультета Московского университета учились у Игоря Владимировича Проскурякова и по его задачнику. Почти в каждое новое издание вносились исправления и дополнения, так что в настоящем виде задачник является плодом кропотливого труда всей жизни автора.

Задачник И. В. Проскурякова еще долгие годы будет полезен студентам и преподавателям физико-математических, инженерно-физических и экономико-математических специальностей вузов.

Э.Б. Винберг

доктор физико-математических наук,
профессор Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова

ISBN 5-94774-209-8

9785947742091